Л. А. Аксентьев, М. И. Киндер, С. Б. Сагитова, Разрешимость внешней обратной краевой задачи в случае многосвязной области,
Тр. сем. по краев. задачам, 1983, выпуск 20, 22–34

УДК 517.54

РАЗРЕШИМОСТЬ ВНЕШНЕЙ ОБРАТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В СЛУЧАЕ МНОГОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ

Л. А. АКСЕНТЬЕВ, М. И. КИНДЕР, С. Б. САГИТОВА

Обратные краевые задачи (окз) для аналитических функций в случае многосвязных областей с дуговым параметром были исследованы Ф. Д. Гаховым [1] и М. Т. Нужиным [2]. Ранее М. Т. Нужин [3] дал решение этих задач в случае двусвязных областей. Подробно результаты по решению окз в случае многосвязных областей изложены в монографии [4, § 12].

Внешняя окз изучалась только с гидромеханическими целями (за исключением двусвязного случая [5]) и с гидромеханической нормировкой: $w(\infty)=\infty$. Результаты по этим задачам описаны в [4, гл. IV]. По поводу внешней окз с нормировкой $w(\infty)=w_0$ при неизвестной величине w_0 имеются указания о трудностях в определении w_0 [4, с. 80], и намечен путь исследования задачи в двусвязном случае. Однако этот путь пока не привел к точному выводу о разрешимости задачи [4, с. 87—88].

В данной статье мы доказываем теорему о разрешимости внешней окз в случае области любой связности, попутно видоизменяя постановку задачи с тем, чтобы автоматически удовлетворить первой группе условий разрешимости (§ 1). В этом же параграфе описаны некоторые множества решений уравнения Гахова в многосвязном случае. В § 2 приведены результаты для окз в двусвязном случае. В третьем параграфе намечены нерешенные вопросы.

§ 1. Взяв за основу постановку внутренней окз в случае многосвязной области [4, с. 76] и видоизменение такой постановки, предложенное Л. Н. Журбенко [6], сформулируем внешнюю окз в случае $(n+1)$-связной области.

Требуется найти регулярную функцию $w(z)$ и $(n+1)$-связную область D_z ее определения, в которой содержится ∞ и на границе $\partial D_z=\bigcup\limits_{k=0}^{n} L_{zk}^{-}$ которой задаются значения искомой функции

$$w(z)\big|_{L_{zk}}=u_k(s/l_k)+iv_k(s/l_k),\ 0\leqslant s\leqslant l_k;\ k=\overline{0,n}. \tag{1}$$

Здесь $l_0=1$; l_k, $k=\overline{1,n}$, являются пока неизвестными длинами граничных кривых, s — длина переменной дуги на k-ом граничном контуре; верхний значок у L_{zk}^{-} свидетельствует о том, что этот контур должен обходиться по часовой стрелке при изменении s от 0 до l_k. Значение $w(\infty)=w_0$ тоже предполагается неизвестным.

На функции (1) накладываются обычные дополнительные требования (1)—3) на с. 76 из [4]), которые обеспечивают однолистную структуру области $D_w=w(D_z)$ с границей

$$\partial D_w = L_{w0}^{+} \cup \bigcup_{k=1}^{n} L_{wk}^{-}$$

и охватывающим контуром L_{w0}, причем параметрическими уравнениями кривых L_{wk} являются уравнения (1).

Как и в § 12 из [4], приведем решение сформулированной задачи к задаче Шварца для функции $\ln \frac{dz}{dw}$ с особенностью логарифмического характера в точке w_0. На основании (1) запишем

$$\ln |dz/dw| \, |_{L_{wk}} = p_k(\sigma) + \ln l_k, \ k = \overline{0, n}, \tag{2}$$

где $\sigma = \sigma_k(s/l_k)$ — длина переменной дуги на контуре L_{wk}.

Предварительно определим регулярную функцию $\chi(w)$ в области D_w по условиям

$$\mathrm{Re}\, \chi(w) \, |_{L_{wk}} = p_k(\sigma) + h_k, \ k = \overline{0, n}. \tag{3}$$

Решение этой видоизмененной задачи Шварца запишется в форме $\chi(w) + i\alpha$, где α — вещественная постоянная,

$$\chi(w) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\sigma_k(1)} (p_k(\sigma) + h_k) \frac{\partial M(w, \tau(\sigma))}{\partial n} d\sigma,$$

$M(w, \tau)$ — комплексная функция Грина, $\tau(\sigma)$ — точка на контуре L_{wk}, $\vec{n}$ — внутренняя нормаль к этому контуру. Все постоянные величины h_k определятся единственным образом из требования однозначности функции $\mathrm{Im}\, \chi(w)$ (первая группа условий разрешимости).

Для перехода к dz/dw понадобится функция $F(w, w_0)$, отображающая область D_w на единичный круг с концентрическими разрезами так, что $F(w_0, w_0) = 0$. Обозначим радиусы концентрических разрезов через $R_k(w_0)$, так что

$$|F(w, w_0)| \, |_{L_{wk}} = R_k(w_0), \ \ k = \overline{1, n}.$$

Отображающая функция представима в виде

$$F(w, w_0) = (w - w_0) f(w, w_0), \tag{4}$$

причем $f(w_0, w_0) = F'_w(w_0, w_0)$.

Граничные значения двух функций $\ln | e^{\chi(w)} F^{-2}(w, w_0) |$ и $\ln | dz/dw |$ будут равны, если на контуре L_{wk} в силу (2) и (3) будем иметь

$$p_k(\sigma) + \ln l_k = p_k(\sigma) + h_k - 2 \ln R_k(w_0),$$

т. е.

$$l_k = R_k^{-2}(w_0) \, e^{h_k}, \ k = \overline{1, n}. \tag{5}$$

Тем самым неизвестные длины l_k будут определены равенствами (5). Напомним, что $l_0 = R_0 = e^{h_0} = 1$, и поэтому равенство (5) при $k = 0$ превратится в тождество. Следовательно, при выполнении (5) и равенства

$$\text{выч}_{w_0}[e^{\chi(w)}F^{-2}(w, w_0)] = 0 \tag{6}$$

(гарантирующего отсутствие логарифмической особенности у $z(w)$ в точке w_0) получим

$$dz/dw = e^{\chi(w)+i\alpha}F^{-2}(w, w_0). \tag{7}$$

Раскроем уравнение (6). Будем иметь с использованием (4)

$$0 = \text{выч}_{w_0}[e^{\chi(w)+i\alpha}f^{-2}(w, w_0)(w-w_0)^{-2}] = [e^{\chi(w)+i\alpha}f^{-2}(w, w_0)]'_{w_0} =$$
$$= e^{\chi(w_0)+i\alpha}f^{-2}(w_0, w_0)\{\chi'(w_0) - 2f'_w(w_0, w_0)/f(w_0, w_0)\}.$$

Отсюда следует уравнение для определения w_0

$$\chi'(w) = 2f'_1(w, w)/f(w, w), \tag{8}$$

в котором $f'_1(w, w)$ означает применение оператора

$$\partial/\partial w = (1/2)[\partial/\partial u - i\partial/\partial v], \tag{9}$$

$u + iv = w$, по первому аргументу к функции $f(w, w)$. Ф. Д. Гахов [7, 8] вывел уравнение

$$\chi'(\zeta) = 2\bar{\zeta}/(1-|\zeta|^2), \; |\zeta| < 1, \tag{10}$$

связанное с внешней окз в случае односвязной области, и доказал разрешимость этого уравнения. С помощью корня ζ_0 уравнения (10) Ф. Д. Гахов построил функцию, отображающую круг на искомую область в плоскости z в виде

$$z = e^{i\alpha}\int e^{\chi(\zeta)}\left(\frac{1-\bar{\zeta}_0\zeta}{\zeta-\zeta_0}\right)^2 d\zeta + C. \tag{11}$$

Как и в других окз, формула (11) является, по существу, решением всей задачи, так как второй элемент решения — функция $w(z)$ — получается исключением ζ из (11) и $w = w(\zeta)$, причем $w(\zeta)$ отображает известную область D_w на круг $|\zeta| < 1$.

Вернемся к уравнению (8), обобщающему уравнение (10). Назовем его *уравнением Гахова* в случае многосвязной области. Докажем разрешимость этого уравнения.

В [9, с. 239] выведено соотношение для функции $F(w, w_0)$, отображающей многосвязную область D_w на круг с концентрическими разрезами,

$$\ln F(w, w_0) = -M(w, w_0) - \sum_{k, m=1}^{n} \Pi_{km} w_k(w)\,\omega_m(w_0). \tag{12}$$

В этом соотношении $\omega_k(w)$ является гармонической мерой контура L_{wk} относительно области D_w, а $w_k(w)$ представляет собой аналитическую функцию, вещественная часть которой совпадает с $\omega_k(w)$ $(k=\overline{1, n})$. Постоянная матрица $(\Pi_{km})_{k, m=1}^{n}$ является вещественной и симметричной. С использованием представления (4) из (12) получим

$$\ln|f(w, w_0)| = \operatorname{Re}\ln\left[\frac{F(w, w_0)}{w-w_0}\right] =$$
$$= -G(w, w_0) - \sum_{k, m=1}^{n} \Pi_{km}\omega_k(w)\,\omega_m(w_0) - \ln|w-w_0|,$$

где $G(w, w_0) = \operatorname{Re} M(w, w_0)$ — функция Грина для задачи Дирихле в случае области D_w. Отсюда на основании симметричности функции Грина по своим аргументам и симметричности матрицы (Π_{km}) выводится равенство $\ln|f(w, w_0)| = \ln|f(w_0, w)|$. Применяя к нему оператор (9), запишем

$$(\partial/\partial w)\ln|f(w, w_0)| = (\partial/\partial w)\ln|f(w_0, w)|,$$

т. е.

$$[\ln|f(w, w_0)|]_1' = [\ln|f(w_0, w)|]_2',$$

причем значок (1 или 2) показывает, по какому аргументу (по первому или второму) происходит дифференцирование. Уберем в последнем выражении значок 0. Тогда оно перепишется в виде

$$[\ln|f(w, w)|]_1' = [\ln|f(w, w)|]_2'. \tag{13}$$

Обратим еще внимание на то, что в силу аналитичности по первому аргументу

$$[\ln|f(w, w)|]_1' = (1/2)[\ln f(w, w) + \overline{\ln f(w, w)}]_1' =$$
$$= (1/2)[\ln f(w, w)]_1'$$

и аналогично $\chi'(w) = 2(\partial/\partial w)\operatorname{Re}\chi(w)$. Поэтому уравнение (8) перепишется в виде

$$(\partial/\partial w)\operatorname{Re}\chi(w) = [\ln f(w, w)]_1' = 2[\ln|f(w, w)|]_1'. \tag{14}$$

С учетом (13) запишем

$$2[\ln|f(w, w)|]_1' = [\ln|f(w, w)|]_1' + [\ln|f(w, w)|]_2' =$$
$$= \frac{\partial}{\partial w}\ln|f(w, w)|. \tag{15}$$

В силу (14) и (15) уравнение (8) приведется к такой форме:

$$\frac{\partial}{\partial w}\ln[|e^{\chi(w)}|/|f(w, w)|] = 0. \tag{16}$$

Поскольку уравнение (16) при $w=u+iv\in D_w$ эквивалентно двум вещественным уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial u}[|e^{\chi(w)}|/|f(w,\ w)|]=0,\quad \frac{\partial}{\partial v}[|e^{\chi(w)}|/|f(w,\ w)|]=0,$$

то эти уравнения будут удовлетворены при значении w_0, которое дает экстремум или седловую точку на поверхности с уравнением $\Omega=|e^{\chi(w)}|/|f(w,\ w)|$.

Используя (12) и вытекающее из него равенство

$$-\ln|f(w,\ w)|=g(w,\ w)+\sum_{i,\,k=1}^{n}\Pi_{ik}\omega_i(w)\,\omega_k(w),$$

где $g(w,w_0)=G(w,w_0)+\ln|w-w_0|$ — гармоническая в области D_w функция, можем переписать выражение для $\ln\Omega(w)$ так:

$$\ln\Omega(w)=g(w,\ w)+\operatorname{Re}\chi(w)+\sum_{i,\,k=1}^{n}\Pi_{ik}\omega_i(w)\,\omega_k(w). \tag{17}$$

Пользуясь этим представлением, докажем, что функция $\ln\Omega(w)$ стремится к $-\infty$, когда точка w приближается по какому-нибудь пути к границе области D_w. В [9, § 3] в качестве одного из следствий формулы вариации функции Грина приводится неравенство

$$g(w_0,\ w_0)\leqslant 2g(w,\ w_0)-g(w,\ w) \tag{18}$$

для любых $w,\ w_0\in D_w$. Неравенство (18) справедливо, в частности, для областей, ограниченных аналитическими кривыми. Любую многосвязную область, ограниченную замкнутыми жордановыми кривыми, всегда можно отобразить на область с аналитической границей. Учитывая связь функций Грина конформно эквивалентных областей, мы заключаем, что неравенство (18) справедливо для любой многосвязной области с жордановой границей. Из неравенства (18) следует, что когда точка w приближается по какому-нибудь пути Γ_t к граничной точке $t\in\partial D_w$, функция $g(w,\ w)$ стремится к $-\infty$. В самом деле, если допустим обратное, т. е.

$$\varlimsup_{w\to t} g(w,\ w)\geqslant -K, \tag{19}$$

то, переходя к пределу в правой части неравенства (18) при $w\to t\in\partial D_w$, мы получим неравенство:

$$g(w_0,\ w_0)\leqslant K+2g(t,\ w_0),\quad t\in\partial D_w,$$

т. е.

$$g(w_0,\ w_0)\leqslant K+2\ln|t-w_0|, \tag{20}$$

справедливое для $w_0\in D_w$. Оставаясь в области D_w, будем приближать точку w_0 к t по пути, финишная часть которого лежит на Γ_t. Тогда величина $g(w_0,\ w_0)$, как видно из правой части (20), может быть сделана меньше любого наперед заданного отрицательного числа. Последнее противоречит (19), и утверждение доказано.

На функции $u_k(\tau)$, $v_k(\tau)$, $k=\overline{0, n}$, наложим требования, обеспечивающие ограниченность функции $\operatorname{Re}\chi(w)$, когда $w \to t \in \partial D_w$. Для этого нужно, чтобы функции $p_k(\sigma) = \ln\left|\frac{dz}{dw}(\sigma_k)\right|$ были ограничены сверху некоторой константой.

Докажем, что если функции $u_k(\tau)$ и $v_k(\tau)$, $k=\overline{0, n}$, обладают непрерывными производными, не обращающимися одновременно в нуль, то поверхность с уравнением $\Omega = \Omega(w)$ имеет вершину (точку максимума). Действительно, функции

$$\sigma_k(s/l_k) = \int\limits_0^{s/l_k} \sqrt{u_k'^2(\tau) + v_k'^2(\tau)}\, d\tau, \quad k=\overline{0, n},$$

являются монотонными и непрерывно-дифференцируемыми. Поэтому функции $s = s(\sigma_k)$, $k=\overline{0, n}$, существуют и являются непрерывно-дифференцируемыми, причем

$$\frac{ds}{d\sigma_k} = \frac{1}{d\sigma_k/ds} = \frac{l_k}{\sqrt{u_k'^2(\tau(\sigma_k)) + v_k'^2(\tau(\sigma_k))}}.$$

Из непрерывности функций, входящих в правую часть этого равенства, и из условия, что производные $u_k'(\tau)$ и $v_k'(\tau)$ не обращаются одновременно в нуль, мы получаем, что функции $ds/d\sigma_k$ непрерывны и достигают своих верхних и нижних границ. Эти границы являются положительными числами, отличными от нуля и ∞. Значит, функции $p_k(\sigma)$ также непрерывны и ограничены сверху некоторой константой.

Из ограниченности $p_k(\sigma)$, $k=\overline{0, n}$, и из принципа максимума для гармонических функций следует, что $\ln \Omega(w)$ с представлением (17) при $w \to t \in \partial D_w$ обращается в $-\infty$. Следовательно, сама функция $\Omega(w)$ обращается в 0.

Таким образом, поверхность с уравнением $\Omega = \Omega(w)$ будет представлять собой гладкую поверхность, расположенную над областью D_w и прикрепленную к границе этой области. Ясно, что эта поверхность будет иметь хотя бы одну точку максимума (вершину) и хотя бы одну седловую точку (при порядке связности $\geqslant 2$, и если не будет континуума максимумов), с помощью которой совершается переход от вершины к граничным минимумам.

Всеми этими рассуждениями мы доказали следующее утверждение.

Теорема 1. *Уравнение Гахова* (8) *имеет в* $(n+1)$-*связной области при* $n \geqslant 1$ *не менее двух решений.*

При допущении симметрии в области D_w и согласованной симметрии функций $p_k(\sigma)$ можно отметить случаи, когда уравнение Гахова имеет большее число решений.

Теорема 2. *Если область D_w переходит в себя при симметричном преобразовании относительно некоторой прямой, засекающей все граничные кривые, и функции $p_k(\sigma)$ $(k=\overline{0, n})$ при таком преобразовании граничных точек не меняются, то уравнение Гахова* (8) *будет иметь не меньше* $(n+2)$ *решений.*

Доказательство. Пусть прямая, о которой говорится в теореме, совпадает с вещественной осью. Тогда преобразование симметрии примет вид $\overline{w}$, и условия теоремы запишутся в применении к функции $\Omega(w)$ так: $\Omega(w)=\Omega(\overline{w})$. Это означает, что $[\Omega(u+iv)-\Omega(u-iv)](2v)^{-1}=0$, т. е. в точках вещественной оси $\partial\Omega/\partial v=0$. Что касается $\partial\Omega/\partial u$, то эта производная обратится в 0 не меньше одного раза на отрезках, концы которых лежат на граничных кривых. Всего таких отрезков будет $n+1$. Итак, над отрезками вещественной оси будут лежать $n+1$ точек максимума. Кроме того, в двух частях области D_w, на которые рассекает эту область вещественная ось, расположено не меньше одной седловой точки. Эти две седловые точки могут слиться в одну, расположенную на вещественной оси. Поэтому наименьшее число критических точек равно $n+2$.

Теперь можно завершить процесс решения внешней окз. Для этого проинтегрируем выражение (7). Получим однозначную функцию

$$z(w)=e^{i\alpha}\int_a^w e^{\chi(w)}F^{-2}(w,\ w_0)\,dw+c \tag{21}$$

(a ($\in D_w$) и c — комплексные постоянные), если будут выполнены следующие условия:

$$\int_{L_{wk}} e^{\chi(w)}F^{-2}(w,\ w_0)\,dw=0,\ k=\overline{1, n}. \tag{22}$$

Условие (22) относительно контура L_{w0} будет выполняться автоматически. Действительно, пусть условия (22) справедливы. Тогда

$$\int_{L_{w0}} e^{\chi(w)}F^{-2}(w,\ w_0)\,dw=\int_{\partial D_w} e^{\chi(w)}F^{-2}(w,\ w_0)\,dw+$$
$$+\sum_{k=1}^{n}\int_{L_{wk}} e^{\chi(w)}F^{-2}(w,\ w_0)\,dw=2\pi i\,\text{выч}_{w_0}[e^{\chi(w)}F^{-2}(w,\ w_0)]+$$
$$+\sum_{k=1}^{n}\int_{L_{wk}} e^{\chi(w)}F^{-2}(w,\ w_0)\,dw=0$$

в силу (6) и (22). Поэтому всего будет n комплексных или $2n$ вещественных условий разрешимости. Эти условия (22) составляют вторую, группу условий разрешимости, от которой пока не удается избавиться каким-то видоизменением постановки задачи.

Сформулируем итоговый результат.

Теорема 3. *Внешняя окз в случае многосвязной области будет разрешимой, если граничные функции* $u_k(s/l_k)$, $v_k(s/l_k)$ ($k=\overline{0, n}$) *обладают непрерывными производными, не обращающимися одновременно в нуль, и если выполняются условия* (22).

§ 2. Рассмотрим более подробно внешнюю обратную краевую задачу в двусвязном случае. Краевые условия (1) будут иметь вид:

$$w(z)|_{L_{z0}} = u_0(s) + iv_0(s),\ 0 \leqslant s \leqslant 1,$$

$$w(z)|_{L_{z1}} = u_1(s/l_1) + iv_1(s/l_1),\ 0 \leqslant s \leqslant l_1.$$

Отобразим область $D_w = w(D_z)$ однолистно на $E_q = \{\zeta : q < |\zeta| < 1\}$. Пусть при этом отображении точке w_0 соответствует ζ_0. На границе кольца E_q будем иметь

$$\ln|dz/d\zeta|\,|_{\zeta=e^{i\gamma}} = p_0(\gamma),\ \ln|dz/d\zeta|\,|_{\zeta=qe^{i\gamma}} = p_1(\gamma) + \ln l_1.$$

Решим задачу Шварца по условиям (3), которые в кольце E_q примут вид

$$\operatorname{Re}\chi(\zeta)|_{\zeta=e^{i\gamma}} = p_0(\gamma),\ \operatorname{Re}\chi(\zeta)|_{\zeta=qe^{i\gamma}} = p_1(\gamma) + h_1.$$

Регулярная функция $\chi(\zeta)$ восстанавливается по формуле Вилля [10, с. 238]:

$$\chi(\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p_0(\gamma) S(\zeta e^{-i\gamma})\,d\gamma + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(p_1(\gamma) + h_1) S(qe^{i\gamma}/\zeta)\,d\gamma, \tag{23}$$

причем h_1 определяется из условия согласованности

$$h_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[p_0(\gamma) - p_1(\gamma)]\,d\gamma.$$

Рассмотрим функцию $F(\zeta, \zeta_0)$ [10, с. 233], отображающую E_q на единичный круг с концентрическим разрезом радиуса $|\zeta_0|$:

$$F(\zeta, \zeta_0) = \frac{(\zeta-\zeta_0)\prod\limits_{k=1}^{\infty}\left(1 - q^{2k}\frac{\zeta}{\zeta_0}\right)\left(1 - q^{2k}\frac{\zeta_0}{\zeta}\right)}{(1-\bar{\zeta}_0\zeta)\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1-q^{2k}\zeta\bar{\zeta}_0)(1-q^{2k}/\zeta\bar{\zeta}_0)}. \tag{24}$$

Функция

$$dz/d\zeta = e^{\chi(\zeta)}F^{-2}(\zeta, \zeta_0) \tag{25}$$

имеет полюс второго порядка в точке ζ_0.

Условие однозначности $z(\zeta)$ в окрестности ζ_0 приводит к уравнению Гахова (8), которое в двусвязном случае запишется в виде:

$$\chi'(\zeta) = \frac{2\bar{\zeta}}{1-|\zeta|^2} + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{q^{2k}\bar{\zeta}}{1-q^{2k}|\zeta|^2} - \frac{q^{2k}\bar{\zeta}/|\zeta|^4}{1-q^{2k}/|\zeta|^2}\right). \tag{26}$$

Разрешимость этого уравнения показана в § 1.

Точка ζ_0 в выражении (25) не фиксирована, она определяется как корень уравнения Гахова (26). Из условия (5) находим $l_1 = e^{h_1}|\zeta_0|^{-2}$. Функция

$$z(\zeta, \zeta_0) = e^{i\alpha}\int_a^{\zeta} e^{\chi(\zeta)}F^{-2}(\zeta,\ \zeta_0)\,d\zeta + c \tag{27}$$

дает решение внешней окз.

Условие замкнутости искомых контуров (22) примет вид

$$\int_{|\zeta|=q} e^{\chi(\zeta)}F^{-2}(\zeta,\ \zeta_0)\,d\zeta = 0. \tag{28}$$

В дополнение к теореме 3 сформулируем следующее утверждение, которое учитывает специфику кольца.

Теорема 4. *Пусть* $w(z)|_{L_{zm}}$, $m = 0,\ 1,$ — *n-симметричны* [11] *и пусть уравнение* (26) *имеет корень* ζ_0. *Тогда:*

1) *точки* $\zeta_k = \zeta_0 \exp\left(i\,\frac{2\pi k}{n}\right)$, $k = \overline{1, n-1}$, *также являются решениями уравнения* (26);

2) *решения окз, отвечающие этим корням, отличаются лишь положением в плоскости* z.

Доказательство. Как показано в [11], требования на $w(z)|_{L_{zm}}$, $m = 0,\ 1$, влекут в плоскости ζ соотношение

$$p_m\left(\gamma + \frac{2\pi}{n}\right) = p_m(\gamma),\ \ m = 0,\ 1,$$

где $\gamma = \arg\zeta$.

Уравнение (26) можно переписать в виде

$$i\zeta\chi'(\zeta) = i\left[\frac{2|\zeta|^2}{1-|\zeta|^2} + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{q^{2k}|\zeta|^2}{1-q^{2k}|\zeta|^2} - \frac{q^{2k}/|\zeta|^2}{1-q^{2k}/|\zeta|^2}\right)\right].$$

Левая часть уравнения в силу периодичности $p_m(\gamma)$ и ядер интеграла Вилля (23) не меняется при переходе от ζ_0 к $\zeta_0 e^{i\frac{2\pi}{n}}$. Правая часть не зависит от $\arg\zeta$.

Для доказательства второй части теоремы достаточно заметить, что $z(\zeta, \zeta_0)$ и $z(\zeta, \zeta_k)$, где $\zeta_k = \zeta_0 e^{i\frac{2\pi k}{n}}$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, связаны между собой равенством

$$z\left(e^{i\frac{2\pi k}{n}}\zeta, \zeta_k\right) = e^{i\frac{2\pi k}{n}} z(\zeta, \zeta_0).$$

Пример 1. Зададим в плоскости w граничные значения функции $w(z)$ в виде

$$u_k(s/l_k) + iv_k(s/l_k) = q^k \exp(2\pi i s/l_k),\ 0 \leqslant s \leqslant l_k, k = 0,\ 1.$$

Область D_w представляет собой концентрическое кольцо E_q. Требуется найти двусвязную область D_z с бесконечно удаленной точкой и функцию $w(z)$, отображающую D_z на E_q, по ее граничным значениям.

Приведем задачу к определению функции $\ln\frac{dz}{dw}$ в кольце. В этом случае функции $p_k(\sigma)$ в (2) равны нулю и уравнение Гахова (8) можно привести к виду

$$0 = \frac{r^2}{1-r^2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{q^{2k}r^2}{1-q^{2k}r^2} - \frac{q^{2k}r^{-2}}{1-q^{2k}r^{-2}}\right) \quad (r = |w|).$$

Разложим каждый из членов ряда в последнем равенстве по степеням r и соберем члены с одинаковыми степенями r. Это приведет к равенству

$$0 = \sum_{m=1}^{\infty} r^{2m} + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} q^{2km}(r^{2m} - r^{-2m}) = \sum_{m=1}^{\infty} r^{2m} +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty}\frac{q^{2m}}{1-q^{2m}}(r^{2m} - r^{-2m}) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{r^{4m} - q^{2m}}{(1-q^{2m})r^{2m}},$$

из которого видно, что решениями уравнения Гахова будут все точки окружности $|w| = \sqrt{q}$ и только они. В самом деле, при $r > \sqrt{q}$ $(r < \sqrt{q})$ все члены ряда положительны (отрицательны). Решения окз, отвечающие различным корням $w_0 = \sqrt{q}e^{i\sigma}$, $\sigma \in [0, 2\pi]$, совпадают между собой в том смысле, что контуры в плоскости z будут отличаться друг от друга лишь положением.

Указанный случай можно рассматривать как предельный, когда граничные условия в теореме 4 являются „бесконечно-симметричными“ $(n = \infty)$.

Таким образом, хотя уравнение Гахова в примере 1 имеет бесчисленное множество корней, внешняя окз обладает единственным решением.

Пример 2. В качестве области D_w вновь возьмем концентрическое кольцо, заданное уравнениями

$$u_k(\sigma) + iv_k(\sigma) = q^k e^{i\sigma}, \ \sigma = \sigma_k(s/l_k), \ 0 \leqslant s \leqslant l_k,$$
$$0 \leqslant \sigma \leqslant 2\pi, \ k = 0, \ 1.$$

Функции $\sigma_k(s/l_k)$ определим дифференциальными уравнениями

$$l_k \ \frac{d\sigma_k}{ds} = \exp(q^{nk} \sin n\sigma_k), \quad k = 0, \ 1.$$

Найдем при этих условиях решение внешней окз.

Граничные условия (2) имеют вид:

$$\ln |dz/dw| \,|_{|w|=1} = -\sin n\sigma,$$
$$\ln |dz/dw| \,|_{|w|=q} = -q^n \sin n\sigma + \ln l_1.$$

В этом случае регулярная функция $\chi(w)$ равна iw^n. Следовательно, уравнение Гахова (8) имеет вид

$$inw^n = \frac{2r^2}{1-r^2} + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{q^{2k}r^2}{1-q^{2k}r^2} - \frac{q^{2k}r^{-2}}{1-q^{2k}r^{-2}}\right).$$

Его можно записать в форме (16)

$$\frac{\partial}{\partial w}\ln\left|\exp(iw^n)(1-r^2)\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^{2k}r^2)(1-q^{2k}r^{-2})\right| = 0.$$

Это уравнение эквивалентно двум вещественным:

$$\frac{\partial}{\partial r}\ln\left|\exp(iw^n)(1-r^2)\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^{2k}r^2)(1-q^{2k}/r^2)\right| = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \sigma}\ln\left|\exp(iw^n)(1-r^2)\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^{2k}r^2)(1-q^{2k}/r^2)\right| = 0,$$

где $w = re^{i\sigma}$. Второе имеет простой вид, оно сразу дает условие на аргументы корней уравнения Гахова:

$$\cos n\sigma = 0, \text{ т. е. } \sigma = \frac{\pi}{2n}(2k+1), \ k = \overline{0, 2n-1}.$$

Первая группа — n корней (k — четное) лежит на одной окружности радиуса r_0, $q < r_0 < \sqrt{q}$. Эти корни дают одно решение внешней окз. Величина l_1 из (5) равна r_0^{-2}. Вторая группа корней (k — нечетное) лежит на окружности радиуса r_1, $\sqrt{q} < r_1 < 1$. Они дают еще одно решение задачи ($l_1 = r_1^{-2}$).

Таким образом, в нашем примере задача имеет два различных решения, которые найдутся по формуле (27).

Интересно отметить, что независимо от $n\,(n \geqslant 1)$ внешняя окз в данном примере имеет всегда только два различных решения.

§ 3. Отметим некоторые нерешенные вопросы. 1. Как следует из теоремы 3, внешняя окз оказывается некорректной из-за того, что выполнение второй группы условий разрешимости можно проверить только после получения функции dz/dw. Полезными будут другие постановки окз, когда от условий (22) можно будет избавиться. Наметим одну такую возможность.

Поставим внешнюю окз так, что условия (1) будут выполняться на границе поверхности наложения искомой многосвязной области. Эта поверхность состоит из бесконечного числа копий многосвязной области и ее можно отобразить на круг [12, гл. VI]. На каждой копии будут действовать одни и те же граничные условия.

Первый этап решения проводится, как в § 1, с учетом только одной копии области D_w. На втором этапе функцию dz/dw, заданную на всех листах поверхности наложения, переносим в круг. Будем предполагать, что функция, отображающая поверхность наложения на круг, известна: $\zeta = \zeta(w)$. Обратную функцию обозначим через $w = w(\zeta)$. Тогда окажется известной функция

$$dz/d\zeta = (dz/dw)\cdot(dw/d\zeta) = \Phi(\zeta).$$

Проводя интегрирование, получим функцию, отображающую круг на поверхность наложения, каждый лист которой будет содержать ∞.

Итак, поверхности наложения над областью D_w будет соответствовать некоторая поверхность наложения R_z. Однако то множество, которое укладывается на одном листе этой поверхности, не будет обычной областью. Если же это множество окажется обычной областью, то она будет соответствовать не обычной области D_w, а только ее части или всей области D_w с дополнительными частями, лежащими на другом листе.

2. В случае областей с порядком связности $\geqslant 3$ желательно найти геометрические эффекты, напоминающие n-симметричность во внутренней окз [11], которые бы обеспечили автоматическое выполнение второй группы условий разрешимости.

В частности, отметим, что число условий разрешимости (22) сокращается при первом виде симметрии (как в теореме 2) вдвое.

3. При обосновании теоремы 1 мы привели некоторые правдоподобные пояснения, которые желательно заменить строгими рассуждениями. В этих рассуждениях можно использовать вращение векторного поля, определяемого выражением

$$\frac{\partial}{\partial w}\left| e^{\chi(w)}/f(w,\bar{w})\right|.$$

4. По-видимому, разрешимость уравнения Гахова можно обосновать и в случае бесконечносвязных областей. Главным моментом такого обоснования будет доказательство симметричности функции, отображающей бесконечносвязную область на круг с бесконечным числом концентрических разрезов, т. е. получение аналога соотношения (12).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гахов Ф. Д. Об обратной краевой задаче для многосвязной области.— Уч. зап. Ростовского-на-Дону гос. пед. ин-та, вып. 3, 1955, с. 19—27.
2. Нужин М. Т. Об обратных краевых задачах для многосвязных областей.— „Изв. вузов. Математика", 1964, № 5, с. 69—77.
3. Нужин М. Т. Решение обратной краевой задачи для двусвязной области.— Уч. зап. Казанск. ун-та, т. 110, кн. 7, 1950, с. 31—37.
4. Тумашев Г. Г., Нужин М. Т. Обратные краевые задачи и их приложения. Изд-во Казанск. ун-та, 1965.
5. Нужин М. Т. Решение внешней обратной краевой задачи для двусвязной области.— Уч. зап. Казанск. ун-та, т. 110, кн. 7, 1950, с. 39—43.
6. Журбенко Л. Н. Об устойчивости решения обратной краевой задачи с параметром s в случае многосвязной области. — Тр. семин. по краевым задачам, вып. 17. Изд-во Казанск. ун-та, 1980, с. 74—84.
7. Гахов Ф. Д. Об обратных краевых задачах.— ДАН СССР, т. 86, № 4, 1952, с. 649—652.
8. Гахов Ф. Д. Об обратных краевых задачах.— Уч. зап. Казанск. ун-та, т. 113, № 10, 1953, с. 9—20.
9. Шиффер М. Некоторые новые результаты в теории конформных отображений. Приложение к книге Р. Куранта „Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности". М., ИЛ, 1953, с. 234—301.
10. Ахиезер Н. И. Элементы теории эллиптических функций. М., „Наука", 1970.
11. Аксентьев Л. А. Симметричные решения обратных краевых задач.— Тр. семин. по краевым задачам, вып. 14. Изд-во Казанск. ун-та, 1977, с. 20—27.
12. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М., „Наука", 1966.

Доложено на семинаре 28 января 1982 г