А. Канель-Белов, П. Кожевников, О кратности покрытия ориентированными многоугольниками, *Квант*, 2018, номер 5, 20–24

этом подробно рассказывалось в статье С.Варламова «В защиту магнитных зарядов и магнитных диполей» в прошлом номере журнала. – *Прим ред.*)
За начало отсчета потенциальной энергии удобно принять положение, когда магниты удалены друг от друга на очень большое (бесконечно большое) расстояние. Расположенные рядом магниты в начальном положении имеют отрицательную потенциальную энергию взаимодействия, так как они притягиваются друг к другу. (Северный полюс одного магнита находится ближе к южному полюсу другого магнита, чем к его северному полюсу.) После перемещения магнита А в положение $А_1$ магниты продолжают притягиваться, т.е. потенциальная энергия остается отрицательной, но становится меньшей по величине. В случае же перемещения магнита А в положение $А_2$ потенциальная энергия взаимодействия магнитов становится положительной, так как при таком взаимном расположении магниты отталкиваются друг от друга. Следовательно, во втором случае внешние силы совершили бóльшую работу.

В.Магнитов

О кратности покрытия ориентированными многоугольниками

А.Канель-Белов, П.Кожевников

Представим себе, что на плоском столе разбросали несколько многоугольных салфеток и каждая точка оказалась покрыта несколькими салфетками (возможно ни одной). Мы докажем некоторые интересные утверждения о кратности покрытия. В частности, мы приведем решение задачи М2493 из «Задачника «Кванта» («Квант» №12 за 2017 г.).

Начнем с понятия *ориентации* треугольника. Пусть на плоскости расположен треугольник ABC. Скажем, что векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ образуют *ориентированный контур* треугольника ABC. Обойдем контур треугольника по векторам $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$. Если мы совершили обход треугольника против часовой стрелки, то скажем, что треугольник ABC ориентирован положительно, а в противном случае – отрицательно. Как видим, в этом определении очень важен *циклический* порядок, в котором перечисляются вершины треугольника. Поэтому далее считаем, что каждая из записей ABC, BCA, CAB обозначает один и тот же ориентированный треугольник, а каждая из записей BAC, CBA, ACB – другой. При этом, очевидно, ориентированные треугольники ABC и BAC имеют противоположную ориентацию (т.е. ABC положительно ориентирован тогда и только тогда, когда BAC отрицательно ориентирован).

Упражнение 1. Определите ориентированный контур и ориентацию многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$ на плоскости.

Рассмотрим на плоскости конечное семейство T ориентированных треугольников. Для каждой точки X, не лежащей на границах треугольников, такие точки далее будем называть *регулярными* для семейства T, можно определить *кратность покрытия* точки X семейством T: каждый треугольник семейства T, содержащий внутри себя точку X, будет давать вклад ± 1 в эту кратность, где знак «+» берется для положительно ориентированного треугольника, а знак «–» – для отрицательно ориентированного. Далее кратность покрытия точки X семейством T обозначаем через $K_T(X)$. Иными словами, $K_T(X)$ показывает, сколько салфелок-треугольников накрывают точку X, только «отрицательно ориентированную салфетку» считаем «антисалфеткой», выкладывая которую, мы уменьшаем кратность покрытия точек под ней на 1. Формально, кратность покрытия ориентированным треугольником ABC равна (как функция, определенная во всех регулярных точках) *характеристической функции* χ_{ABC}, где $\chi_{ABC}(X)$ принимает значение 0 во всех точках X вне треугольника ABC, а для точки X внутри треугольника $\chi_{ABC}(X) = \pm 1$, в зависимости от ориентации треугольника. Тогда K_T есть функция (определенная во всех регулярных точках X), равная сумме характеристических функций всех ориентированных треугольников семейства T.

Упражнения

2. Пусть точки $A_1, \ldots, A_7$ расположены, как показано на рисунке 1, а семейство T состоит из ориентированных треугольников $A_1A_2A_3$, $A_1A_3A_5$, $A_3A_4A_5$, $A_1A_5A_7$, $A_5A_6A_7$. Вычислите $K_T(X)$ (для каждой из областей, на которые отрезки A_iA_j делят плоскость).

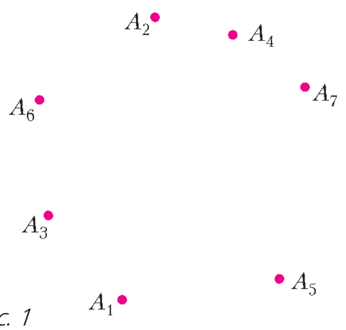

Рис. 1

3. Пусть A, B, C, D – произвольные точки общего положения (т.е. такие, что никакие три из них не лежат на одной прямой), а семейство T состоит из ориентированных треугольников BCA, CBD, BAD, ACD. Докажите, что $K_T = 0$ (т.е. $K_T(X)$ равно 0 для всех регулярных точек X). Иначе говоря, докажите равенство

$$\chi_{BCA} + \chi_{CBD} + \chi_{BAD} + \chi_{ACD} = 0\,. \quad (1)$$

4. Определите характеристическую функцию $\chi_{A_1A_2\ldots A_n}$ ориентированного многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$.

5. Докажите следующие равенства для выпуклого многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$ и произвольной точки O внутри него:

$$\chi_{A_1A_2\ldots A_n} = \chi_{A_nA_1A_2} + \chi_{A_nA_2A_3} + \ldots + \chi_{A_nA_{n-2}A_{n-1}}\,, \quad (2)$$

$$\chi_{A_1A_2\ldots A_n} = \chi_{OA_1A_2} + \chi_{OA_2A_3} + \ldots + \chi_{OA_1A_n}\,. \quad (3)$$

Посмотрим на семейство T из упражнения 3. Заметим, что вектор $\overrightarrow{AB}$ входит в ориентированный контур ровно одного из рассматриваемых ориентированных треугольников BCA, CBD, BAD, ACD. То же справедливо для вектора $\overrightarrow{BA}$. Ниже в теореме 1 мы сформулируем общий критерий того, что $K_T = 0$. Далее обозначим $k(\overrightarrow{AB})$ количество вхождений вектора $\overrightarrow{AB}$ в ориентированные контуры ориентированных треугольников семейства T (так, в предыдущем примере с семейством BCA, CBD, BAD, ACD имеем $k(\overrightarrow{AB}) = k(\overrightarrow{BA}) = 1$).

Теорема 1. *Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – точки общего положения (никакие три из которых не лежат на одной прямой). Для данного набора M циклически упорядоченных троек индексов из множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ рассмотрим семейство T ориентированных треугольников $A_iA_jA_k$, где $(i, j, k) \in M$. Тогда $K_T = 0 \Leftrightarrow$ для каждой пары индексов i, j $(1 \le i < j \le n)$ $k(\overrightarrow{A_iA_j}) = k(\overrightarrow{A_jA_i})$.*

Доказательство. Возьмем регулярную точку X. Начнем ее непрерывно перемещать по плоскости и следить, как будет изменяться $K_T(X)$. Пока X не дошла до границы какого-нибудь треугольника семейства T, кратность покрытия не изменяется, так как не меняется значение ни одной из характеристических функций $\chi_{A_iA_jA_k}$, $(i, j, k) \in M$. Теперь рассмотрим момент «элементарной катастрофы», когда X пересекает ровно один из отрезков, соединяющий вершины треугольников, пусть это отрезок A_iA_j (рис.2). Посмотрим, для каких треугольников семейства T в момент катастрофы меняется *статус*, т.е. факт покрытия или не покрытия точки X. Это в точности ориентированные треугольники семейства T, у которых обе точки A_i и A_j являются вершинами, т.е. ориентированные треугольники вида A_iA_jY и A_jA_iZ. Для всех же остальных треугольников семейства T статус покрытия точки сохранится. Пусть всего в семействе T имеется y треугольников вида A_iA_jY (так что $k(\overrightarrow{A_iA_j}) = y$), причем из них y_+ положительно ориентированных и y_- отрицательно ориентированных треугольников. Аналогично, пусть имеется z ориентированных треугольников вида A_jA_iZ (так что $k(\overrightarrow{A_jA_i}) = z$), среди которых z_+ положительно ориентированных и z_- отрицательно ориентированных.

Пусть, для определенности, до катастрофы точка X расположена так, что треугольник A_iA_jX положительно ориентирован (а значит, после катастрофы будет

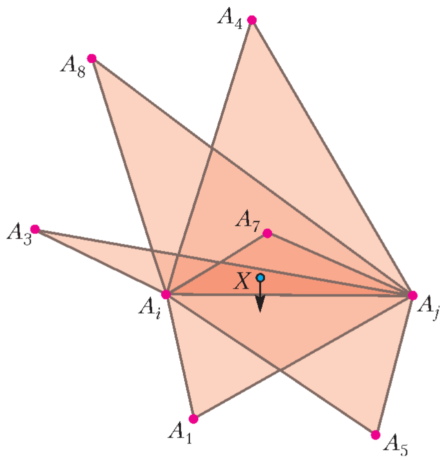

Рис. 2. Пусть в семействе T ориентированные треугольники вида A_iA_jY : $A_iA_jA_1$, $A_iA_jA_5$, $A_iA_jA_8$, вида A_jA_iZ : $A_iA_jA_4$, $A_jA_iA_3$, $A_jA_iA_7$. Тогда на рисунке: $y = 3$, $y_+ = 1$, $y_- = 2$, $z = 3$, $z_+ = 0$, $z_- = 3$

отрицательно ориентирован). Тогда до катастрофы кратность покрытия точки X ориентированными треугольниками вида A_iA_jY и A_jA_iZ равна $y_+ - z_-$, а после катастрофы она равна $z_+ - y_-$. Итого после того, как X претерпевает катастрофу, изменение кратности $K_T(X)$ составит

$$(y_+ - z_-) - (z_+ - y_-) = (y_+ + y_-) - (z_+ + z_-) =$$
$$= y - z = k(\overrightarrow{A_iA_j}) - k(\overrightarrow{A_jA_i}).$$

Итак, если хотя бы для одной пары вершин A_i, A_j условие $k(\overrightarrow{A_iA_j}) = k(\overrightarrow{A_jA_i})$ нарушится, то при пересечении точкой X отрезка A_iA_j кратность покрытия изменится, т.е. тождество $K_T = 0$ не будет выполнено.

Наоборот, предположим теперь, что условие $k(\overrightarrow{A_iA_j}) = k(\overrightarrow{A_jA_i})$ выполнено для всех пар вершин. Рассмотрим произвольную регулярную точку X и докажем, что $K_T(X) = 0$. Выберем некоторую регулярную точку X', лежащую вне всех треугольников семейства T, т.е. для которой заведомо выполнено $K_T(X') = 0$. Можно непрерывно перемещать X' в X так, чтобы по пути случилось лишь конечное количество элементарных катастроф. Но, как мы видели, при каждой катастрофе кратность покрытия не изменится, поэтому $K_T(X) = K_T(X') = 0$.

Теорема доказана.

Обратим внимание на то, что в теореме 1 устанавливается, что условие $K_T(X) = 0$ на самом деле эквивалентно некоторому комбинаторному условию на набор M циклически упорядоченных троек индексов. Получается, что условие $K_T = 0$ не зависит от конфигурации точек общего положения $A_1, A_2, \ldots, A_n$! Зафиксируем это утверждение.

Теорема 2. *Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$; $B_1, B_2, \ldots, B_n$ – две конфигурации точек общего положения. Для набора M циклически упорядоченных троек индексов из множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ рассмотрим семейство T ориентированных треугольников $A_iA_jA_k$, где $(i, j, k) \in M$, и, аналогично, семейство T' ориентированных треугольников $B_iB_jB_k$, где $(i, j, k) \in M$. Тогда $K_T = 0 \Leftrightarrow K_{T'} = 0$.*

Покажем некоторые сюжеты, в которых наши рассмотрения могут быть полезны.

1) **Задача М2493.** *Внутри треугольника $A_1A_2A_3$ взяты точки $A_4, A_5, \ldots, A_n$ так, что среди точек $A_1, \ldots, A_n$ нет трех точек на одной прямой. Аналогично, внутри треугольника $B_1B_2B_3$ взяты точки $B_4, B_5, \ldots, B_n$ так, что среди точек $B_1, \ldots, B_n$ нет трех точек на одной прямой. Дан набор M трехэлементных подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, n\}$. Пусть A – множество треугольников вида $A_iA_jA_k$, $i < j < k$, где $\{i, j, k\} \in M$, аналогично, B – множество треугольников вида $B_iB_jB_k$, $i < j < k$, где $\{i, j, k\} \in M$. Известно, что треугольники множества A образуют разбиение треугольника $A_1A_2A_3$. Докажите, что любая точка, лежащая внутри треугольника $B_1B_2B_3$, не лежащая на сторонах треугольников множества B, покрыта нечетным количеством треугольников множества B.*

Решение. Пусть треугольник $A_1A_2A_3$ разбит на треугольники $A_iA_jA_k$, где $\{i, j, k\} \in M$. Не умаляя общности, будем считать, что $A_1A_2A_3$ отрицательно ориентирован. Индексы в каждой тройке $\{i, j, k\} \in M$ считаем упорядоченными так, что соответствующий треугольник $A_iA_jA_k$ положительно ориентирован. Определим семейство ориентированных треугольников T: в T включим $A_1A_2A_3$ и все ориентированные треугольники $A_iA_jA_k$ вида $\{i,j,k\}\in M$. Тогда из условия «треугольники множества A образуют разбиение треугольника $A_1A_2A_3$» вытекает, что $K_T=0$. Согласно теореме 2, $K_{T'}=0$ и для семейства T', состоящего из $B_1B_2B_3$ и всех треугольников вида $B_iB_jB_k$, где $\{i,j,k\}\in M$. Рассмотрим произвольную регулярную точку X, лежащую внутри треугольника $B_1B_2B_3$. Равенство $K_{T'}(X)=0$ означает, что среди ориентированных треугольников семейства T' поровну положительно ориентированных и отрицательно ориентированных, содержащих X внутри себя. Забудем теперь про ориентацию и сделаем отсюда такой вывод: точка X накрыта четным количеством «салфеток» из множества B с добавленной «салфеткой» $B_1B_2B_3$. Убирая «салфетку» $B_1B_2B_3$, мы изменяем четность, поэтому точка X накрыта нечетным количеством треугольников множества B. Задача решена.

2) Пусть $B_1B_2\ldots B_n$ – ориентированный, возможно невыпуклый многоугольник. Покажем, что равенства (2) и (3) (и многие другие аналогичные равенства, очевидно верные для выпуклого многоугольника) *универсальны*, т.е. выполнены не только для выпуклого многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$ и при любом выборе точки плоскости O; при этом можно допускать и тройки точек, лежащих на одной прямой, полагая характеристическую функцию вырожденного треугольника равной 0.

Покажем, например, как можно доказать универсальность равенства (2). Рассмотрим некоторое разбиение положительно ориентированного многоугольника $B_1B_2\ldots B_n$ на треугольники, скажем возьмем некоторую его *триангуляцию* (разбиение на треугольники диагоналями, не имеющими общих внутренних точек) $B_iB_jB_k$, где $\{i,j,k\}\in M$. (Докажите, что любой невыпуклый многоугольник можно триангулировать!) Считаем треугольники $B_iB_jB_k$ положительно ориентированными (этого можно достичь перенумерацией индексов). Тогда, очевидно, $\chi_{B_1B_2\ldots B_n}=K_{T'}$, где T' – семейство ориентировнных треугольников $B_iB_jB_k$, $\{i,j,k\}\in M$.

Далее возьмем вспомогательный выпуклый многоугольник $A_1A_2\ldots A_n$ и рассмотрим семейство T ориентированных треугольников $A_iA_jA_k$, где $\{i,j,k\}\in M$. Нетрудно доказать, что треугольники семейства T образуют триангуляцию многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$. Тогда верно равенство $\chi_{A_1A_2\ldots A_n}=K_T$. Но также для $A_1A_2\ldots A_n$ верно равенство (2). Отсюда

$$K_T=\chi_{A_nA_1A_2}+\chi_{A_nA_2A_3}+\ldots+\chi_{A_nA_{n-2}A_{n-1}},$$

или

$$K_T+\chi_{A_nA_2A_1}+\chi_{A_nA_3A_2}+\ldots+\chi_{A_nA_{n-1}A_{n-2}}=0.$$

По теореме 2, аналог последнего равенства верен и для конфигурации точек $B_1,B_2,\ldots,B_n$:

$$K_{T'}+\chi_{B_nB_2B_1}+\chi_{B_nB_3B_2}+\ldots+\chi_{B_nB_{n-1}B_{n-2}}=0,$$

или

$$K_{T'}=\chi_{B_nB_1B_2}+\chi_{B_nB_2B_3}+\ldots+\chi_{B_nB_{n-2}B_{n-1}},$$

т.е.

$$\chi_{B_1B_2\ldots B_n}=\chi_{B_nB_1B_2}+\chi_{B_nB_2B_3}+\ldots+\chi_{B_nB_{n-2}B_{n-1}},$$

что и требовалось.

Упражнения

6. Обобщите теоремы 1 и 2 на случай покрытия ориентированными многоугольниками.

7. Даны n точек общего положения $A_1,\ldots,A_n$ так, что $A_1A_2\ldots A_m$ (для некоторого $m\le n$) – многоугольник. Семейство M трехэлементных подмножеств индексов $\{i,\ j,\ k\}$ таково, что треугольники $A_iA_jA_k$ образуют разбиение многоугольника $A_1\ldots A_m$. Аналогично, n точек общего положения $B_1,\ldots,B_n$ таковы, что $B_1\ldots B_m$ – многоугольник. Докажите, что треугольники $B_iB_jB_k$, $\{i,j,k\}\in M$, покрывают многоугольник $B_1\ldots B_m$.

Указание. Более сильное утверждение состоит в следующем: регулярные точки, лежащие внутри многоугольника $B_1\ldots B_m$, и только такие регулярные точки покрыты нечетным количеством треугольников вида $B_iB_jB_k$, где $\{i,j,k\}\in M$.

8. Для точек общего положения P, Q, A_1, … …, A_t, B_1, …, B_s, C_1, …, C_r докажите следующее свойство *аддитивности*:

$$\chi_{PA_1A_2\ldots A_tQB_sB_{s-1}\ldots B_1}+\chi_{PB_1B_2\ldots B_sQC_rC_{r-1}\ldots C_1}+$$
$$+\ \chi_{PC_1C_2\ldots C_rQA_tA_{t-1}\ldots A_1}=0.$$

3) Определим площадь ориентированного треугольника как его площадь, взя-

тую со знаком «+» или «−» в зависимости от ориентации. Можно говорить об ориентированной площади S_T семейства T − это сумма ориентированных площадей всех входящих в T ориентированных треугольников. Для читателя, знакомого с интегрированием, приведем простую формулу $S_T = \iint K_T(X)\,dx\,dy$ (здесь $(x;y)$ − декартовы координаты точки X), где интегрирование берется по плоскости. Любая из формул (2), (3) позволяет определить ориентированную площадь, ограниченную самопересекающейся замкнутой ломаной. Об ориентированных площадях в «Кванте» уже публиковались интересные статьи, которые мы рекомендуем читателю: А.Тоом. «Сколько площадей у многоугольника?» («Квант» №12 за 1984 г.), Н.Вагутен. «Формула площади» («Квант» №4 за 1981 г.).

Упражнение 9. Докажите, что наше определение ориентированной площади, ограниченной самопересекающейся замкнутой ломаной, находится в согласии со следующим определением из статьи А.Тоома. Рассмотрим любую из частей, на которые ломаная делит плоскость. Пусть это часть плоскости Π_i и ее (обычная) площадь равна S_i. Пройдем ориентированный контур ломаной и вычислим количество n_i оборотов, которое мы обходим вокруг Π_i против часовой стрелки (возможно, $n_i < 0$, если мы в итоге сделали несколько оборотов по часовой стрелке). Тогда искомой ориентированной площадью называем сумму величин $n_i S_i$ по всем частям плоскости.

Указание. Можно воспользоваться формулой (3), выбрав удобное положение точки O.

4) В завершение заметим, что практически все, что было сказано, можно обобщить на пространство (и вообще, на пространство любой конечной размерности). Читатель может дать определение ориентации тетраэдра и его поверхности, а затем сформулировать и доказать пространственные обобщения теорем 1 и 2.

Задачи помогают друг другу

В третьем номере журнала «Квант» за этот год рассказывалось о двух задачах, решать которые вместе проще, чем каждую в отдельности: вторая задача дает ключ к первой, и наоборот. Вот еще две такие задачи.

Задача 1. Играют в «Морской бой» на поле 10×10. Известно, что на поле как-то расположен один четырехпалубный корабль. Какое наименьшее количество выстрелов необходимо произвести, чтобы наверняка его задеть?

Задача 2. Какое наибольшее количество прямоугольников 1×4 можно вырезать из квадрата 10×10? (Разрезы проводятся по сторонам клеток.)

Ответ на первую задачу изображен на рисунке 1: достаточно произвести 24 выстрела (отмечены красными крестиками), чтобы наверняка задеть четырехпалубник. Как, однако, доказать, что не хватит меньшего числа выстрелов?

То же происходит и со второй задачей: на рисунке 2 изображено, как вырезать 24 прямоугольника. Но почему не получится вырезать 25 (т.е. разрезать всю доску)?

По отдельности доказательства оптимальности требуют каких-то дополнительных соображений. Однако вместе они получаются практически «бесплатно»: достаточно наложить друг на друга рисунки 1 и 2. Получится рисунок 3, и на нем сразу видны оба доказательства. Действительно, если мы вырезали из квадратной доски несколько прямоугольников 1×4, то в каждом из них должен оказаться крестик − иначе мы бы не задели четырехпалубник. Крестиков 24 − значит, больше 24 прямоугольников вырезать не получится. И наоборот: раз мы выделили на доске 24 непересекающихся места для четырехпалубного корабля, для каждого из них нужно хотя бы по одному выстрелу. Следовательно, выстрелов потребуется никак не меньше 24.

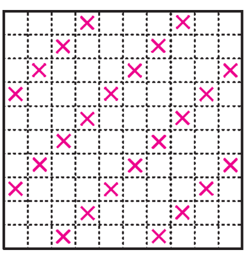
Рис. 1

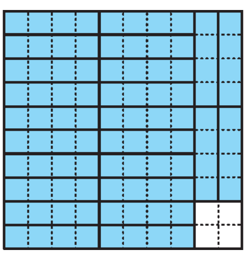
Рис. 2

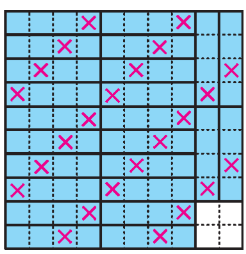
Рис. 3

Материал подготовил С.Кузнецов