V. Yu. Popov, Equational Theories for Classes of Finite Semigroups,
Algebra Logika, 2001, Volume 40, Number 1, 97–116

https://www.mathnet.ru/eng/al211

Алгебра и логика, 40, N 1 (2001), 97–116

УДК 512.54.0:512.57

ОБ ЭКВАЦИОНАЛЬНЫХ ТЕОРИЯХ КЛАССОВ КОНЕЧНЫХ ПОЛУГРУПП

В. Ю. ПОПОВ

А. И. Мальцев в [1] построил конечно базируемое многообразие квазигрупп с неразрешимой эквациональной теорией и поставил в [2] вопрос о существовании конечно базируемых многообразий полугрупп, групп и колец с неразрешимой эквациональной теорией. Положительный ответ на этот вопрос для полугрупп получен в [3], а для групп — в [4]. В [5] построены примеры конечно базируемых многообразий неассоциативных колец с неразрешимой эквациональной теорией. В [6] доказано, что существует последовательность конечно базируемых многообразий неассоциативных колец $\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{A}_2 \subset \mathfrak{B}_2 \subset \ldots$ такая, что для всех i эквациональная теория многообразия $\mathfrak{A}_i$ неразрешима, а эквациональная теория многообразия $\mathfrak{B}_i$ разрешима. Пример конечно базируемого многообразия полугрупп такого, что эквациональная теория класса всех конечных полугрупп из этого многообразия неразрешима, построен в [7]. Как отмечено в [8], существует конечно базируемое многообразие колец такое, что эквациональная теория класса всех конечных колец из этого многообразия неразрешима. Пример последовательности многообразий и классов конечных полугрупп, аналогичный примеру из [6], дает следующая

ТЕОРЕМА 1. *Существует бесконечная последовательность конечно базируемых многообразий полугрупп $\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{A}_2 \subset \mathfrak{B}_2 \subset \ldots$ такая, что для всех i эквациональная теория многообразия $\mathfrak{A}_i$ и класса $\mathfrak{A}_i \cap \mathfrak{F}$ всех конечных полугрупп из многообразия $\mathfrak{A}_i$ неразрешима, а эквациональ-*

ная теория многообразия $\mathfrak{B}_i$ и класса $\mathfrak{B}_i \cap \mathfrak{F}$ всех конечных полугрупп из многообразия $\mathfrak{B}_i$ разрешима.

Из теоремы 1 вытекает существование сколь угодно длинной конечной убывающей последовательности $\mathfrak{A}_1 \supset \mathfrak{B}_1 \supset \mathfrak{A}_2 \supset \mathfrak{B}_2 \supset \ldots$ такой, что для всех i эквациональная теория многообразия $\mathfrak{A}_i$ и класса $\mathfrak{A}_i \cap \mathfrak{F}$ всех конечных полугрупп из многообразия $\mathfrak{A}_i$ неразрешима, а эквациональная теория многообразия $\mathfrak{B}_i$ и класса $\mathfrak{B}_i \cap \mathfrak{F}$ всех конечных полугрупп из многообразия $\mathfrak{B}_i$ разрешима. На самом деле существует и бесконечная последовательность многообразий, удовлетворяющая тем же условиям.

ТЕОРЕМА 2. *Существует бесконечная последовательность конечно базируемых многообразий полугрупп $\mathfrak{A}_1 \supset \mathfrak{B}_1 \supset \mathfrak{A}_2 \supset \mathfrak{B}_2 \supset \ldots$ такая, что для всех i эквациональная теория многообразия $\mathfrak{A}_i$ и класса $\mathfrak{A}_i \cap \mathfrak{F}$ всех конечных полугрупп из многообразия $\mathfrak{A}_i$ неразрешима, а эквациональная теория многообразия $\mathfrak{B}_i$ и класса $\mathfrak{B}_i \cap \mathfrak{F}$ всех конечных полугрупп из многообразия $\mathfrak{B}_i$ разрешима.*

Доказательство теорем будет основано на интерпретации работы двухленточной машины Минского (см. [9]). Впервые этот метод был использован Ю. Ш. Гуревичем [10] при доказательстве неразрешимости квазиэквациональной теории классов конечных полугрупп и ассоциативных колец. Подробное изложение методов интерпретации машин Минского, а также обзор результатов содержатся в [11]. При доказательстве теоремы будем использовать методы интерпретации из [3], а также полугруппу $S(M, \phi)$ из [11].

Пусть $\mathfrak{p}$ — частично рекурсивная функция, принимающая два значения — 1 и 2, такая, что множества $\mathfrak{p}^{-1}(1)$ и $\mathfrak{p}^{-1}(2)$ рекурсивно неотделимы, т. е. не существует рекурсивного множества X, для которого $\mathfrak{p}^{-1}(1) \subseteq X$ и $X \cap \mathfrak{p}^{-1}(2) = \varnothing$ (см. [12]). Обозначим через M двухленточную машину Минского, вычисляющую функцию $\mathfrak{p}$ (см. [13]). В дальнейшем будем полагать, что $q_0, q_1, q_2, \ldots, q_m$ — внутренние состояния машины M, где q_1 — начальное, q_0 — заключительное состояния. Если машина находится в состоянии q_i и j-я лента сдвинута на ξ_j ячеек влево, $j = 1, 2$, то будем говорить, что M находится в конфигурации $q_i\xi_1\xi_2$.

Пусть $\mathfrak{S}$ — многообразие всех полугрупп. Обозначим через $F\mathfrak{S}$ полугруппу, свободную в многообразии $\mathfrak{S}$ со счетным множеством образующих $\{e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots\}$, через $F_n\mathfrak{S}$ — полугруппу ранга n, свободную в многообразии $\mathfrak{S}$ с образующими $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Рассмотрим эндоморфизм ϕ полугруппы $\{a, b, c\}^+$, определяемый равенствами

$$\phi(a) = abcab, \;\; \phi(b) = acabcb, \;\; \phi(c) = acbcacb.$$

Эндоморфизм ϕ порождает последовательность $U_n = \phi^n(a)$, $n \in \mathbb{N}$, тернарных бесквадратных слов, т.е. слов, избегающих слово x^2 [14]. Пусть $P_{k,i}$, $k \geqslant 3$, $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ — элемент полугруппы $F_2\mathfrak{S}$, имеющий вид $e_1 {e_2}^{k+i} e_1 e_1$. В соответствии с рассмотренным выше эндоморфизмом ϕ, а также изучаемым нами вариантом машины Минского M определим следующую модификацию полугруппы $S(M, \phi)$ из [11].

Пусть $S_k(M, \phi)$, $k \in \mathbb{N}$, — полугруппа с множеством образующих $\{e_1, e_2\}$, заданная следующими определяющими соотношениями:

δ_1	δ_2	СООТНОШЕНИЕ
1	1	$A(e_1,e_2)a(e_1,e_2)l_0(e_1,e_2)q_i(e_1,e_2)r_0(e_1,e_2)a(e_1,e_2)B(e_1,e_2) =$ $A(e_1,e_2)a(e_1,e_2)l_{\varepsilon_1}(e_1,e_2)Q_j(e_1,e_2)r_{\varepsilon_2}(e_1,e_2)d(e_1,e_2)a(e_1,e_2)B(e_1,e_2)$
1	0	$A(e_1,e_2)a(e_1,e_2)l_0(e_1,e_2)q_i(e_1,e_2)r_0(e_1,e_2)a(e_1,e_2)b(e_1,e_2) =$ $A(e_1,e_2)a(e_1,e_2)l_{\varepsilon_1}(e_1,e_2)Q_j(e_1,e_2)r_{\varepsilon_2}(e_1,e_2)d(e_1,e_2)a(e_1,e_2)b(e_1,e_2)$
0	1	$b(e_1,e_2)l_0(e_1,e_2)q_i(e_1,e_2)r_0(e_1,e_2)a(e_1,e_2)B(e_1,e_2) =$ $b(e_1,e_2)l_{\varepsilon_1}(e_1,e_2)Q_j(e_1,e_2)r_{\varepsilon_2}(e_1,e_2)d(e_1,e_2)a(e_1,e_2)B(e_1,e_2)$
0	0	$b(e_1,e_2)l_0(e_1,e_2)q_i(e_1,e_2)r_0(e_1,e_2)a(e_1,e_2)b(e_1,e_2) =$ $b(e_1,e_2)l_{\varepsilon_1}(e_1,e_2)Q_j(e_1,e_2)r_{\varepsilon_2}(e_1,e_2)d(e_1,e_2)a(e_1,e_2)b(e_1,e_2)$

$$\begin{array}{lrcl}
\text{(i)} & l_0(e_1,e_2)a(e_1,e_2) & = & a(e_1,e_2)l_0(e_1,e_2), \\
& l_0(e_1,e_2)b(e_1,e_2) & = & b(e_1,e_2)l_0(e_1,e_2), \\
& l_0(e_1,e_2)c(e_1,e_2) & = & c(e_1,e_2)l_0(e_1,e_2), \\
\text{(ii)} & a(e_1,e_2)l_1(e_1,e_2) & = & l_1(e_1,e_2)\phi(a(e_1,e_2)), \\
& b(e_1,e_2)l_1(e_1,e_2) & = & l_1(e_1,e_2)\phi(b(e_1,e_2)), \\
& c(e_1,e_2)l_1(e_1,e_2) & = & l_1(e_1,e_2)\phi(c(e_1,e_2)), \\
& A(e_1,e_2)l_1(e_1,e_2) & = & A(e_1,e_2)l_0(e_1,e_2),
\end{array}$$

$$
\begin{array}{llll}
\text{(iii)} & \phi(a(e_1,e_2))l_{-1}(e_1,e_2) & = & l_{-1}(e_1,e_2)a(e_1,e_2), \\
 & \phi(b(e_1,e_2))l_{-1}(e_1,e_2) & = & l_{-1}(e_1,e_2)b(e_1,e_2), \\
 & \phi(c(e_1,e_2))l_{-1}(e_1,e_2) & = & l_{-1}(e_1,e_2)c(e_1,e_2), \\
 & A(e_1,e_2)l_{-1}(e_1,e_2) & = & A(e_1,e_2)l_0(e_1,e_2), \\
\text{(iv)} & r_0(e_1,e_2)a(e_1,e_2) & = & a(e_1,e_2)r_0(e_1,e_2), \\
 & r_0(e_1,e_2)b(e_1,e_2) & = & b(e_1,e_2)r_0(e_1,e_2), \\
 & r_0(e_1,e_2)c(e_1,e_2) & = & c(e_1,e_2)r_0(e_1,e_2), \\
\text{(v)} & \phi(a(e_1,e_2))r_1(e_1,e_2) & = & r_1(e_1,e_2)a(e_1,e_2), \\
 & \phi(b(e_1,e_2))r_1(e_1,e_2) & = & r_1(e_1,e_2)b(e_1,e_2), \\
 & \phi(c(e_1,e_2))r_1(e_1,e_2) & = & r_1(e_1,e_2)c(e_1,e_2), \\
 & r_0(e_1,e_2)B(e_1,e_2) & = & r_1(e_1,e_2)B(e_1,e_2), \\
\text{(vi)} & a(e_1,e_2)r_{-1}(e_1,e_2) & = & r_{-1}(e_1,e_2)\phi(a(e_1,e_2)), \\
 & b(e_1,e_2)r_{-1}(e_1,e_2) & = & r_{-1}(e_1,e_2)\phi(b(e_1,e_2)), \\
 & c(e_1,e_2)r_{-1}(e_1,e_2) & = & r_{-1}(e_1,e_2)\phi(c(e_1,e_2)), \\
 & r_0(e_1,e_2)B(e_1,e_2) & = & r_{-1}(e_1,e_2)B(e_1,e_2), \\
\text{(vii)} & d(e_1,e_2)a(e_1,e_2) & = & a(e_1,e_2)d(e_1,e_2), \\
 & d(e_1,e_2)b(e_1,e_2) & = & b(e_1,e_2)d(e_1,e_2), \\
 & d(e_1,e_2)c(e_1,e_2) & = & c(e_1,e_2)d(e_1,e_2), \\
 & d(e_1,e_2)B(e_1,e_2) & = & B(e_1,e_2)d_1(e_1,e_2), \\
 & \phi(a(e_1,e_2))d_1(e_1,e_2) & = & d_1(e_1,e_2)a(e_1,e_2), \\
 & \phi(b(e_1,e_2))d_1(e_1,e_2) & = & d_1(e_1,e_2)b(e_1,e_2), \\
 & \phi(c(e_1,e_2))d_1(e_1,e_2) & = & d_1(e_1,e_2)c(e_1,e_2), \\
 & d_0(e_1,e_2)C(e_1,e_2) & = & d_1(e_1,e_2)C(e_1,e_2), \\
 & d_0(e_1,e_2)a(e_1,e_2) & = & a(e_1,e_2)d_0(e_1,e_2), \\
 & d_0(e_1,e_2)b(e_1,e_2) & = & b(e_1,e_2)d_0(e_1,e_2), \\
 & d_0(e_1,e_2)c(e_1,e_2) & = & c(e_1,e_2)d_0(e_1,e_2), \\
 & d_0(e_1,e_2)B(e_1,e_2) & = & B(e_1,e_2)d_0(e_1,e_2), \\
 & Q_j(e_1,e_2)r_{e_2}(e_1,e_2)d_0(e_1,e_2) & = & q_j(e_1,e_2)r_{e_2}(e_1,e_2),
\end{array}
$$

где $a'(e_1,e_2)$, $b'(e_1,e_2)$, $c'(e_1,e_2)$, $A'(e_1,e_2)$, $B'(e_1,e_2)$, $C'(e_1,e_2)$, ${q_0}'(e_1,e_2)$, ${q_1}'(e_1,e_2)$, $\ldots$, ${q_m}'(e_1,e_2)$, ${Q_0}'(e_1,e_2)$, ${Q_1}'(e_1,e_2)$, $\ldots$, ${Q_m}'(e_1,e_2)$, ${d_0}'(e_1,e_2)$, ${d_1}'(e_1,e_2)$, $d'(e_1,e_2)$, ${l_0}'(e_1,e_2)$, ${l_1}'(e_1,e_2)$, ${l_{-1}}'(e_1,e_2)$, ${r_0}'(e_1,e_2)$, ${r_1}'(e_1,e_2)$, ${r_{-1}}'(e_1,e_2)$, $H(e_1,e_2)$ — это слова $P_{k(2m+18),1}$, $P_{k(2m+18),2}$, $\ldots$,

$P_{k(2m+18),2m+18}$ соответственно,

$$\phi(a(e_1,e_2)) = a(e_1,e_2)b(e_1,e_2)c(e_1,e_2)a(e_1,e_2)b(e_1,e_2),$$

$$\phi(b(e_1,e_2)) = a(e_1,e_2)c(e_1,e_2)a(e_1,e_2)b(e_1,e_2)c(e_1,e_2)b(e_1,e_2),$$

$$\phi(c(e_1,e_2)) = a(e_1,e_2)c(e_1,e_2)b(e_1,e_2)c(e_1,e_2)a(e_1,e_2)c(e_1,e_2)b(e_1,e_2),$$

$$\begin{array}{llllll}
a(e_1,e_2) & \rightleftharpoons & a'(e_1,e_2)H(e_1,e_2), & b(e_1,e_2) & \rightleftharpoons & b'(e_1,e_2)H(e_1,e_2),\\
c(e_1,e_2) & \rightleftharpoons & c'(e_1,e_2)H(e_1,e_2), & A(e_1,e_2) & \rightleftharpoons & A'(e_1,e_2)H(e_1,e_2),\\
B(e_1,e_2) & \rightleftharpoons & B'(e_1,e_2)H(e_1,e_2), & C(e_1,e_2) & \rightleftharpoons & C'(e_1,e_2)H(e_1,e_2),\\
Q_i(e_1,e_2) & \rightleftharpoons & Q_i'(e_1,e_2)H(e_1,e_2), & q_i(e_1,e_2) & \rightleftharpoons & q_i'(e_1,e_2)H(e_1,e_2),\\
l_\varepsilon(e_1,e_2) & \rightleftharpoons & l_\varepsilon'(e_1,e_2)H(e_1,e_2), & r_\varepsilon(e_1,e_2) & \rightleftharpoons & r_\varepsilon'(e_1,e_2)H(e_1,e_2),\\
d_\varepsilon(e_1,e_2) & \rightleftharpoons & d_\varepsilon'(e_1,e_2)H(e_1,e_2), & d(e_1,e_2) & \rightleftharpoons & d'(e_1,e_2)H(e_1,e_2).
\end{array}$$

Пусть $X = \{x, y\}$ — фиксированный двухэлементный алфавит переменных. Подстановка $e_1 \to x$, $e_2 \to y$ преобразовывает систему соотношений, задающую полугруппу $S_k(M,\phi)$, в некоторую систему полугрупповых тождеств. Обозначим через $\mathfrak{X}_k$ многообразие полугрупп, заданное этой системой тождеств.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 1. Пусть $\mathfrak{C}$ — многообразие, заданное тождеством

$$A(x,y)\phi(a(x,y))l_0(x,y)q_0(x,y)r_0(x,y)a(x,y)B(x,y) = 0,$$

$\mathfrak{B}_k$ — многообразие, заданное тождествами: $P_{i(m+18),m+18}(x,y) = 0$, $i \geqslant k+1$. Пусть, кроме того, $\mathfrak{A}_k = \mathfrak{X}_k \cap \mathfrak{C} \cap \mathfrak{B}_k$. По построению многообразия $\mathfrak{X}_k$, все тождества многообразия $\mathfrak{X}_k$ следуют из тождества $P_{k(m+18),m+18}(x,y) = 0$. Поэтому для любого натурального k имеет место соотношение $\mathfrak{B}_k \subset \mathfrak{A}_{k+1}$. Из определения многообразий $\mathfrak{A}_k$ и $\mathfrak{B}_k$, $k \in \mathbb{N}$, очевидным образом вытекает, что $\mathfrak{A}_k \subset \mathfrak{B}_k$. Поэтому многообразия $\mathfrak{A}_k$ и $\mathfrak{B}_k$, $k \in \mathbb{N}$, образуют цепочку $\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{A}_2 \subset \mathfrak{B}_2 \subset \ldots$. Заметим, что $P_{k(m+18),m+18}(x,x) = x^{(k+1)(m+18)+3}$. Отсюда непосредственно вытекает, что многообразие $\mathfrak{B}_k$ можно задать одним тождеством $P_{(k+1)(m+18),m+18}(x,y) = 0$, т.е. для любого натурального k многообразия $\mathfrak{A}_k$ и $\mathfrak{B}_k$ конечно базируемы. Следовательно, для доказательства теоремы достаточно показать, что для любого натурального k эквациональная теория многообразия $\mathfrak{A}_k$ неразрешима, а эквациональная теория многообразия $\mathfrak{B}_k$ разрешима.

Покажем сначала, что эквациональная теория многообразия $\mathfrak{B}_k$ и класса $\mathfrak{B}_k \cap \mathfrak{F}$ всех конечных полугрупп из многообразия $\mathfrak{B}_k$ разрешима. Обозначим через $\mathfrak{N}_n$, $n \in \mathbb{N}$, многообразие полугрупп, заданное тождеством $x_1 x_2 \dots x_n = 0$. Пусть $\mathfrak{S}_{n,k} = \mathfrak{N}_n \cap \mathfrak{B}_k$, $F_n\mathfrak{S}_{n,k}$ – полугруппа ранга n, свободная в многообразии полугрупп $\mathfrak{S}_{n,k}$, $F\mathfrak{B}_k$ — полугруппа счетного ранга, свободная в многообразии $\mathfrak{B}_k$. Пусть $\mathfrak{D}$ — фильтр Фреше над множеством натуральных чисел $\mathbb{N}$, т. е. множество всех коконечных подмножеств множества $\mathbb{N}$ (см. [15]). Обозначим через $\Pi_{\mathfrak{D}} F_n\mathfrak{S}_{n,k}$ фильтрованное произведение полугрупп $F_n\mathfrak{S}_{n,k}$ по фильтру $\mathfrak{D}$. Пусть $a = (a_1, \dots, a_n, \dots)$ — элемент полугруппы $\Pi_{\mathfrak{D}} F_n\mathfrak{S}_{n,k}$. Допустим, что у элемента a существует лишь конечное число компонент a_i таких, что $a_i \neq b$. Тогда множество компонент, на которых элемент a равен элементу $b = (b, \dots, b, \dots)$, коконечно. Следовательно, по определению фильтрованного произведения имеем $\Pi_{\mathfrak{D}} F_n\mathfrak{S}_{n,k} \models a = b$. Итак, если $a \neq b$, то a имеет бесконечное множество компонент, отличных от b.

Пусть $S(a_i) = \{j \mid a_i = a_j\}$. Пусть J — множество таких $a \in \Pi_{\mathfrak{D}} F_n\mathfrak{S}_{n,k}$, что для некоторых $i \in \mathbb{N}$ и $d \in \mathfrak{D}$ имеет место равенство $d = S(a_i)$. Тогда $I = \Pi_{\mathfrak{D}} F_n\mathfrak{S}_{n,k} \setminus J$ — идеал полугруппы $\Pi_{\mathfrak{D}} F_n\mathfrak{S}_{n,k}$. Пусть $\Pi_{\mathfrak{D}} F_n\mathfrak{S}_{n,k}/I$ — полугруппа, являющаяся гомоморфным образом полугруппы $\Pi_{\mathfrak{D}} F_n\mathfrak{S}_{n,k}$ при гомоморфизме, заданном отображением: $a \to a$, если $a \in J$, и $a = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) \to (a_1, a_1, \dots, a_1, \dots)$, если $a \in I$.

Обозначим через $a[i]$ элемент алгебры $\Pi_{\mathfrak{D}} F_n\mathfrak{S}_{n,k}/I$ такой, что $S(a_i) \in \mathfrak{D}$. Определение $a[i]$ корректно. Достаточно показать:

$$\Pi_{\mathfrak{D}} F_n\mathfrak{S}_{n,k}/I \models a^{d_1}[i] = a^{d_2}[i],$$

где $a^{d_1}[i]$ и $a^{d_2}[i]$ — элементы полугруппы $\Pi_{\mathfrak{D}} F_n\mathfrak{S}_{n,k}/I$ такие, что d_1, d_2 — элементы фильтра $\mathfrak{D}$, а $d_1 = S(a_i)$ для элемента $a^{d_1}[i]$ и $d_2 = S(a_i)$ для элемента $a^{d_2}[i]$. По определению фильтра, множество $d_1 \cap d_2$ принадлежит фильтру $\mathfrak{D}$. Для любого $j \in d_1 \cap d_2$, j-е компоненты элементов $a^{d_1}[i], a^{d_2}[i]$

совпадают, поэтому соотношение

$$\Pi_{\mathfrak{D}} F_n \mathfrak{S}_{n,k}/I \models a^{d_1}[i] = a^{d_2}[i]$$

имеет место согласно определению равенства в фильтрованном произведении. Следовательно, определение элемента $a[i]$ корректно.

В силу сказанного, множество всевозможных элементов $a[i]$ порождает полугруппу $\Pi_{\mathfrak{D}} F_n \mathfrak{S}_{n,k}/I$. Очевидно, можно ограничиться только теми элементами $a[i]$, у которых компонента a_i является образующим полугруппы $F_n \mathfrak{S}_{n,k}$. Покажем, что полугруппа $\Pi_{\mathfrak{D}} F_n \mathfrak{S}_{n,k}/I$ изоморфна полугруппе $F\mathfrak{B}_k$, причем множество $\{E_i = a[i] \mid a_i = e_i\}$, где $\{e_1, \dots, e_k\}$ — множество свободных образующих полугруппы $F_n \mathfrak{S}_{n,k}$, является множеством свободных образующих полугруппы $\Pi_{\mathfrak{D}} F_n \mathfrak{S}_{n,k}/I$. Достаточно показать, что для любых слов $u(e_1, \dots, e_n, \dots)$ и $v(e_1, \dots, e_n, \dots)$ равенство $u(e_1, \dots, e_n, \dots) = v(e_1, \dots, e_n, \dots)$ имеет место в полугруппе $F\mathfrak{B}_k$ тогда и только тогда, когда в полугруппе $\Pi_{\mathfrak{D}} F_n \mathfrak{S}_{n,k}/I$ выполняется равенство $u(E_1, \dots, E_n, \dots) = v(E_1, \dots, E_n, \dots)$. Поскольку $F\mathfrak{B}_k$ — свободная полугруппа счетного ранга, из выполнимости в полугруппе $F\mathfrak{B}_k$ равенства $u(e_1, \dots, e_n, \dots) = v(e_1, \dots, e_n, \dots)$ вытекает выполнимость в полугруппе $\Pi_{\mathfrak{D}} F_n \mathfrak{S}_{n,k}/I$ равенства $u(E_1, \dots, E_n, \dots) = v(E_1, \dots, E_n, \dots)$.

Допустим теперь, что в полугруппе $\Pi_{\mathfrak{D}} F_n \mathfrak{S}_{n,k}/I$ выполняется равенство $u(E_1, \dots, E_n, \dots) = v(E_1, \dots, E_n, \dots)$. Тогда по построению полугруппы $\Pi_{\mathfrak{D}} F_n \mathfrak{S}_{n,k}/I$ существует такое r, что i-е компоненты элементов $u(E_1, \dots, E_n, \dots)$ и $v(E_1, \dots, E_n, \dots)$ равны между собой для любого $i > r$. Пусть l_1 — длина слова $u(e_1, \dots, e_n, \dots)$, l_2 — длина слова $v(e_1, \dots, e_n, \dots)$, $l = \max(l_1 + 1, l_2 + 1, r + 1)$. Тогда, как нетрудно убедиться, выполнимость равенства $u(E_1, \dots, E_n, \dots) = v(E_1, \dots, E_n, \dots)$ в полугруппе $\Pi_{\mathfrak{D}} F_n \mathfrak{S}_{n,k}/I$ равносильна выполнимости этого равенства в полугруппе $\Pi_{\mathfrak{D}} F_n \mathfrak{S}_{n,k}$ и равносильна тому, что для любого $i > l$ в полугруппе $F_i \mathfrak{S}_{i,k}$ выполняется равенство $u(e_1, \dots, e_n, \dots) = v(e_1, \dots, e_n, \dots)$. Поскольку $l > l_1$, $l > l_2$, выполнимость равенства $u(e_1, \dots, e_n, \dots) = v(e_1, \dots, e_n, \dots)$ в полугруппе $F_i \mathfrak{S}_{i,k}$ влечет выполнимость этого равенства в полугруппе $F\mathfrak{B}_k$. Итак, полугруппы $F\mathfrak{B}_k$ и $\Pi_{\mathfrak{D}} F_n \mathfrak{S}_{n,k}/I$ действительно изоморфны.

Очевидно, что для любого n полугруппа $F_n\mathfrak{S}_{n,k}$ принадлежит классу $\mathfrak{B}_k \cap \mathfrak{F}$. Пусть ψ — позитивное предложение. Имеет место $\mathfrak{B}_k \cap \mathfrak{F} \models \psi$, если $F\mathfrak{B}_k \models \psi$. Пусть теперь $\mathfrak{B}_k \cap \mathfrak{F} \models \psi$, тогда $F_n\mathfrak{S}_{n,k} \models \psi$ для любого n. Произвольное предложение устойчиво относительно фильтрованных произведений тогда и только тогда, когда оно эквивалентно хорновскому предложению [16]; произвольное предложение устойчиво относительно гомоморфизмов тогда и только тогда, когда оно эквивалентно позитивному или тождественно ложному предложению [17]. Поэтому $\Pi_{\mathfrak{D}} F_n\mathfrak{S}_{n,k} \models \psi$. Поскольку ψ позитивно, получаем $\Pi_{\mathfrak{D}} F_n\mathfrak{S}_{n,k}/I \models \psi$, т. е. $F\mathfrak{B}_k \models \psi$. Следовательно,

$$F\mathfrak{B}_k \models \psi \Leftrightarrow \mathfrak{B}_k \cap \mathfrak{F} \models \psi.$$

Итак, многообразие $\mathfrak{B}_k$ и класс $\mathfrak{B}_k \cap \mathfrak{F}$ позитивно эквивалентны. Следовательно, многообразие $\mathfrak{B}_k$ порождается классом $\mathfrak{B}_k \cap \mathfrak{F}$. Отсюда непосредственно вытекает, что свободные в многообразии $\mathfrak{B}_k$ полугруппы финитно аппроксимируемы, а значит, эквациональная теория многообразия $\mathfrak{B}_k$ и класса $\mathfrak{B}_k \cap \mathfrak{F}$ разрешима.

Рассмотрим теперь эквациональную теорию класса $\mathfrak{A}_k \cap \mathfrak{F}$. Покажем, что тождество

$$A(x,y)\phi^{\xi_1}(a(x,y))l_0(x,y)q_i(x,y)r_0(x,y)\phi^{\xi_2}(a(x,y))\cdot$$
$$\cdot B(x,y)\phi^{\xi_3}(a(x,y))C(x,y) = A(x,y)\phi^{\eta_1}(a(x,y))l_0(x,y)q_j(x,y)r_0(x,y)\cdot$$
$$\cdot\phi^{\eta_2}(a(x,y))B(x,y)\phi^{\xi_3+\alpha}(a(x,y))C(x,y)$$

выполняется в многообразии $\mathfrak{A}_k$ тогда и только тогда, когда существует вычисление длины α, при помощи которого машина M переходит из конфигурации $q_i\xi_1\xi_2$ в конфигурацию $q_j\eta_1\eta_2$.

Предположим сначала, что найдется конечное вычисление, при помощи которого машина M переходит из конфигурации $q_i\xi_1\xi_2$ в конфигурацию $q_j\eta_1\eta_2$. Индукцией по числу β тактов работы машины M покажем, что в многообразии $\mathfrak{A}_k$ выполняется тождество

$$A(x,y)\phi^{\xi_1}(a(x,y))l_0(x,y)q_i(x,y)r_0(x,y)\phi^{\xi_2}(a(x,y))\cdot$$

$$\cdot B(x,y)\phi^{\xi_3}(a(x,y))C(x,y) = A(x,y)\phi^{\eta_1}(a(x,y))l_0(x,y)q_j(x,y)\cdot$$
$$\cdot r_0(x,y)\phi^{\eta_2}(a(x,y))B(x,y)\phi^{\xi_3+\beta}(a(x,y))C(x,y).$$

Пусть $\beta = 0$. Тогда утверждение очевидно. Предположим теперь, что утверждение справедливо для некоторого числа β. Покажем, что утверждение выполняется и для $\beta + 1$. В самом деле, пусть машина M, начав работать в конфигурации $q_i\xi_1\xi_2$, через β тактов работы переходит в $q_l\tau_1\tau_2$, а через $\beta + 1$ такт работы — в конфигурацию $q_j\eta_1\eta_2$. В зависимости от того, равны нулю числа τ_1, τ_2 или нет, следует рассмотреть четыре случая. Пусть для определенности $\tau_1 = 0$, $\tau_2 \neq 0$. Остальные три случая рассматриваются совершенно аналогично. Поскольку $\tau_1 = 0$, $\tau_2 \neq 0$, то на $(\beta + 1)$-м шаге машина M выполняет команду

$$q_l 10 \to q_j\varepsilon_1\varepsilon_2$$

и переходит из конфигурации $q_l\tau_1\tau_2$ в конфигурацию $q_l(\tau_1+\varepsilon_1)(\tau_2+\varepsilon_2)$, т.е. $\tau_1 + \varepsilon_1 = \eta_1$ и $\tau_2 + \varepsilon_2 = \eta_2$. По предположению индукции в многообразии $\mathfrak{A}_k$ выполняется тождество

$$A(x,y)\phi^{\xi_1}(a(x,y))l_0(x,y)q_i(x,y)r_0(x,y)\phi^{\xi_2}(a(x,y))\cdot$$
$$\cdot B(x,y)\phi^{\xi_3}(a(x,y))C(x,y) = A(x,y)\phi^{\tau_1}(a(x,y))l_0(x,y)q_l(x,y)\cdot$$
$$\cdot r_0(x,y)\phi^{\tau_2}(a(x,y))B(x,y)\phi^{\xi_3+\beta}(a(x,y))C(x,y).$$

Поскольку $\tau_1 = 0$, то это тождество имеет вид

$$A(x,y)\phi^{\xi_1}(a(x,y))l_0(x,y)q_i(x,y)r_0(x,y)\phi^{\xi_2}(a(x,y))\cdot$$
$$\cdot B(x,y)\phi^{\xi_3}(a(x,y))C(x,y) = A(x,y)a(x,y)l_0(x,y)q_l(x,y)\cdot$$
$$\cdot r_0(x,y)\phi^{\tau_2}(a(x,y))B(x,y)\phi^{\xi_3+\beta}(a(x,y))C(x,y).$$

Так как на $(\beta + 1)$-м шаге машина M выполняет команду

$$q_l 10 \to q_j\varepsilon_1\varepsilon_2,$$

то, по построению многообразия $\mathfrak{A}_k$, должно выполняться тождество

$$A(x,y)a(x,y)l_0(x,y)q_l(x,y)r_0(x,y)a(x,y)b(x,y) =$$

$$A(x,y)a(x,y)l_{\varepsilon_1}(x,y)Q_j(x,y)r_{\varepsilon_2}(x,y)d(x,y)a(x,y)b(x,y).$$

Заметим, что по определению эндоморфизма ϕ слово $\phi^p(a(x,y))$ для любого натурального p начинается с подслова $a(x,y)b(x,y)$. Поэтому из тождеств

$$A(x,y)\phi^{\xi_1}(a(x,y))l_0(x,y)q_i(x,y)r_0(x,y)\phi^{\xi_2}(a(x,y))\cdot$$

$$\cdot B(x,y)\phi^{\xi_3}(a(x,y))C(x,y) = A(x,y)a(x,y)l_0(x,y)q_l(x,y)\cdot$$

$$\cdot r_0(x,y)\phi^{\tau_2}(a(x,y))B(x,y)\phi^{\xi_3+\beta}(a(x,y))C(x,y),$$

$$A(x,y)a(x,y)l_0(x,y)q_l(x,y)r_0(x,y)a(x,y)b(x,y) =$$

$$A(x,y)a(x,y)l_{\varepsilon_1}(x,y)Q_j(x,y)r_{\varepsilon_2}(x,y)d(x,y)a(x,y)b(x,y)$$

вытекает тождество

$$A(x,y)\phi^{\xi_1}(a(x,y))l_0(x,y)q_i(x,y)r_0(x,y)\phi^{\xi_2}(a(x,y))\cdot$$

$$\cdot B(x,y)\phi^{\xi_3}(a(x,y))C(x,y) = A(x,y)a(x,y)l_{\varepsilon_1}(x,y)Q_j(x,y)\cdot$$

$$\cdot r_{\varepsilon_2}(x,y)d(x,y)\phi^{\tau_2}(a(x,y))B(x,y)\phi^{\xi_3+\beta}(a(x,y))C(x,y),$$

Из последнего, используя тождества (i)—(vii), получаем

$$A(x,y)\phi^{\xi_1}(a(x,y))l_0(x,y)q_i(x,y)r_0(x,y)\phi^{\xi_2}(a(x,y))\cdot$$

$$\cdot B(x,y)\phi^{\xi_3}(a(x,y))C(x,y) = A(x,y)\phi^{\eta_1}(a(x,y))l_0(x,y)q_j(x,y)\cdot$$

$$\cdot r_0(x,y)\phi^{\eta_2}(a(x,y))B(x,y)\phi^{\xi_3+\beta+1}(a(x,y))C(x,y).$$

Итак, если машина M через $\beta+1$ такт работы переходит из конфигурации $q_i\xi_1\xi_2$ в конфигурацию $q_j\eta_1\eta_2$, то в многообразии $\mathfrak{A}_k$ выполняется тождество

$$A(x,y)\phi^{\xi_1}(a(x,y))l_0(x,y)q_i(x,y)r_0(x,y)\phi^{\xi_2}(a(x,y))\cdot$$

$$\cdot B(x,y)\phi^{\xi_3}(a(x,y))C(x,y) = A(x,y)\phi^{\eta_1}(a(x,y))l_0(x,y)q_j(x,y)\cdot$$

$$\cdot r_0(x,y)\phi^{\eta_2}(a(x,y))B(x,y)\phi^{\xi_3+\beta+1}(a(x,y))C(x,y).$$

Предположим теперь, что в многообразии $\mathfrak{A}_k$ выполняется тождество

$$A(x,y)\phi^{\xi_1}(a(x,y))l_0(x,y)q_i(x,y)r_0(x,y)\phi^{\xi_2}(a(x,y))\cdot$$

$$\cdot B(x,y)\phi^{\xi_3}(a(x,y))C(x,y) = A(x,y)\phi^{\eta_1}(a(x,y))l_0(x,y)q_j(x,y)\cdot$$
$$\cdot r_0(x,y)\phi^{\eta_2}(a(x,y))B(x,y)\phi^{\xi_3+\beta}(a(x,y))C(x,y),$$

и покажем, что существует вычисление длины β, при помощи которого машина M переходит из конфигурации $q_i\xi_1\xi_2$ в конфигурацию $q_j\eta_1\eta_2$. Пусть $\mathfrak{l}(w)$ — длина слова w. Рассмотрим семейство частичных функций $\varphi_p^\alpha(u,v)$, переводящих элементы множества $\{x,y\}^+ \times \{x,y\}^+$ в элементы множества $\{x,y\}^+$, и семейство частичных функций $\psi_{p_1,p_2}^{\alpha,\beta}(u,v,w)$, переводящих элементы множества $\{x,y\}^+ \times \{x,y\}^+ \times \{x,y\}^+$ в элементы множества $\{x,y\}^+$:

$\varphi_p^\alpha(u,v)$ не определено, если $p > \mathfrak{l}(\phi^\alpha(a(x,y))) + 1$;

$\varphi_p^\alpha(u,v)$ не определено, если $v \neq a(x,y)$ или если $u \notin \{l_\varepsilon \mid \varepsilon \in \{-1,0,1\}\}$;

$\varphi_p^\alpha(u,v) = l_0x_1\ldots x_s$, если $u = l_0(x,y)$, $v = a(x,y)$, $x_1\ldots x_s = \phi^\alpha(a(x,y))$, $x_i \in \{a(x,y), b(x,y), c(x,y)\}$, $1 \leqslant i \leqslant s$, $p = \mathfrak{l}(\phi^\alpha(a(x,y))) + 1$;

$\varphi_p^\alpha(u,v) = l_\varepsilon x_1\ldots x_s$, если $u = l_\varepsilon(x,y)$, $v = a(x,y)$, $x_1\ldots x_s = \phi^\alpha(a(x,y))$, $x_i \in \{a(x,y), b(x,y), c(x,y)\}$, $1 \leqslant i \leqslant s$, $\varepsilon \in \{-1,1\}$, $p = \mathfrak{l}(\phi^\alpha(a(x,y)))$;

$\varphi_p^\alpha(u,v) = x_1\ldots x_{s-p}l_0(x,y)x_{s-p+1}\ldots x_s$, если $u = l_0(x,y)$, $v = a(x,y)$, $x_1\ldots x_s = \phi^\alpha(a(x,y))$, $x_i \in \{a(x,y), b(x,y), c(x,y)\}$, $1 \leqslant i \leqslant s$;

$\varphi_p^\alpha(u,v) = x_1\ldots x_{s-p}l_1(x,y)\phi(x_{s-p+1})\ldots\phi(x_s)$, если $u = l_1(x,y)$, $v = a(x,y)$, $x_1\ldots x_s = \phi^{\alpha-1}(a(x,y))$, $x_i \in \{a(x,y), b(x,y), c(x,y)\}$, $1 \leqslant i \leqslant s$;

$\varphi_p^\alpha(u,v) = \phi(x_1)\ldots\phi(x_{s-p})l_{-1}(x,y)x_{s-p+1}\ldots x_s$, если $u = l_{-1}(x,y)$, $v = a(x,y)$, $x_1\ldots x_s = \phi^\alpha(a(x,y))$, $x_i \in \{a(x,y), b(x,y), c(x,y)\}$, $1 \leqslant i \leqslant s$.

$\psi_{p_1,p_2}^{\alpha,\beta}(u,v,w)$ не определено, если $p_1 > \mathfrak{l}(\phi^\alpha(a(x,y))) + 1$ или $p_2 > \mathfrak{l}(\phi^\alpha(a(x,y))) + \mathfrak{l}(\phi^\beta(a(x,y))) + 2$;

$\psi_{p_1,p_2}^{\alpha,\beta}(u,v,w)$ не определено, если $w \neq a(x,y)$, или если $u \notin \{r_\varepsilon \mid \varepsilon \in \{-1,0,1\}\}$, или если $v \notin \{d, d_\varepsilon \mid \varepsilon \in \{0,1\}\}$;

$\psi_{p_1,p_2}^{\alpha,\beta}(u,v,w) = x_1\ldots x_s r_{\varepsilon_1} y_1\ldots y_t d_1$, если $u = r_{\varepsilon_1}(x,y)$, $v = d_1(x,y)$, $w = a(x,y)$, $x_1\ldots x_s = \phi^\alpha(a(x,y))$, $y_1\ldots y_t = \phi^\beta(a(x,y))$, $x_i \in \{a(x,y), b(x,y), c(x,y)\}$ $(1 \leqslant i \leqslant s)$, $y_i \in \{a(x,y), b(x,y), c(x,y)\}$ $(1 \leqslant i \leqslant t)$, $\varepsilon_1 \in \{-1,1\}$, $p_1 = \mathfrak{l}(\phi^\alpha(a(x,y)))$, $p_2 = \mathfrak{l}(\phi^\alpha(a(x,y))) + \mathfrak{l}(\phi^\beta(a(x,y))) + 1$;

$\psi_{p_1,p_2}^{\alpha,\beta}(u,v,w) = x_1\ldots x_s r_{\varepsilon_1} y_1\ldots y_t d_0$, если $u = r_{\varepsilon_1}(x,y)$, $v = d_0(x,y)$, $w = a(x,y)$, $x_1\ldots x_s = \phi^\alpha(a(x,y))$, $y_1\ldots y_t = \phi^\beta(a(x,y))$, $x_i \in$

$\in \{a(x,y),\ b(x,y),\ c(x,y)\}$ $(1 \leqslant i \leqslant s)$, $y_i \in \{a(x,y), b(x,y), c(x,y)\}$ $(1 \leqslant i \leqslant t)$, $\varepsilon_1 \in \{-1, 1\}$, $p_1 = \mathfrak{l}(\phi^\alpha(a(x,y)))$, $p_2 = \mathfrak{l}(\phi^\alpha(a(x,y))) + \mathfrak{l}(\phi^\beta(a(x,y))) + 2$;

$\psi^{\alpha,\beta}_{p_1,p_2}(u,v,w) = x_1 \ldots x_s r_0 y_1 \ldots y_t d_1$, если $u = r_0(x,y)$, $v = d_1(x,y)$, $w = a(x,y)$, $x_1 \ldots x_s = \phi^\alpha(a(x,y))$, $y_1 \ldots y_t = \phi^\beta(a(x,y))$, $x_i \in \{a(x,y),\ b(x,y),\ c(x,y)\}$ $(1 \leqslant i \leqslant s)$, $y_i \in \{a(x,y),\ b(x,y),\ c(x,y)\}$ $(1 \leqslant i \leqslant t)$, $p_1 = \mathfrak{l}(\phi^\alpha(a(x,y))) + 1$, $p_2 = \mathfrak{l}(\phi^\alpha(a(x,y))) + \mathfrak{l}(\phi^\beta(a(x,y))) + 1$;

$\psi^{\alpha,\beta}_{p_1,p_2}(u,v,w) = x_1 \ldots x_s r_0 y_1 \ldots y_t d_0$, если $u = r_0(x,y)$, $v = d_0(x,y)$, $w = a(x,y)$, $x_1 \ldots x_s = \phi^\alpha(a(x,y))$, $y_1 \ldots y_t = \phi^\beta(a(x,y))$, $x_i \in \{a(x,y), b(x,y), c(x,y)\}$ $(1 \leqslant i \leqslant s)$, $y_i \in \{a(x,y),\ b(x,y),\ c(x,y)\}$ $(1 \leqslant i \leqslant t)$, $p_1 = \mathfrak{l}(\phi^\alpha(a(x,y))) + 1$, $p_2 = \mathfrak{l}(\phi^\alpha(a(x,y))) + \mathfrak{l}(\phi^\beta(a(x,y))) + 2$;

$\psi^{\alpha,\beta}_{p_1,p_2}(u,v,w) = x_1 \ldots x_{p_1} r_0(x,y) x_{p_1+1} \ldots x_s B y_1 \ldots y_t d_1$, если $u = r_0(x,y)$, $v = d_1(x,y)$, $w = a(x,y)$, $x_1 \ldots x_s = \phi^\alpha(a(x,y))$, $y_1 \ldots y_t = \phi^\beta(a(x,y))$, $x_i \in \{a(x,y), b(x,y), c(x,y)\}$ $(1 \leqslant i \leqslant s)$, $y_i \in \{a(x,y),\ b(x,y),\ c(x,y)\}$ $(1 \leqslant i \leqslant t)$, $p_2 = \mathfrak{l}(\phi^\alpha(a(x,y))) + \mathfrak{l}(\phi^\beta(a(x,y))) + 1$;

$\psi^{\alpha,\beta}_{p_1,p_2}(u,v,w) = x_1 \ldots x_{p_1} r_0(x,y) x_{p_1+1} \ldots x_s B y_1 \ldots y_t d_0$, если $u = r_0(x,y)$, $v = d_0(x,y)$, $w = a(x,y)$, $x_1 \ldots x_s = \phi^\alpha(a(x,y))$, $y_1 \ldots y_t = \phi^\beta(a(x,y))$, $x_i \in \{a(x,y), b(x,y), c(x,y)\}$ $(1 \leqslant i \leqslant s)$, $y_i \in \{a(x,y),\ b(x,y),\ c(x,y)\}$ $(1 \leqslant i \leqslant t)$, $p_2 = \mathfrak{l}(\phi^\alpha(a(x,y))) + \mathfrak{l}(\phi^\beta(a(x,y))) + 2$;

$\psi^{\alpha,\beta}_{p_1,p_2}(u,v,w) = x_1 \ldots x_{p_1} r_0(x,y) x_{p_1+1} \ldots x_s B y_1 \ldots y_{p_2-p_1-1} d_0(x,y) \cdot y_{p_2-p_1} \ldots y_t$, если $u = r_0(x,y)$, $v = d_0(x,y)$, $w = a(x,y)$, $x_1 \ldots x_s = \phi^\alpha(a(x,y))$, $y_1 \ldots y_t = \phi^\beta(a(x,y))$, $x_i \in \{a(x,y), b(x,y), c(x,y)\}$ $(1 \leqslant i \leqslant s)$, $y_i \in \{a(x,y),\ b(x,y),\ c(x,y)\}$ $(1 \leqslant i \leqslant t)$, $p_2 > s$;

$\psi^{\alpha,\beta}_{p_1,p_2}(u,v,w) = x_1 \ldots x_{p_1} r_0(x,y) x_{p_1+1} \ldots x_s B \phi(y_1) \ldots \phi(y_{p_2-p_1-1}) \cdot d_1(x,y) y_{p_2-p_1} \ldots y_t$, если $u = r_0(x,y)$, $v = d_1(x,y)$, $w = a(x,y)$, $x_1 \ldots x_s = \phi^\alpha(a(x,y))$, $y_1 \ldots y_t = \phi^{\beta-1}(a(x,y))$, $x_i \in \{a(x,y), b(x,y), c(x,y)\}$ $(1 \leqslant i \leqslant s)$, $y_i \in \{a(x,y), b(x,y), c(x,y)\}$ $(1 \leqslant i \leqslant t)$, $p_2 > s$;

$\psi^{\alpha,\beta}_{p_1,p_2}(u,v,w) = \phi(x_1) \ldots \phi(x_{p_1}) r_1(x,y) x_{p_1+1} \ldots x_s B y_1 \ldots y_t d_1$, если $u = r_1(x,y)$, $v = d_1(x,y)$, $w = a(x,y)$, $x_1 \ldots x_s = \phi^{\alpha-1}(a(x,y))$, $y_1 \ldots y_t = \phi^\beta(a(x,y))$, $x_i \in \{a(x,y), b(x,y), c(x,y)\}$ $(1 \leqslant i \leqslant s)$, $y_i \in \{a(x,y),\ b(x,y),\ c(x,y)\}$ $(1 \leqslant i \leqslant t)$, $p_2 = \mathfrak{l}(\phi^\alpha(a(x,y))) + \mathfrak{l}(\phi^\beta(a(x,y))) + 1$;

$\psi^{\alpha,\beta}_{p_1,p_2}(u,v,w) = \phi(x_1) \ldots \phi(x_{p_1}) r_1(x,y) x_{p_1+1} \ldots x_s B y_1 \ldots y_t d_0$, если $u = r_1(x,y)$, $v = d_0(x,y)$, $w = a(x,y)$, $x_1 \ldots x_s = \phi^{\alpha-1}(a(x,y))$, $y_1 \ldots y_t =$

$= \phi^{\beta}(a(x,y))$, $x_i \in \{a(x,y), b(x,y), c(x,y)\}$ $(1 \leqslant i \leqslant s)$, $y_i \in \{a(x,y), b(x,y), c(x,y)\}$ $(1 \leqslant i \leqslant t)$, $p_2 = \mathfrak{l}(\phi^{\alpha}(a(x,y))) + \mathfrak{l}(\phi^{\beta}(a(x,y))) + 2$;

$\psi^{\alpha,\beta}_{p_1,p_2}(u,v,w) = \phi(x_1)\ldots\phi(x_{p_1})r_1(x,y)x_{p_1+1}\ldots x_s B y_1 \ldots y_{p_2-p_1-1} \cdot d_0(x,y)y_{p_2-p_1}\ldots y_t$, если $u = r_1(x,y)$, $v = d_0(x,y)$, $w = a(x,y)$, $x_1\ldots x_s = \phi^{\alpha-1}(a(x,y))$, $y_1\ldots y_t = \phi^{\beta}(a(x,y))$, $x_i \in \{a(x,y), b(x,y), c(x,y)\}$ $(1 \leqslant i \leqslant s)$, $y_i \in \{a(x,y), b(x,y), c(x,y)\}$ $(1 \leqslant i \leqslant t)$, $p_2 > s$;

$\psi^{\alpha,\beta}_{p_1,p_2}(u,v,w) = \phi(x_1)\ldots\phi(x_{p_1})r_1(x,y)x_{p_1+1}\ldots x_s B\phi(y_1)\ldots\phi(y_{p_2-p_1-1})\cdot d_1(x,y)y_{p_2-p_1}\ldots y_t$, если $u = r_1(x,y)$, $v = d_1(x,y)$, $w = a(x,y)$, $x_1\ldots x_s = \phi^{\alpha-1}(a(x,y))$, $y_1\ldots y_t = \phi^{\beta-1}(a(x,y))$, $x_i \in \{a(x,y), b(x,y), c(x,y)\}$ $(1 \leqslant i \leqslant s)$, $y_i \in \{a(x,y), b(x,y), c(x,y)\}$ $(1 \leqslant i \leqslant t)$, $p_2 > s$;

$\psi^{\alpha,\beta}_{p_1,p_2}(u,v,w) = x_1\ldots x_{p_1} r_{-1}(x,y)\phi(x_{p_1+1})\ldots\phi(x_s)By_1\ldots y_t d_1$, если $u = r_{-1}(x,y)$, $v = d_1(x,y)$, $w = a(x,y)$, $x_1\ldots x_s = \phi^{\alpha}(a(x,y))$, $y_1\ldots y_t = \phi^{\beta}(a(x,y))$, $x_i \in \{a(x,y), b(x,y), c(x,y)\}$ $(1 \leqslant i \leqslant s)$, $y_i \in \{a(x,y), b(x,y), c(x,y)\}$ $(1 \leqslant i \leqslant t)$, $p_2 = \mathfrak{l}(\phi^{\alpha}(a(x,y))) + \mathfrak{l}(\phi^{\beta}(a(x,y))) + 1$;

$\psi^{\alpha,\beta}_{p_1,p_2}(u,v,w) = x_1\ldots x_{p_1} r_{-1}(x,y)\phi(x_{p_1+1})\ldots\phi(x_s)By_1\ldots y_t d_0$, если $u = r_{-1}(x,y)$, $v = d_0(x,y)$, $w = a(x,y)$, $x_1\ldots x_s = \phi^{\alpha}(a(x,y))$, $y_1\ldots y_t = \phi^{\beta}(a(x,y))$, $x_i \in \{a(x,y), b(x,y), c(x,y)\}$ $(1 \leqslant i \leqslant s)$, $y_i \in \{a(x,y), b(x,y), c(x,y)\}$ $(1 \leqslant i \leqslant t)$, $p_2 = \mathfrak{l}(\phi^{\alpha}(a(x,y))) + \mathfrak{l}(\phi^{\beta}(a(x,y))) + 2$;

$\psi^{\alpha,\beta}_{p_1,p_2}(u,v,w) = x_1\ldots x_{p_1} r_{-1}(x,y)\phi(x_{p_1+1})\ldots\phi(x_s)By_1\ldots y_{p_2-p_1-1} \cdot d_0(x,y)y_{p_2-p_1}\ldots y_t$, если $u = r_{-1}(x,y)$, $v = d_0(x,y)$, $w = a(x,y)$, $x_1\ldots x_s = \phi^{\alpha}(a(x,y))$, $y_1\ldots y_t = \phi^{\beta}(a(x,y))$, $x_i \in \{a(x,y), b(x,y), c(x,y)\}$ $(1 \leqslant i \leqslant s)$, $y_i \in \{a(x,y), b(x,y), c(x,y)\}$ $(1 \leqslant i \leqslant t)$, $p_2 > s$;

$\psi^{\alpha,\beta}_{p_1,p_2}(u,v,w) = x_1\ldots x_{s-p_1} r_{-1}(x,y)\phi(x_{p_1+1})\ldots\phi(x_s)B\phi(y_1)\ldots \ldots\phi(y_{p_2-p_1-1})d_1(x,y)y_{p_2-p_1}\ldots y_t$, если $u = r_{-1}(x,y)$, $v = d_1(x,y)$, $w = a(x,y)$, $x_1\ldots x_s = \phi^{\alpha}(a(x,y))$, $y_1\ldots y_t = \phi^{\beta-1}(a(x,y))$, $x_i \in \{a(x,y), b(x,y), c(x,y)\}$ $(1 \leqslant i \leqslant s)$, $y_i \in \{a(x,y), b(x,y), c(x,y)\}$ $(1 \leqslant i \leqslant t)$, $p_2 > s$;

$\psi^{\alpha,\beta}_{p_1,p_2}(u,v,w) = x_1\ldots x_{p_1} r_0(x,y)x_{p_1+1}\ldots x_{p_2}dx_{p_2+1}\ldots x_s By_1\ldots y_t$, если $u = r_0(x,y)$, $v = d(x,y)$, $w = a(x,y)$, $x_1\ldots x_s = \phi^{\alpha}(a(x,y))$, $y_1\ldots y_t = \phi^{\beta}(a(x,y))$, $x_i \in \{a(x,y), b(x,y), c(x,y)\}$ $(1 \leqslant i \leqslant s)$, $y_i \in \{a(x,y), b(x,y), c(x,y)\}$ $(1 \leqslant i \leqslant t)$, $p_2 < s$;

$\psi^{\alpha,\beta}_{p_1,p_2}(u,v,w) = \phi(x_1)\ldots\phi(x_{p_1})r_1(x,y)x_{p_1+1}\ldots x_{p_2}dx_{p_2+1}\ldots x_s By_1\ldots y_t$, если $u = r_1(x,y)$, $v = d(x,y)$, $w = a(x,y)$, $x_1 \dots x_s = \phi^{\alpha-1}(a(x,y))$, $y_1 \dots y_t = \phi^{\beta}(a(x,y))$, $x_i \in \{a(x,y), b(x,y), c(x,y)\}$ $(1 \leqslant i \leqslant s)$, $y_i \in \{a(x,y), b(x,y), c(x,y)\}$ $(1 \leqslant i \leqslant t)$, $p_2 < s$;

$\psi^{\alpha,\beta}_{p_1,p_2}(u,v,w) = x_1 \dots x_{p_1} r_{-1}(x,y)\phi(x_{p_1+1}) \dots \phi(x_{p_2}) d\phi(x_{p_2+1}) \dots \phi(x_s) \cdot B y_1 \dots y_t$, если $u = r_{-1}(x,y)$, $v = d(x,y)$, $w = a(x,y)$, $x_1 \dots x_s = \phi^{\alpha-1}(a(x,y))$, $y_1 \dots y_t = \phi^{\beta}(a(x,y))$, $x_i \in \{a(x,y), b(x,y), c(x,y)\}$ $(1 \leqslant i \leqslant s)$, $y_i \in \{a(x,y), b(x,y), c(x,y)\}$ $(1 \leqslant i \leqslant t)$, $p_2 < s$.

Тождество

$$A(x,y)\phi^{\xi_1}(a(x,y))l_0(x,y)q_i(x,y)r_0(x,y)\phi^{\xi_2}(a(x,y))\cdot$$
$$\cdot B(x,y)\phi^{\xi_3}(a(x,y))C(x,y) = A(x,y)\phi^{\eta_1}(a(x,y))l_0(x,y)q_j(x,y)\cdot$$
$$\cdot r_0(x,y)\phi^{\eta_2}(a(x,y))B(x,y)\phi^{\xi_3+\beta}(a(x,y))C(x,y)$$

можно представить в виде

$$A(x,y)\varphi_0^{\xi_1}(l_0(x,y), a(x,y))q_i(x,y)\psi_{0,0}^{\xi_2,\xi_3}(r_0(x,y), d(x,y), a(x,y))\cdot$$
$$\cdot C(x,y) = A(x,y)\varphi_0^{\eta_1}(l_0(x,y), a(x,y))\cdot$$
$$\cdot q_j(x,y)\psi_{0,0}^{\eta_2,\xi_3+\beta}(r_0(x,y), d(x,y), a(x,y))C(x,y).$$

Вместо того, чтобы показывать, что из выполнимости в многообразии $\mathfrak{A}_k$ тождества

$$A(x,y)\phi^{\xi_1}(a(x,y))l_0(x,y)q_i(x,y)r_0(x,y)\phi^{\xi_2}(a(x,y))\cdot$$
$$\cdot B(x,y)\phi^{\xi_3}(a(x,y))C(x,y) = A(x,y)\phi^{\eta_1}(a(x,y))l_0(x,y)q_j(x,y)\cdot$$
$$\cdot r_0(x,y)\phi^{\eta_2}(a(x,y))B(x,y)\phi^{\xi_3+\beta}(a(x,y))C(x,y)$$

следует существование вычисления длины β, при помощи которого машина M переходит из конфигурации $q_i\xi_1\xi_2$ в конфигурацию $q_j\eta_1\eta_2$, нам удобнее доказать более общее утверждение, а именно: из выполнимости в многообразии $\mathfrak{A}_k$ тождества

$$A(x,y)\varphi_{p_1}^{\xi_1}(l_{\varepsilon_1}(x,y), a(x,y))q_i(x,y)\psi_{p_2,p_3}^{\xi_2,\xi_3}(r_{\varepsilon_2}(x,y), d_{\varepsilon_3}(x,y),$$
$$a(x,y))C(x,y) = A(x,y)\varphi_{p_4}^{\eta_1}(l_{\varepsilon_4}(x,y), a(x,y))\cdot$$

$$\cdot q_j(x,y)\psi^{\eta_2,\xi_3+\beta}_{p_5,p_6}(r_{\varepsilon_5}(x,y),d_{\varepsilon_6}(x,y),a(x,y))C(x,y),$$

где $\varepsilon_s \in \{-1,0,1\}$, $s \in \{1,2,4,5\}$, $\varepsilon_t \in \{-1,0,1\}$, $t \in \{3,6\}$, $p_1 \leqslant \leqslant \mathfrak{l}(\phi^{\xi_1}(a(x,y))) + 1$, $p_2 \leqslant \mathfrak{l}(\phi^{\xi_2}(a(x,y))) + 1$, $p_3 \leqslant \mathfrak{l}(\phi^{\xi_2}(a(x,y))) + \mathfrak{l}(\phi^{\xi_3}(a(x,y))) + 2$, $p_4 \leqslant \mathfrak{l}(\phi^{\eta_1}(a(x,y))) + 1$, $p_5 \leqslant \mathfrak{l}(\phi^{\eta_2}(a(x,y))) + 1$, $p_6 \leqslant \mathfrak{l}(\phi^{\eta_2}(a(x,y))) + \mathfrak{l}(\phi^{\xi_3+\beta}(a(x,y))) + 2$, следует существование конечного вычисления, при помощи которого машина M переходит из конфигурации $q_i\xi_1\xi_2$ в конфигурацию $q_j\eta_1\eta_2$ или наоборот.

Если в некотором многообразии полугрупп $\mathfrak{X}$ выполняется тождество $w_1(\vec{x}) = w_2(\vec{x})$, то слово $w_2(\vec{x})$ получается из слова $w_1(\vec{x})$ конечным числом применений тождеств, задающих многообразие $\mathfrak{X}$. Этот процесс будем называть выводом тождества $w_1(\vec{x}) = w_2(\vec{x})$ из тождеств, задающих многообразие $\mathfrak{X}$. При этом число применений тождеств, задающих многообразие $\mathfrak{X}$, в процессе вывода тождества $w_1(\vec{x}) = w_2(\vec{x})$ будем называть длиной вывода тождества $w_1(\vec{x}) = w_2(\vec{x})$. Доказательство того утверждения, что из выполнимости в многообразии $\mathfrak{A}_k$ тождества

$$A(x,y)\varphi^{\xi_1}_{p_1}(l_{\varepsilon_1}(x,y),a(x,y))q_i(x,y)\psi^{\xi_2,\xi_3}_{p_2,p_3}(r_{\varepsilon_2}(x,y),d_{\varepsilon_3}(x,y),a(x,y))\cdot$$

$$\cdot C(x,y) = A(x,y)\varphi^{\eta_1}_{p_4}(l_{\varepsilon_4}(x,y),a(x,y))\cdot$$

$$\cdot q_j(x,y)\psi^{\eta_2,\xi_3+\beta}_{p_5,p_6}(r_{\varepsilon_5}(x,y),d_{\varepsilon_6}(x,y),a(x,y))C(x,y),$$

где $\varepsilon_s \in \{-1,0,1\}$, $s \in \{1,2,4,5\}$, $\varepsilon_t \in \{-1,0,1\}$, $t \in \{3,6\}$, $p_1 \leqslant \leqslant \mathfrak{l}(\phi^{\xi_1}(a(x,y))) + 1$, $p_2 \leqslant \mathfrak{l}(\phi^{\xi_2}(a(x,y))) + 1$, $p_3 \leqslant \mathfrak{l}(\phi^{\xi_2}(a(x,y))) + \mathfrak{l}(\phi^{\xi_3}(a(x,y))) + 2$, $p_4 \leqslant \mathfrak{l}(\phi^{\eta_1}(a(x,y))) + 1$, $p_5 \leqslant \mathfrak{l}(\phi^{\eta_2}(a(x,y))) + 1$, $p_6 \leqslant \mathfrak{l}(\phi^{\eta_2}(a(x,y))) + \mathfrak{l}(\phi^{\xi_3+\beta}(a(x,y))) + 2$, следует существование конечного вычисления, при помощи которого машина M переходит из конфигурации $q_i\xi_1\xi_2$ в конфигурацию $q_j\eta_1\eta_2$, проведем индукцией по длине β вывода тождества

$$A(x,y)\varphi^{\xi_1}_{p_1}(l_{\varepsilon_1}(x,y),a(x,y))q_i(x,y)\psi^{\xi_2,\xi_3}_{p_2,p_3}(r_{\varepsilon_2}(x,y),d_{\varepsilon_3}(x,y),a(x,y))\cdot$$

$$\cdot C(x,y) = A(x,y)\varphi^{\eta_1}_{p_4}(l_{\varepsilon_4}(x,y),a(x,y))\cdot$$

$$\cdot q_j(x,y)\psi^{\eta_2,\xi_3+\beta}_{p_5,p_6}(r_{\varepsilon_5}(x,y),d_{\varepsilon_6}(x,y),a(x,y))C(x,y)$$

из тождеств, задающих многообразие $\mathfrak{A}_k$. Допустим, что $\beta = 0$. Тогда утверждение верно. Предположим, что утверждение справедливо для некоторого числа β. Покажем, что оно выполняется и для $\beta + 1$. В силу леммы 1 [3] числа i, ξ_1, ξ_2 и ξ_3 по слову

$$A(x,y)\varphi_{p_1}^{\xi_1}(l_{\varepsilon_1}(x,y),a(x,y))q_i(x,y)\psi_{p_2,p_3}^{\xi_2,\xi_3}(r_{\varepsilon_2}(x,y),d_{\varepsilon_3}(x,y),a(x,y))C(x,y)$$

определяются однозначно. При этом в силу леммы 1 [3] тождества многообразия $\mathfrak{B}_k$ не применимы к словам вида

$$A(x,y)\varphi_{p_1}{}^{\xi_1}(l_{\varepsilon_1}(x,y),a(x,y))q_i(x,y)\psi_{p_2,p_3}^{\xi_2,\xi_3}(r_{\varepsilon_2}(x,y),d_{\varepsilon_3}(x,y),a(x,y))C(x,y).$$

По определению многообразия $\mathfrak{X}_k$, в силу леммы 1 [3] при применении тождества, задающего многообразие $\mathfrak{X}_k$, к слову

$$A(x,y)\varphi_{p_1}^{\xi_1}(l_{\varepsilon_1}(x,y),a(x,y))q_i(x,y)\psi_{p_2,p_3}^{\xi_2,\xi_3}(r_{\varepsilon_2}(x,y),d_{\varepsilon_3}(x,y),a(x,y))C(x,y)$$

получается слово вида

$$A(x,y)\varphi_{p_4}^{\xi_1}(l_{\varepsilon_4}(x,y),a(x,y))q_i(x,y)\psi_{p_5,p_6}^{\xi_5,\xi_6}(r_{\varepsilon_5}(x,y),d_{\varepsilon_6}(x,y),a(x,y))C(x,y).$$

Отсюда, по предположению индукции, имеем требуемое.

По определению машины M, если $\mathfrak{p}(n) = 1$, то существует конечное вычисление, при помощи которого машина M переходит из конфигурации $q_1 2^n 0$ в конфигурацию $q_0 10$. Следовательно, в многообразии $\mathfrak{A}_k$, а значит, и в классе $\mathfrak{A}_k \cap \mathfrak{F}$ для некоторого натурального β выполняется тождество

$$A(x,y)\phi^{2^n}(a(x,y))l_0(x,y)q_1(x,y)r_0(x,y)a(x,y)\cdot$$
$$\cdot B(x,y)a(x,y)C(x,y) = A(x,y)\phi(a(x,y))l_0(x,y)q_0(x,y)\cdot$$
$$\cdot r_0(x,y)a(x,y)B(x,y)\phi^{\beta}(a(x,y))C(x,y).$$

Отсюда и в силу тождества

$$A(x,y)\phi(a(x,y))l_0(x,y)q_0(x,y)r_0(x,y)a(x,y)B(x,y) = 0$$

в многообразии $\mathfrak{A}_k$, а значит, и в классе $\mathfrak{A}_k \cap \mathfrak{F}$ выполняется тождество

$$A(x,y)\phi^{2^n}(a(x,y))l_0(x,y)q_1(x,y)r_0(x,y)a(x,y)B(x,y)a(x,y)C(x,y) = 0.$$

По определению машины M, если $\mathfrak{p}(n) = 2$, то не существует конечного вычисления, при помощи которого машина M переходит из конфигурации $q_1 2^n 0$ в конфигурацию $q_0 10$. Следовательно, в многообразии $\mathfrak{A}_k$ для произвольного натурального β не выполняется тождество

$$A(x,y)\phi^{2^n}(a(x,y))l_0(x,y)q_1(x,y)r_0(x,y)a(x,y)\cdot$$

$$\cdot B(x,y)a(x,y)C(x,y) = A(x,y)\phi(a(x,y))l_0(x,y)q_0(x,y)\cdot$$

$$\cdot r_0(x,y)a(x,y)B(x,y)\phi^{\beta}(a(x,y))C(x,y).$$

Отсюда, учитывая тождество

$$A(x,y)\phi(a(x,y))l_0(x,y)q_0(x,y)r_0(x,y)a(x,y)B(x,y) = 0,$$

в многообразии $\mathfrak{A}_k$ не выполняется тождество

$$A(x,y)\phi^{2^n}(a(x,y))l_0(x,y)q_1(x,y)r_0(x,y)a(x,y)B(x,y)a(x,y)C(x,y) = 0.$$

В силу рекурсивной неотделимости множеств $\mathfrak{p}^{-1}(1)$ и $\mathfrak{p}^{-1}(2)$ эквациональная теория многообразия $\mathfrak{A}_k$ неразрешима. Если $\mathfrak{p}(n) = 1$, то в многообразии $\mathfrak{A}_k$, а значит, и в классе $\mathfrak{A}_k \cap \mathfrak{F}$ выполняется тождество

$$A(x,y)\phi^{2^n}(a(x,y))l_0(x,y)q_1(x,y)r_0(x,y)a(x,y)B(x,y)a(x,y)C(x,y) = 0.$$

Поэтому для доказательства неразрешимости эквациональной теории класса $\mathfrak{A}_k \cap \mathfrak{F}$ нам достаточно показать, что если $\mathfrak{p}(n) = 2$, то в классе $\mathfrak{A}_k \cap \mathfrak{F}$ не выполняется тождество

$$A(x,y)\phi^{2^n}(a(x,y))l_0(x,y)q_1(x,y)r_0(x,y)a(x,y)B(x,y)a(x,y)C(x,y) = 0.$$

Обозначим через $F\mathfrak{A}_k$ полугруппу счетного ранга, свободную в многообразии $\mathfrak{A}_k$ и порожденную множеством $\{e_1, e_2, \dots, e_n, \dots\}$. Тождество

$$A(x,y)\phi^{2^n}(a(x,y))l_0(x,y)q_1(x,y)r_0(x,y)a(x,y)B(x,y)a(x,y)C(x,y) = 0$$

выполняется в многообразии $\mathfrak{A}_k$ тогда и только тогда, когда в полугруппе $F\mathfrak{A}_k$ выполняется равенство

$$A(e_1,e_2)\phi^{2^n}(a(e_1,e_2))l_0(e_1,e_2)q_1(e_1,e_2)r_0(e_1,e_2)a(e_1,e_2)\cdot$$

$$\cdot B(e_1,e_2)a(e_1,e_2)C(e_1,e_2)=0.$$

Отсюда в силу того, что $\mathfrak{p}(n)=2$, имеем

$$F\mathfrak{A}_k \models A(e_1,e_2)\phi^{2^n}(a(e_1,e_2))l_0(e_1,e_2)q_1(e_1,e_2)r_0(e_1,e_2)a(e_1,e_2)\cdot$$

$$\cdot B(e_1,e_2)a(e_1,e_2)C(e_1,e_2)\neq 0.$$

Обозначим через W множество элементов полугруппы $F\mathfrak{A}_k$ вида

$$A(e_1,e_2)\phi^{2^n}(a(e_1,e_2))l_0(e_1,e_2)q_1(e_1,e_2)r_0(e_1,e_2)a(e_1,e_2)\cdot$$

$$\cdot B(e_1,e_2)a(e_1,e_2)C(e_1,e_2).$$

Из определения машины M вытекает, что множество W конечно. Несложно убедиться в том, что множество $I=F\mathfrak{A}_k\backslash W$ является идеалом полугруппы $F\mathfrak{A}_k$. Следовательно, если θ — естественный гомоморфизм полугруппы $F\mathfrak{A}_k$ на полугруппу $F\mathfrak{A}_k/I$, то

$$\theta(A(e_1,e_2)\phi^{2^n}(a(e_1,e_2))l_0(e_1,e_2)q_1(e_1,e_2)r_0(e_1,e_2)a(e_1,e_2)\cdot$$

$$\cdot B(e_1,e_2)a(e_1,e_2)C(e_1,e_2))\neq 0.$$

Таким образом, если $\mathfrak{p}(n)=2$, то тождество

$$A(x,y)\phi^{2^n}(a(x,y))l_0(x,y)q_1(x,y)r_0(x,y)a(x,y)B(x,y)a(x,y)C(x,y)=0$$

не выполняется в полугруппе $F\mathfrak{A}_k/I$, а значит, и в классе $\mathfrak{A}_k\cap\mathfrak{F}$, что и требовалось доказать. Теорема 1 доказана.

Мы построили многообразие сигнатуры $\langle\cdot,0\rangle$. Замена 0 на $t^{(k+2)(m+18)}$ в тождествах многообразий $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{X}_k$, $\mathfrak{B}_k$ и добавление тождеств $t^{(k+2)(m+18)}x = xt^{(k+2)(m+18)} = t^{(k+2)(m+18)}$ в базис многообразия $\mathfrak{B}_k$, позволяет получить из последовательности многообразий $\mathfrak{A}_1\subset\mathfrak{B}_1\subset\mathfrak{A}_2\subset\subset\mathfrak{B}_2\subset\ldots$ последовательность многообразий $\mathfrak{A}_1'\subset\mathfrak{B}_1'\subset\mathfrak{A}_2'\subset\mathfrak{B}_2'\subset\ldots$ сигнатуры $\langle\cdot\rangle$, для которой справедливы все приведенные выше рассуждения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 2. Воспользуемся для построения необходимой нам последовательности многообразий схемой построения многообразий $\mathfrak{X}_k$, $\mathfrak{A}_k$, $\mathfrak{B}_k$, $\mathfrak{C}$ из теоремы 1. Сначала изменим последовательность полугрупп $S_k(M, \phi)$, $k \in \mathbb{N}$, заменив в определяющих соотношениях каждое вхождение подслова $H(e_1, e_2)$ на подслово $H_4(e_1, e_2)\phi^k(H_1(e_1, e_2))H_5(e_1, e_2)$, где

$$\phi(H_1(e_1, e_2)) = H_1(e_1, e_2)H_2(e_1, e_2)H_3(e_1, e_2)H_1(e_1, e_2)H_2(e_1, e_2),$$

$$\phi(H_2(e_1, e_2)) = H_1(e_1, e_2)H_3(e_1, e_2)H_1(e_1, e_2)H_2(e_1, e_2)H_3(e_1, e_2)H_2(e_1, e_2),$$

$$\phi(H_2(e_1, e_2)) = H_1(e_1, e_2)H_3(e_1, e_2)H_2(e_1, e_2)H_3(e_1, e_2)\cdot$$

$$\cdot H_1(e_1, e_2)H_3(e_1, e_2)H_2(e_1, e_2),$$

$H_1(e_1, e_2)$, $H_2(e_1, e_2)$, $H_3(e_1, e_2)$, $H_4(e_1, e_2)$, $H_5(e_1, e_2)$ — это слова $P_{k(2m+18),2m+18}$, $P_{k(2m+18),2m+19}, \ldots, P_{k(2m+18),2m+22}$ соответственно. Теперь заменим в определяющих соотношениях каждое вхождение подслова $P_{k(2m+18),i}$ на подслово $P_{k(2m+22),i}$, где $i \in \mathbb{N}$. В качестве $\mathfrak{B}_k$ рассмотрим многообразие, заданное тождествами $H_4(x, y)\phi^i(H_1(x, y))H_5(x, y) = 0$, $1 \leqslant i \leqslant k$. Многообразия $\mathfrak{X}_k$, $\mathfrak{A}_k$ и $\mathfrak{C}$ оставим без изменения. Далее рассуждения по схеме доказательства теоремы 1 завершают доказательство теоремы 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. И. Мальцев*, Тождественные соотношения на многообразиях квазигрупп, Матем. сб. (1966), **69**, N 1, 3–12.
2. Коуровская тетрадь, 10-е изд., Новосибирск, Изд-во Ин-та матем. СО АН, 1986.
3. *В. Л. Мурский*, Несколько примеров многообразий полугрупп, Матем. заметки, **3**, N 6 (1968), 663–670.
4. *Ю. Г. Клейман*, О тождествах в группах, Труды Моск. матем. об-ва, **44** (1982), 62–108.
5. *В. Ю. Попов*, Эквациональные теории многообразий метабелевых и коммутативных колец, Алгебра и логика, **34**, N 3 (1995), 347–361.
6. *В. Ю. Попов*, О разрешимости эквациональных теорий многообразий колец, Матем. заметки, **63**, N 6 (1998), 873–881.

7. *D. Albert, R. Baldinger, J. Rhodes*, Undecidability of the identity problem for finite semigroups, J. Symb. Log., **57**, N 1 (1992), 179—192.

8. *В. Ю. Попов*, Об эквациональных теориях многообразий метабелевых и коммутативных колец, Вторые матем. чтения памяти М. Я. Суслина, сб. тезисов, Саратов, 1991, 91.

9. *А. И. Мальцев*, Алгоритмы и рекурсивные функции, М., Наука, 1965.

10. *Ю. Ш. Гуревич*, Проблема равенства слов для некоторых классов полугрупп, Алгебра и логика, **5**, N 5 (1966), 25—35.

11. *O. G. Kharlampovich, M. V. Sapir*, Algorithmic problems in varieties, J. Algebra Comput., **5**, N 4-5 (1995), 379—602.

12. *X. Роджерс*, Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, М., Мир, 1972.

13. *M. L. Minsky*, Recursive unsolvability of Post's problem of "TAG" and topics in theory of Turing machines, Ann. Math. (2), **74**, N 3 (1961), 437—455.

14. *Axel Thue*, Über unendliche Zeichenreihen, Norske Vid. Selsk. Skr., I. Mat. Nat. Kl., Christiana, **7** (1906), 1—22.

15. *Г. Кейслер, Ч. Ч. Чэн*, Теория моделей, М., Мир, 1977.

16. *H. J. Keisler*, Limit ultraproducts, J. Symb. Log., **30**, N 2 (1965), 212—234.

17. *R. C. Lyndon*, Properties preserved under homomorphism, Pac. J. Math.. **9**, N 1 (1959), 143—154.

Адрес автора:
ПОПОВ Владимир Юрьевич,
РОССИЯ,
620077, г. Екатеринбург,
ул. Маршала Жукова, д. 11, кв. 6.

Поступило 5 июня 1999 г.