К. М. Расулов, В. В. Сенчилов, О решении одной видоизмененной краевой задачи типа Рикье для метааналитических функций в круге, *Дифференц. уравнения*, 2005, том 41, номер 3, 415–418

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2005, том 41, № 3, с. 415–418

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.95

О РЕШЕНИИ ОДНОЙ ВИДОИЗМЕНЕННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТИПА РИКЬЕ ДЛЯ МЕТААНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В КРУГЕ

© 2005 г. К. М. Расулов, В. В. Сенчилов

1. Постановка задачи. Пусть T^+ – односвязная область на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, ограниченная простым гладким замкнутым контуром L, уравнение которого имеет вид $t = x(s) + iy(s)$, $0 \le s \le l$, где s – натуральный параметр. Через T^- будем обозначать дополнение $T^+ \cup L$ до полной комплексной плоскости.

В дальнейшем в основном будем использовать термины и обозначения, принятые в [1].

Напомним (см., например, [1]), что функция $F(z) = U(x,y) + iV(x,y)$ называется метааналитической в области T^+, если она имеет в T^+ непрерывные частные производные (по x и y) до второго порядка включительно и удовлетворяет там уравнению

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \overline{z}^2} + a_1 \frac{\partial F}{\partial \overline{z}} + a_0 F = 0, \tag{1}$$

где $\partial/\partial\overline{z} = (\partial/\partial x + i\partial/\partial y)/2$ – дифференциальный оператор Коши–Римана, а a_1 и a_0 – некоторые комплексные постоянные.

Как известно (см. [1, с. 139]), если λ_1 и λ_2 – корни квадратного уравнения $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$, то всякую метааналитическую в области T^+ функцию $F^+(z)$ можно задать в виде

$$F^+(z) = (\varphi_0^+(z) + \overline{z}\varphi_1^+(z))e^{\lambda_0\overline{z}}, \quad \text{если} \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0, \tag{2}$$

или

$$F^+(z) = \varphi_0^+(z)e^{\lambda_1\overline{z}} + \varphi_1^+(z)e^{\lambda_2\overline{z}}, \quad \text{если} \quad \lambda_1 \ne \lambda_2, \tag{3}$$

где $\varphi_k^+(z)$ $(k = 0, 1)$ – аналитические в T^+ функции, называемые аналитическими компонентами метааналитической функции $F^+(z)$.

Рассматривается следующая

Задача. Требуется найти все метааналитические функции $F^+(z)$ класса $M_2(T^\pm)\bigcap H^{(2)}(L)$, удовлетворяющие на L следующему краевому условию:

$$\Delta F^+(t) + G(t)\overline{F^+(t)} = g(t), \tag{4}$$

где $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ – оператор Лапласа, а $G(t)$, $g(t)$ – заданные на L функции класса $H(L)$.

Отметим, что к задаче (4), в частности, сводится так называемая задача Рикье для метааналитических функций, состоящая в отыскании метааналитических в T^+ функций $F^+(z)$, удовлетворяющих на L краевым условиям (см., например, [1]) $F^+(t) = g_0(t)$, $\Delta F^+(t) = g_1(t)$, где $g_0(t)$, $g_1(t)$ – заданные на L функции класса $H(L)$. Поэтому сформулированную выше задачу (4) будем называть видоизмененной задачей типа Рикье для метааналитических функций или короче задачей $\boldsymbol{R}$, а соответствующую однородную задачу ($g(t) \equiv 0$) – задачей $\boldsymbol{R}^0$.

В данной работе будет показано, что задача (4) при $G(t) \equiv 0$ в классе метааналитических функций не является нётеровой (см. также [2, 3]). Однако, как будет установлено ниже, задача (4) при $G(t) \ne 0$, $t \in L$, является нётеровой.

Всюду в дальнейшем в качестве области T^+ будем рассматривать единичный круг с центром в начале координат, т.е. $T^+ = \{z : |z| < 1\}$.

Сначала покажем, что задача (4) при $G(t) \equiv 0$ для метааналитических функций в круге не является нётеровой. Для этого достаточно заметить, что все метааналитические в круге $T^+ = \{z : |z| < 1\}$ функции вида

$$F^+(z) = \left(z^n + \frac{n}{n-1}z^{n-1} - \overline{z}z^n\right)e^{\overline{z}},$$

где n – произвольное натуральное число, большее единицы, являются решениями однородной задачи (4) (т.е. $g(t) \equiv 0$). Следовательно, число линейно независимых решений однородной задачи типа

Рикье не является конечным, а следовательно, задача типа Рикье для метааналитических функций при $G(t) \equiv 0$ не нётерова.

2. О решении видоизмененной задачи типа Рикье в круге в случае $G(t) \neq 0$, $t \in L$. Для полноты исследования далее необходимо рассмотреть два случая в зависимости от того, в каком виде будем искать решение задачи: в виде (2) или (3). Мы будем рассматривать лишь первый случай, т.е. случай $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$.

Итак, будем искать решение задачи $\boldsymbol{R}$ в виде (2). Поскольку (см., например, [4, с. 301]) $\Delta = 4\partial^2/\partial z\partial\overline{z}$ и $\overline{t} = 1/t$, $t \in L$, то с учетом представления (2) краевое условие (4) можно переписать в виде

$$\lambda_0 t\frac{d\varphi_0^+(t)}{dt} + (t+\lambda_0)\frac{d\varphi_1^+(t)}{dt} - G_1(t)\left[\frac{1}{t}\overline{\varphi_0^+(t)} + \overline{\varphi_1^+(t)}\right] = g_1(t), \tag{5}$$

где

$$G_1(t) = -\frac{1}{4}t^2G(t)e^{\overline{\lambda_0}t-\lambda_0\overline{t}}, \quad g_1(t) = \frac{1}{4}tg(t)e^{-\lambda_0\overline{t}}. \tag{5a}$$

Вводя в рассмотрение новые аналитические соответственно в T^+ и T^- функции вида

$$\Phi^+(z) = \lambda_0 z\frac{d\varphi_0^+(z)}{dz} + (z+\lambda_0)\frac{d\varphi_1^+(z)}{dz}, \quad z \in T^+, \tag{6}$$

$$\Phi^-(z) = \frac{1}{z}\overline{\varphi_0^+}\left(\frac{1}{z}\right) + \overline{\varphi_1^+}\left(\frac{1}{z}\right), \quad z \in T^-, \tag{7}$$

краевое условие (5) можно записать так:

$$\Phi^+(t) = G_1(t)\Phi^-(t) + g_1(t), \quad t \in L. \tag{8}$$

Равенство (8) есть краевое условие скалярной задачи Римана относительно кусочно-аналитической функции $\Phi(z) = \{\Phi^+(z), \Phi^-(z)\}$.

Пусть $\varkappa_1 = \operatorname{Ind} G_1(t)$. Тогда, как известно (см., например, [1, с. 54]), при $\varkappa_1 \geq 0$ решение задачи Римана (8) задается в виде

$$\Phi^\pm(z) = X^\pm(z)[\Psi^\pm(z) + P_{\varkappa_1}(z)], \tag{8a}$$

где $X^\pm(z)$ – канонические функции задачи,

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{g_1(\tau)}{X^+(\tau)}\frac{d\tau}{\tau - z},$$

а $P_{\varkappa_1}(z)$ – многочлен степени не выше $\varkappa_1$ с произвольными комплексными коэффициентами. Если же $\varkappa_1 < 0$, то решение задачи (8) по-прежнему задается формулой (8a), где нужно положить $P_{\varkappa_1}(z) \equiv 0$, при выполнении следующих $-\varkappa_1 - 1$ условий разрешимости:

$$\int\limits_L \frac{g_1(\tau)}{X^+(\tau)}\,\tau^{k-1}\,d\tau = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, -\varkappa_1 - 1. \tag{8б}$$

Следовательно, решая задачу (8) (в случае ее разрешимости), определяем аналитические функции $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$ по формулам (8a). Далее, заменяя z на $1/\overline{\zeta}$, из (7) будем иметь

$$\overline{\zeta\varphi_0^+(\zeta)} + \overline{\varphi_1^+(\zeta)} = \Phi^-(1/\overline{\zeta}) \quad \text{или} \quad \zeta\varphi_0^+(\zeta) + \varphi_1^+(\zeta) = \Omega^+(\zeta), \quad |\zeta| < 1, \tag{9}$$

где $\Omega^+(\zeta) = \overline{\Phi^-}(1/\zeta)$. Наконец, заменив в (9) ζ на z и умножив обе части полученного равенства на z^{-1}, найдем

$$\varphi_0^+(z) + z^{-1}\varphi_1^+(z) = z^{-1}\Omega^+(z), \quad z \in T^+. \tag{10}$$

Дифференцируя по z, из (10) имеем

$$\frac{d\varphi_0^+(z)}{dz} + \frac{1}{z}\frac{d\varphi_1^+(z)}{dz} - \frac{1}{z^2}\varphi_1^+(z) = \frac{d}{dz}[z^{-1}\Omega^+(z)]. \tag{11}$$

В свою очередь, разделив обе части равенства (6) на z, получим

$$\lambda_0\frac{d\varphi_0^+(z)}{dz} + \left(1 + \frac{\lambda_0}{z}\right)\frac{d\varphi_1^+(z)}{dz} = \frac{1}{z}\Phi^+(z). \tag{12}$$

Далее будем исследовать отдельно два возможных случая: 1) $\lambda_0 = 0$; 2) $\lambda_0 \neq 0$.

Если $\lambda_0 = 0$, то из (12) получаем

$$\frac{d\varphi_1^+(z)}{dz} = \frac{1}{z}\Phi^+(z). \tag{12a}$$

Замечание 1. Как видно из соотношения (12а), для разрешимости исходной задачи **R** должно выполняться условие

$$\Phi^+(0) = 0. \tag{13}$$

Из тождества (12а) с помощью интегрирования получаем равенство

$$\varphi_1^+(z) = \int\limits_0^z \frac{\Phi^+(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta + C_1, \tag{14}$$

где $C_1 = \varphi_1^+(0)$ – произвольная комплексная постоянная, с учетом которого из равенства (10) находим

$$\varphi_0^+(z) = \frac{1}{z}\left(\Omega^+(z) - \int\limits_0^z \frac{\Phi^+(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta - C_1\right), \quad z \in T^+. \tag{15}$$

Замечание 2. Из соотношения (15) видно, что для разрешимости исходной задачи **R** также должно выполняться условие

$$\Omega^+(0) = C_1. \tag{16}$$

Наконец, подставив в формулу (2) вместо $\varphi_0^+(z)$ и $\varphi_1^+(z)$ их выражения (15), (14), получим решение искомой задачи **R** в рассматриваемом случае

$$F^+(z) = \frac{1}{z}\left(\Omega^+(z) - \int\limits_0^z \frac{\Phi^+(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta - C_1\right) + \overline{z}\left(\int\limits_0^z \frac{\Phi^+(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta + C_1\right). \tag{17}$$

Замечание 3. Важно отметить, что при $\varkappa_1 \geq 0$ выражения для функций $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$ (в силу (8а)) линейно зависят от $\varkappa_1 + 1$ произвольных комплексных постоянных. Поэтому за счет определенного выбора значений этих произвольных постоянных можно добиться выполнения некоторых из условий (13) и (16).

Рассмотрим теперь случай $\lambda_0 \neq 0$. Тогда из равенств (11) и (12) получаем

$$\frac{d\varphi_1^+(z)}{dz} + \frac{\lambda_0}{z^2}\varphi_1^+(z) = Q(z), \tag{18}$$

где $Q(z) = \dfrac{1}{z}\Phi^+(z) - \lambda_0 \dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{1}{z}\Omega^+(z)\right)$.

Таким образом, для нахождения функции $\varphi_1^+(z)$ нужно решить линейное неоднородное дифференциальное уравнение (18). Заметим, что точка $z = 0$ является для уравнения (18) особой точкой второго рода (см., например, [5, с. 214] или [6, с. 125]). Аналитическое в T^+ решение дифференциального уравнения (18) имеет вид

$$\varphi_1^+(z) = e^{\lambda_0/z}\int Q(z)e^{-\lambda_0/z}\,dz. \tag{19}$$

Замечание 4. Из соотношений (9) и (17) видно, что для разрешимости исходной задачи **R** значение интеграла в правой части (19) должно содержать множитель вида $e^{-\lambda_0/z}$, т.е.

$$\int Q(z)e^{-\lambda_0/z}\,dz = e^{-\lambda_0/z}Q^+(z), \quad z \in T^+, \tag{20}$$

где $Q^+(z)$ – аналитическая в T^+ функция.

В силу (10), (19) и (20) аналитическую компоненту $\varphi_0^+(z)$ искомой метааналитической функции можно найти по формуле

$$\varphi_0^+(z) = z^{-1}(\Omega^+(z) - Q^+(z)), \quad z \in T^+. \tag{21}$$

Замечание 5. Из формулы (21) видно, что для разрешимости исходной задачи **R** должно выполняться условие

$$\Omega^+(0) = Q^+(0). \tag{22}$$

Далее, подставив в формулу (2) вместо $\varphi_0^+(z)$ и $\varphi_1^+(z)$ их выражения (21), (19), получим решение искомой задачи **R** в рассматриваемом случае

$$F^+(z) = \left[\frac{1}{z}(\Omega^+(z) - Q^+(z)) + \bar{z}Q^+(z)\right]e^{\lambda_0\bar{z}}. \tag{23}$$

Замечание 6. И в случае $\lambda_0 \neq 0$ остается справедливым замечание 3 с заменой условий (13), (16) на условия (20) и (22) соответственно.

Таким образом, доказана

Теорема. *При $\lambda = 0$ (соответственно $\lambda_0 \neq 0$) решение задачи $\boldsymbol{R}$ сводится к решению обычной скалярной задачи Римана (8). Кроме того, если $\varkappa_1 \geq 0$, то задача $\boldsymbol{R}$ разрешима тогда и только тогда, когда выполняются условия вида (13) и (16) ((20) и (22)) и ее общее решение, задаваемое формулой (17) (соответственно (23)), линейно зависит не более чем от $2\varkappa_1 + 2$ произвольных действительных постоянных. Если же $\varkappa_1 < 0$, то для разрешимости задачи $\boldsymbol{R}$ необходимо и достаточно выполнения условий (8б), (13) и (16) ((20) и (22)), причем в этом случае задача $\boldsymbol{R}$ будет иметь единственное решение.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Расулов К.М.* Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. Смоленск, 1998.
2. *Бицадзе А.В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М., 1981.
3. *Закарян А.А.* Корректные граничные задачи для уравнения Бицадзе. Ереван, 1988. Деп. в АрмНИИНТИ 24.08.88. № 66-Ар88.
4. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М., 1977.
5. *Голубев В.В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.; Л., 1950.
6. *Коддингтон Э.А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1958.

Смоленский государственный педагогический университет

Поступила в редакцию
25.07.2003 г.