



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

V. S. Mokeichev, A. M. Sidorov, Matrix Eigenvalues in Analytic Perturbation Theory for Linear Operators, *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2012, Volume 154, Book 3, 158–172

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 44.220.255.141

November 9, 2024, 00:17:34



УДК 517.984

## МАТРИЧНЫЕ СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ В АНАЛИТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В.С. Мокейчев, А.М. Сидоров

**Аннотация**

В работе предложен новый подход к аналитической теории возмущений собственных значений конечной кратности линейных операторов. Этот подход основан на понятии матричного собственного значения линейного оператора. В качестве приложений полученных результатов рассматриваются линейные задачи для дифференциальных уравнений.

**Ключевые слова:** линейный оператор, матричное собственное значение, аналитическая теория возмущений.

**Введение**

Пусть  $B(\mu)$  – линейный оператор, действующий при каждом  $\mu \in J = \{|\mu| < \mu_0\}$  из сепарабельного гильбертова пространства  $H$  в  $H$ . Рассмотрим задачу на собственные для оператора  $B(\mu)$ .

Для самосопряжённого оператора  $B(\mu) = A_0 + \mu A_1$  Э. Шрёдингер [1] предположил, что его собственные значения и соответствующие собственные элементы аналитически зависят от параметра  $\mu$ , то есть могут быть вычислены в виде

$$\lambda(\mu) = \lambda_0 + \lambda_1\mu + \lambda_2\mu^2 + \dots, \quad u(\mu) = u_{(0)} + u_{(1)}\mu + u_{(2)}\mu^2 + \dots, \quad (1)$$

в которых  $\lambda_j$  и  $u_{(j)}$  не зависят от  $\mu$ . Формулы (1) называются формулами Шрёдингера. Справедливость этого предположения впервые доказал Ф. Реллих [2]. Хорошо известно, что если хотя бы один из операторов  $A_0$ ,  $A_1$  не является самосопряжённым, то в общем случае предположение Шрёдингера неверно.

Целью настоящей работы является нахождение условий, при которых для несамосопряжённого оператора  $B(\mu) = A_0(\mu) + A_1(\mu)$  справедливо предположение Шрёдингера. Различным подходам к аналитической теории возмущений посвящено большое количество работ. Мы предлагаем новый подход, в основе которого лежит понятие матричного собственного значения. Это понятие, введённое в [3] для других целей, оказалось весьма полезным в теории возмущений [4, 5].

Исследования будут проведены при следующих предположениях относительно оператора  $B(\mu) = A_0(\mu) + A_1(\mu)$ ,  $\mu \in J$ :

а) при каждом  $\mu \in J$  операторы  $A_0(\mu) : D_{A_0(\mu)} \rightarrow H$ ,  $A_1(\mu) : D_{A_1(\mu)} \rightarrow H$  являются линейными в  $H$  и  $D_{A_0(\mu)} \subset D_{A_1(\mu)}$ ;

б) все различные собственные значения  $\lambda_1(\mu), \lambda_2(\mu), \dots$  оператора  $A_0(\mu)$  имеют конечную кратность, при каждом  $\mu \in J$  система

$$\{y_{(k,j)}(\mu), \quad j = 1, \dots, n_k(\mu), \quad k = 1, 2, \dots\} \quad (2)$$

собственных элементов, соответствующих  $\lambda_k(\mu)$ , является ортонормированным базисом в  $H$ , при всех  $k$  и  $\mu \in J$

$$a(k, \mu) = \sup_{q \neq k} (|\lambda_q(\mu) - \lambda_k(\mu)|^{-1}) < +\infty; \quad (3)$$

в) при каждом  $k$  и  $\mu \in J$  оператор  $A_0(\mu) - \lambda_k(\mu)I$  нормально разрешим ( $I$  – единичный оператор) и оператор  $A_1(\mu)$  подчинён оператору  $A_0(\mu) - \lambda_k(\mu)I$  в следующем смысле: при всех  $x \in D_{A_0(\mu)}$  таких, что  $\langle x, y_{(k,j)}(\mu) \rangle = 0$ ,  $j = 1, \dots, n_k(\mu)$ , справедливо неравенство  $\|A_1(\mu)x\| \leq b(k, \mu)\|(A_0(\mu) - \lambda_k(\mu)I)x\|$ ;

з) при каждом  $\mu \in J$  для любых чисел  $z_{k,j}$  справедливо равенство

$$A_1(\mu) \left( \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n_k(\mu)} z_{k,j} y_{(k,j)} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n_k(\mu)} z_{k,j} A_1(\mu) y_{(k,j)},$$

если ряды сходятся в  $H$  по норме.

**Замечание 1.** Если операторы  $A_0(\mu)$  и  $A_1(\mu)$  замкнуты, то, как легко видеть, из выполнимости предположений а) и б) следует выполнимость предположений в) и з).

Введём обозначения, в которых  $k$  фиксировано,  $C$  – множество всех комплексных чисел:

$\mathbf{v}$  – вектор-столбец с координатами  $v_{(1)}, \dots, v_{(n_k(\mu))}$ ,  $v_{(j)} \in H$ ;

$\mathbf{z}$  – вектор-столбец с координатами  $z_1, \dots, z_{n_k(\mu)}$ ,  $z_j \in C$ ;

$\mathbf{z}v$  – вектор-столбец с координатами  $z_1v, \dots, z_{n_k(\mu)}v$ ,  $v \in H$ ;

$T\mathbf{v}$  – вектор-столбец с координатами  $Tv_{(1)}, \dots, Tv_{(n_k(\mu))}$ ,  $v_{(j)} \in D_T$  для скалярного оператора  $T$ ;

$\langle \mathbf{v}, y \rangle$  – вектор-столбец с координатами  $\langle v_{(1)}, y \rangle, \dots, \langle v_{(n_k(\mu))}, y \rangle$  при каждом  $y \in H$ ;

$$\|\mathbf{v}\| = \left( \sum_{j=1}^{n_k(\mu)} \|v_{(j)}\|^2 \right)^{1/2}, \quad |\mathbf{z}| = \left( \sum_{j=1}^{n_k(\mu)} |z_j|^2 \right)^{1/2}, \quad |D| = \left( \sum_{j=1}^{n_k(\mu)} \sum_{q=1}^{n_k(\mu)} |d_{j,q}|^2 \right)^{1/2},$$

если  $D$  – матрица с элементами  $d_{j,q} \in C$ .

**Определение 1.** Квадратная матрица  $\Lambda_k(\mu)$  размерности  $n_k(\mu)$  называется матричным собственным значением оператора  $B(\mu) - \lambda_k(\mu)I$ , если уравнение  $(B(\mu) - \lambda_k(\mu)I)\mathbf{v} = \Lambda_k(\mu)\mathbf{v}$  имеет ненулевое решение  $\mathbf{v}$ .

В настоящей работе (теорема 4 и замечание 4) приведены условия, при которых матричные собственные значения  $\Lambda_k(\mu)$  аналитически зависят от  $\mu$  в некоторой окрестности нуля, причём соответствующие им собственные векторы  $\mathbf{v}_{(k)}(\mu)$  можно выбрать аналитически зависящими от  $\mu$ . Другими словами, обоснованы формулы Шрёдингера

$$\Lambda_k(\mu) = \Lambda_{k,0} + \Lambda_{k,1}\mu + \Lambda_{k,2}\mu^2 + \dots, \quad (4)$$

$$\mathbf{v}_{(k)}(\mu) = \mathbf{v}_{(k,0)} + \mathbf{v}_{(k,1)}\mu + \mathbf{v}_{(k,2)}\mu^2 + \dots, \quad (5)$$

в которых  $\Lambda_{k,j}$ ,  $\mathbf{v}_{(k,j)}$  не зависят от  $\mu$ .

Переход от матричных собственных значений к обычным собственным значениям осуществляется по следующей схеме.

Пусть  $\delta_{k,q}(\mu)$ ,  $q = 1, \dots, m_k(\mu)$ , – все различные собственные значения матрицы  $\Lambda'_k(\mu)$ , транспонированной к матричному собственному значению  $\Lambda_k(\mu)$ , и  $\{\xi_{k,q,j}(\mu), j = 1, \dots, p_{k,q}(\mu)\}$  – система из собственного  $\xi_{k,q,1}(\mu)$ , первого присоединённого  $\xi_{k,q,2}(\mu)$ , второго присоединённого  $\xi_{k,q,3}(\mu)$  и т. д. векторов матрицы  $\Lambda'_k(\mu)$ , соответствующих собственному значению  $\delta_{k,q}(\mu)$ . Тогда цепочка векторов

$$\left\{ h_{(k,q,j)}(\mu) = \sum_{r=1}^{n_k(\mu)} \xi_{k,q,j,r}(\mu) v_{(k,r)}(\mu), j = 1, \dots, p_{k,q}(\mu) \right\} \quad (6)$$

состоит из собственного вектора  $h_{(k,q,1)}(\mu)$ , первого присоединённого элемента  $h_{(k,q,2)}(\mu)$ , второго присоединённого  $h_{(k,q,3)}(\mu)$  и т. д. элементов оператора  $B(\mu)$ , соответствующих собственному значению  $\lambda_k(\mu) + \delta_{k,q}(\mu)$ . Напомним, что  $\xi_{k,q,j,r}(\mu)$ ,  $v_{(k,r)}(\mu)$  – координаты с номером  $r$  соответственно для  $\xi_{k,q,j}(\mu)$ ,  $\mathbf{v}_{(k)}(\mu)$ .

Из формул (6), в частности, следует, что вопрос о справедливости формул Шрёдингера сводится к вопросу о справедливости формул Шрёдингера для возмущений первой ненулевой матрицы  $\Lambda_{k,q}(\mu)$ .

### 1. Существование матричных собственных значений

Всюду в разделе  $k$  фиксировано. В доказательствах утверждений (в отличие от нумеруемых формул) не будем подчеркивать зависимость от  $\mu$  используемых объектов, а в тех случаях, когда не возникает недоразумений, – и от  $k$ . Символ  $0$  будем использовать и для числа  $0$ , и для нулевого вектора, и для нулевой матрицы, и для нулевого элемента, и для нулевого оператора. Из контекста будет понятно, в каком смысле понимается  $0$ . Переменные  $j, k, m, n, q, p$  (как с индексами, так и без них) считаются целыми и неотрицательными (в приложениях они могут быть векторными, но с целыми координатами). Обозначим через  $\mathbf{u}_{(0)}$  вектор-столбец с координатами  $y_{(k,1)}, \dots, y_{(k,n_k(\mu))}$  и положим  $\mathbf{z}_{-1,j} = 0$ .

**Лемма 1.** *Существуют такие абстрактные  $\mathbf{u}_{(p)}(\mu)$  и числовые  $\mathbf{z}_{k,j}(\mu)$  объекты, что при  $p \geq 1$  выполняются равенства*

$$(A_0(\mu) - \lambda_k(\mu)I)\mathbf{u}_{(p)}(\mu) = -A_1(\mu)\mathbf{u}_{(p-1)}(\mu) + \sum_{m=0}^{p-1} \sum_{j=1}^{n_k(\mu)} \mathbf{z}_{m,j}(\mu)u_{(p-1-m,j)}(\mu), \quad (7)$$

$$\langle \mathbf{u}_{(p)}(\mu), y_{(k,j)}(\mu) \rangle = 0, \quad j = 1, \dots, n_k(\mu). \quad (8)$$

**Доказательство.** Имеем, что в (7)  $u_{(p,j)}$  – координата с номером  $j$  вектора  $\mathbf{u}_{(p)}$ . Введём индукционное предположение:

$$\text{при } q = 0, \dots, p-1 \text{ существуют } \mathbf{u}_{(q)}, \quad \mathbf{z}_{q-1,j}, \quad j = 1, \dots, n_k.$$

В силу выбора  $\mathbf{u}_{(0)}$ ,  $\mathbf{z}_{-1,j}$  предположение выполняется при  $p = 1$ . Докажем его справедливость при  $q = p$ . Обозначим правую часть в (7) через  $F_{(p)}$ . Поскольку оператор  $A_0 - \lambda_k I$  нормально разрешим, то уравнение (7) разрешимо тогда и только тогда, когда

$$\langle F_{(p)}, z \rangle = 0 \quad \forall z \in \ker(A_0 - \lambda_k I)^* = \{z : (A_0 - \lambda_k I)^* z = 0\}.$$

В силу того, что ортонормированный базис (2) состоит из собственных элементов оператора  $A_0$ , выполняется равенство

$$\ker(A_0(\mu) - \lambda_k(\mu)I)^* = \ker(A_0(\mu) - \lambda_k(\mu)I).$$

Поэтому уравнение (7) разрешимо тогда и только тогда, когда  $\langle F_{(p)}, y_{(k,j)} \rangle = 0$ ,  $j = 1, \dots, n_k$ . Эти равенства с учётом (8) принимают вид

$$\mathbf{z}_{p-1,j}(\mu) = \langle A_1(\mu)\mathbf{u}_{(p-1)}(\mu), y_{(k,j)}(\mu) \rangle, \quad j = 1, \dots, n_k(\mu). \quad (9)$$

По индукционному предположению  $p \geq 1$ .

При выполнении (9) общее решение уравнения (7) принимает вид  $\mathbf{u} - \sum_{j=1}^{n_k} \mathbf{c}_j y_{(k,j)}$ , где  $\mathbf{u}$  – одно из решений уравнения (7). Поэтому при  $\mathbf{c}_j = \langle \mathbf{u}, y_{(k,j)} \rangle$ ,  $j = 1, \dots, n_k$ , получим решение задачи (7), (8). Справедливость индукционного предположения при  $q = p$ , а значит, и леммы, доказана.  $\square$

**Лемма 2.** Пусть  $\mathbf{u}_{(p)}(\mu)$ ,  $\mathbf{z}_{q,j}(\mu)$  удовлетворяют (7), (8). Тогда при  $q \geq 1$  и некоторых  $f_k(\mu)$  выполняются оценки

$$\| (A_0(\mu) - \lambda_k(\mu)I)\mathbf{u}_{(q)}(\mu) \| \leq g(k, \mu) q^{-2} (f_k(\mu))^{q-1}, \quad (10)$$

в которых  $g(k, \mu) = \| A_1(\mu)\mathbf{u}_{(0)}(\mu) \|$ .

**Доказательство.** Предварительно при  $m \geq 1$  докажем оценки

$$\| \mathbf{u}_{(m)}(\mu) \| \leq a(k, \mu) \| (A_0(\mu) - \lambda_k(\mu)I)\mathbf{u}_{(m)}(\mu) \|, \quad (11)$$

$$\| A_1(\mu)\mathbf{u}_{(m)}(\mu) \| \leq b(k, \mu) \| (A_0(\mu) - \lambda_k(\mu)I)\mathbf{u}_{(m)}(\mu) \|, \quad (12)$$

$$\left( \sum_{j=1}^{n_k(\mu)} |\mathbf{z}_{m,j}(\mu)|^2 \right)^{1/2} \leq b(k, \mu) \| (A_0(\mu) - \lambda_k(\mu)I)\mathbf{u}_{(m)}(\mu) \|, \quad (13)$$

$$\| -A_1(\mu)\mathbf{u}_{(m)}(\mu) + \sum_{j=1}^{n_k(\mu)} \mathbf{z}_{m,j}(\mu) y_{(k,j)}(\mu) \| \leq b(k, \mu) \| (A_0(\mu) - \lambda_k(\mu)I)\mathbf{u}_{(m)}(\mu) \|. \quad (14)$$

Напомним, что в доказательствах (в отличие от нумеруемых формул) не подчёркиваем зависимость от  $\mu$ , и, если нет недоразумений, то и от  $k$ . Так как выполняется (8) и (2) – ортонормированный базис, то

$$\begin{aligned} \| \mathbf{u}_{(m)} \|^2 &= \sum_{q \neq k} \sum_{j=1}^{n_k} |c_{m,q,j}|^2 \leq \\ &\leq \left( \max_{q \neq k} |\lambda_q - \lambda_k|^{-2} \right) \sum_{q \neq k} \sum_{j=1}^{n_k} (|c_{m,q,j}|^2 |\lambda_q - \lambda_k|^2) = \\ &= a^2 \| (A_0 - \lambda_k I)\mathbf{u}_{(m)} \|^2. \end{aligned}$$

Следовательно, выполняется (11). В силу подчинённости оператора  $A_1$  оператору  $A_0 - \lambda_k I$  и оценок (8) выполняются оценки (12).

Из равенств (9) следует, что при  $m \geq 1$  совпадают коэффициенты Фурье с номерами  $q \neq k$  (по последовательности (2)) у элементов

$$-A_1\mathbf{u}_{(m)} + \sum_{j=1}^{n_k} \mathbf{z}_{m,j} y_{(k,j)}, \quad -A_1\mathbf{u}_{(m)},$$

причём коэффициент Фурье с номером  $k$  у первого элемента равен нулю (в силу (9)). Тогда

$$\| -A_1(\mu)\mathbf{u}_{(m)}(\mu) + \sum_{j=1}^{n_k(\mu)} \mathbf{z}_{m,j}(\mu) y_{(k,j)}(\mu) \| \leq \| A_1(\mu)\mathbf{u}_{(m)}(\mu) \|. \quad (15)$$

С учётом (12) получим (14).

Чтобы доказать (13), заметим, что в силу (9)

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n_k(\mu)} |\mathbf{z}_{m,j}(\mu)|^2 &= \sum_{j=1}^{n_k(\mu)} |\langle A_1(\mu)\mathbf{u}_{(m)}(\mu), y_{(k,j)}(\mu) \rangle|^2 \leq \\ &\leq \sum_{q \geq 1} \sum_{j=1}^{n_k(\mu)} |\langle A_1\mathbf{u}_{(m)}(\mu), y_{(q,j)}(\mu) \rangle|^2 = \| A_1(\mu)\mathbf{u}_{(m)}(\mu) \|^2. \quad (16) \end{aligned}$$

Здесь учтено, что (2) – ортонормированный базис. Отсюда и из (12) следует (13). Оценки (11)–(14) доказаны. Легко видеть, что оценки (15), (16) выполняются и при  $m = 0$ .

Вводим индукционное предположение: *оценки (10) выполняются при  $q = 0, \dots, p-1$ .*

Справедливость этих оценок при  $q = 1$  следует из (7) и (15). Докажем их справедливость при  $q = p$  и оценим  $f = f_{(k)}(\mu)$ . Итак,  $p \geq 2$ , и в силу (7)

$$\begin{aligned} \|(A_0 - \lambda_k I)\mathbf{u}_{(p)}\| &\leq \| -A_1 \mathbf{u}_{(p-1)} + \sum_{j=1}^{n_k} \mathbf{z}_{p-1,j} y_{(k,j)} \| + \\ &+ \left\| \sum_{j=1}^{n_k} \mathbf{z}_{0,j} u_{(p-1,j)} \right\| + \left\| \sum_{m=1}^{p-2} \sum_{j=1}^{n_k} \mathbf{z}_{m,j} u_{(p-1-m,j)} \right\|. \end{aligned}$$

Оценим каждую из трех групп слагаемых  $S_1, S_2, S_3$ . Отметим, что третье слагаемое при  $p = 2$  отсутствует. В (14) оценено  $S_1$ . В силу неравенства Коши–Буняковского

$$S_2 \leq \left( \sum_{j=1}^{n_k} |\mathbf{z}_{0,j}|^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{j=1}^{n_k} \|u_{(p-1,j)}\|^2 \right)^{1/2} = \left( \sum_{j=1}^{n_k} |\mathbf{z}_{0,j}|^2 \right)^{1/2} \|\mathbf{u}_{(p-1)}\|.$$

Отсюда и из (11), (16) следует, что

$$S_2 \leq |\Lambda_{k,0}| a \|(A_0 - \lambda_k I)\mathbf{u}_{(p-1)}\|,$$

где  $\Lambda_{k,m}$  – матрица, столбцы которой  $\mathbf{z}_{m,j}$ ,  $j = 1, \dots, n_k$ , зависят от  $k$ . При  $p \geq 3$  из (9), (12), (16) следуют неравенства

$$\begin{aligned} S_3 &\leq \sum_{m=1}^{p-2} \left( \sum_{j=1}^{n_k} |\mathbf{z}_{m,j}|^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{j=1}^{n_k} \|u_{(p-1-m,j)}\|^2 \right)^{1/2} \leq \sum_{m=1}^{p-2} \|A_1 \mathbf{u}_{(m)}\| \|\mathbf{u}_{(p-1-m)}\| \leq \\ &\leq b a \sum_{m=1}^{p-2} \|(A_0 - \lambda_k I)\mathbf{u}_{(m)}\| \|(A_0 - \lambda_k I)\mathbf{u}_{(p-1-m)}\|. \end{aligned}$$

Поэтому в силу индукционных предположений

$$S_1 \leq b g f^{p-2} (p-1)^{-2}; \quad S_2 \leq g |\Lambda_{k,0}| a f^{p-2} (p-1)^{-2};$$

$$S_3 \leq b a g^2 f^{p-3} \left( \sum_{m=1}^{p-2} m^{-2} (p-1-m)^{-2} \right).$$

Заметим, что  $S_3 = 0$  при  $p = 2$ . Очевидно, что  $p^2 \sum_{m=1}^{p-2} m^{-2} (p-1-m)^{-2} \leq c$  при всех  $p \geq 3$ , и постоянная  $c$  не зависит от  $p$ .

Таким образом, доказано, что

$$\|(A_0 - \lambda_k I)\mathbf{u}_{(p)}\| \leq ((p/(p-1))^2 (b + |\Lambda_{k,0}| a) + b a g c f^{-1}) g p^{-2} f^{p-2}.$$

Поэтому индукционное предположение выполнится и при  $q = p$ , если

$$(p/(p-1))^2 (b(k, \mu) + a(k, \mu)|\Lambda_{k,0}(\mu)|) + b(k, \mu) a(k, \mu) g(k, \mu) c (f_k(\mu))^{-1} \leq f_k(\mu). \quad (17)$$

На этом доказательство леммы 2 закончено.  $\square$

**Замечание 2.** Если

$$4 b(k, \mu) + 4 a(k, \mu) |\Lambda_{k,0}| + b(k, \mu) a(k, \mu) g(k, \mu) c \leq 1, \quad (18)$$

то оценки (17) выполняются при некотором  $f_k(\mu) \leq 1$ ; более того, если левая часть в (18) стремится к нулю для некоторой подпоследовательности  $\{k_n\}$ , стремящейся к бесконечности, то  $f_k(\mu)$  можно выбрать так, что  $f_{k_n}(\mu) \rightarrow 0$ .

**Замечание 3.** Если  $\mathbf{u}_{(p)}(\mu)$ ,  $\mathbf{z}_{p,j}(\mu)$ ,  $f_k(\mu)$  удовлетворяют (7)–(9), (17), то при выполнении условия

$$\sum_{q=1}^{\infty} (f_k(\mu))^{q-1} q^{-2} < +\infty$$

ряды

$$\sum_{p=0}^{\infty} \mathbf{u}_{(p)}(\mu), \quad \sum_{p=0}^{\infty} (A_0(\mu) - \lambda_k(\mu)I) \mathbf{u}_{(p)}(\mu), \quad \sum_{p=1}^{\infty} A_1(\mu) \mathbf{u}_{(p-1)}(\mu), \quad \sum_{p=0}^{\infty} \mathbf{z}_{p,j}(\mu) \quad (19)$$

сходятся, причём первые три ряда – по норме, а четвертый – абсолютно.

Пусть ряды (19) сходятся, и  $\mathbf{v}_{(k)}(\mu)$  – сумма первого ряда,  $\lambda_{k,j}(\mu)$  – сумма четвёртого ряда. Тогда

$$(A_0(\mu) - \lambda_k(\mu)I) \mathbf{v}_{(k)}(\mu) = -A_1(\mu) \mathbf{v}_{(k)}(\mu) + \sum_{j=1}^{n_k(\mu)} \lambda_{k,j}(\mu) v_{(k,j)}(\mu), \quad (20)$$

где  $v_{(k,j)}(\mu)$  – координата с номером  $j$  вектора  $\mathbf{v}_{(k)}(\mu)$ .

Введём матрицу  $\Lambda_k(\mu)$ , первый столбец которой образует вектор, совпадающий с  $\lambda_{k,1}(\mu)$ , второй – с  $\lambda_{k,2}(\mu)$  и т. д. Тогда равенства (20) принимают вид

$$(A_0(\mu) - \lambda_k(\mu)I + A_1(\mu)) \mathbf{v}_{(k)}(\mu) = \Lambda_k(\mu) \mathbf{v}_{(k)}(\mu), \quad (21)$$

причём  $\langle \mathbf{v}_{(k)}(\mu), \mathbf{y}_{(k,j)}(\mu) \rangle \neq 0$ . Следовательно, доказана

**Теорема 1.** Пусть  $\mathbf{u}_{(p)}(\mu)$ ,  $\mathbf{z}_{p,j}(\mu)$  определяются равенствами (7)–(9), выполняются оценки (17), ряды (19) сходятся,  $\mathbf{v}_{(k)}(\mu)$ ,  $\lambda_{k,j}(\mu)$  – суммы соответственно первого и последнего рядов в (19). Тогда  $\Lambda_k(\mu)$  – матричное собственное значение оператора  $A_0(\mu) + A_1(\mu) - \lambda_k(\mu)I$ ,  $\mathbf{v}_{(k)}(\mu)$  – соответствующий собственный элемент.

Зная матричные собственные значения, по формулам (6) вычислим собственные и присоединённые элементы оператора  $B(\mu)$ . Ответим на вопрос: все ли собственные значения оператора  $B(\mu)$  можно вычислить по (6)?

Пусть при каждом  $\mu \in J$  и каждом  $k$  ряды (19) сходятся. По формулам (4), (5) вычислим множество собственных значений оператора  $B(\mu)$ :

$$\{\lambda_k(\mu) + \delta_{q,k}(\mu), q = 1, \dots, m_k(\mu), k = 1, 2, \dots\} \quad (22)$$

и соответствующую им последовательность собственных и присоединённых элементов

$$\{h_{(k,q,j)}(\mu), j = 1, \dots, p_{k,q}(\mu), q = 1, \dots, m_k(\mu), k = 1, 2, \dots\}. \quad (23)$$

**Теорема 2.** Если при  $\mu \in J$  система (23) является базисом в  $H$  и оператор  $B(\mu)$  имеет хотя бы одно регулярное значение, то каждое собственное значение оператора  $B(\mu)$  принадлежит множеству (22).

**Доказательство.** С целью упрощений в записях формул не подчёркиваем зависимость от  $\mu$  используемых в доказательстве объектов. Итак,  $\beta$  – собственное значение оператора  $B$ ,  $v$  – соответствующий собственный элемент и  $\gamma$  – регулярное значение оператора  $B$ . Так как (23) – базис в  $H$ , то

$$v = \sum' (v_{k,q,1}h_{(k,q,1)} + \dots + v_{k,q,s}h_{(k,q,s)}). \quad (24)$$

При этом символ  $\sum'$  указывает на то, что суммирование производится только по тем  $k, q$ , для которых сумма, заключенная в скобки, отлична от нуля. Число  $s$  выбрано так, чтобы  $v_{k,q,s} \neq 0$ ,  $v_{k,q,j} = 0$  при  $j > s$ .

В силу непрерывности  $(B - \gamma I)^{-1}$  имеем

$$(B - \gamma I)^{-1}v = \sum' (v_{k,q,1}(B - \gamma I)^{-1}h_{(k,q,1)} + \dots + v_{k,q,s}(B - \gamma I)^{-1}h_{(k,q,s)}).$$

Из равенств  $(B - \beta_{k,q}I)h_{(k,q,1)} = 0$ ,  $(B - \beta_{k,q}I)h_{(k,q,j)} = h_{(k,q,j-1)}$  при  $j > 1$  следует, что

$$\begin{aligned} (B - \gamma I)^{-1}h_{(k,q,1)} &= (\beta_{k,q} - \gamma)^{-1}h_{(k,q,1)}, \quad (B - \gamma I)^{-1}h_{(k,q,j)} = \\ &= (\beta_{k,q} - \gamma)^{-1}h_{(k,q,j)} + \phi_{k,q,j-1}h_{(k,q,j-1)} + \dots + \phi_{k,q,1}h_{(k,q,1)}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$(B - \gamma I)^{-1}v = \sum' (t_{k,q,1}h_{(k,q,1)} + \dots + t_{k,q,s-1}h_{(k,q,s-1)} + (\beta_{k,q} - \gamma)^{-1}v_{k,q,s}). \quad (25)$$

С другой стороны,  $(B - \gamma I)^{-1}v = (\beta - \gamma)^{-1}v$ . Отсюда, из (24), (25) и базисности (23) следует равенство  $(\beta_{k,q} - \gamma)^{-1}v_{k,q,s} = (\beta - \gamma)^{-1}v_{k,q,s}$ , в котором  $v_{k,q,s} \neq 0$ . Поэтому  $\beta = \beta_{k,q}$ . Теорема доказана.  $\square$

**Теорема 3.** Пусть  $f_k(\mu) \leq 1$  и

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\psi(k, \mu))^2 < 1, \quad (26)$$

где  $\psi(k, \mu) = a(k, \mu)b(k, \mu) \sum_{p=1}^{\infty} (f_k(\mu))^{p-1}p^{-2}$ . Тогда (23) является в  $H$  базисом

Рисса со скобками, причём если у  $B(\mu)$  имеется регулярное значение, то множество всех собственных значений оператора  $B(\mu)$  совпадает с (22).

**Доказательство.** В силу (10), (11), (19) справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}_{(k)}(\mu) - \mathbf{y}_{(k)}(\mu)\| &\leq \sum_{p=1}^{\infty} \|\mathbf{u}_{(k,p)}(\mu)\| \leq a(k, \mu) \sum_{p=1}^{\infty} \|(A_0(\mu) - \lambda_k(\mu)I)\mathbf{u}_{(k,p)}(\mu)\| \leq \\ &\leq a(k, \mu)g(k, \mu) \sum_{p=1}^{\infty} (f_k(\mu))^{p-1}p^{-2} = \psi(k, \mu). \end{aligned}$$

Отсюда и из неравенства (26) следует, что  $\sum_{k=1}^{\infty} \|v_{(k,j)}(\mu) - y_{(k,j)}\|^2 < 1$ . Значит, система  $\{v_{(k,j)}, j = 1, \dots, n_k(\mu), k = 1, 2, \dots\}$  является квадратично близкой к ортонормированному базису  $\{y_{(k,j)}(\mu), j = 1, \dots, n_k(\mu), k = 1, 2, \dots\}$ . По теореме



Н.К. Бари [6] она является базисом Рисса в  $H$ . Поскольку  $\mathbf{h}_{(k)}(\mu) = G(k, \mu)\mathbf{v}_{(k)}(\mu)$ , а матрица  $G(k, \mu)$  обратима (ибо её столбцы есть линейно независимые собственные и присоединённые векторы матрицы  $\Lambda'_k(\mu)$ ), то система элементов (23) является в  $H$  базисом Рисса со скобками. Последнее утверждение теоремы следует из теоремы 2.  $\square$

В заключении этого раздела ответим на вопросы:

- 1) справедливы ли формулы Шрёдингера для вычисленных матричных собственных значений  $\Lambda_k(\mu)$  и собственных векторов  $\mathbf{v}_{(k)}(\mu)$ ?
- 2) какие собственные значения оператора  $B(\mu)$  аналитически зависят от  $\mu$ ?

**Теорема 4.** Пусть при некоторых  $k, \mu_k > 0$ , всех  $\mu \in J_k = \{|\mu| < \mu_k\}$  выполняются оценки (26), оператор  $A_1(\mu)$  и функции  $y_{(k,j)}(\mu), (\lambda_q(\mu) - \lambda_k(\mu))^{-1}$ , где  $q \neq k$ , аналитически зависят от  $\mu \in J_k$ . Тогда для  $\Lambda_k(\mu), \mathbf{v}_{(k)}(\mu)$  при  $\mu \in J_k$  выполняются формулы Шрёдингера.

**Доказательство.** Аналитичность в  $J_k$  оператора  $A_1(\mu)$  означает, что из аналитичности в  $J_k$  элемента  $x(\mu) \in D_{A_0(\mu)}$  следует аналитичность в  $J_k$  элемента  $A_1(\mu)x(\mu)$ . Так как ряды (19) при  $\mu \in J_k$  сходятся по норме, то по теореме Вейерштрасса о пределе последовательности аналитических функций достаточно доказать, что  $\mathbf{u}_{(p,k)}(\mu), \mathbf{z}_{p,k,j}(\mu)$ , определяемые в (7)–(9), аналитически зависят от  $\mu \in J_k$ . Воспользуемся методом математической индукции. При  $p = 0$  имеем  $\mathbf{u}_{(p,k)}(\mu) = \mathbf{y}_{(k)}(\mu), \mathbf{z}_{p-1,k,j}(\mu) = 0$ , то есть аналитически зависят от  $\mu \in J_k$ . Предполагаем, что при всех  $q = 0, \dots, p-1$  объекты  $\mathbf{u}_{(q,k)}(\mu), \mathbf{z}_{q-1,k,j}(\mu)$  аналитически зависят от  $\mu \in J_k$ . Тогда в силу (9)  $\mathbf{z}_{p-1,k,j}(\mu)$  аналитически зависит от  $\mu \in J_k$ , поэтому этим же свойством обладает и правая часть  $F_{(p)}(\mu)$  в равенстве (7). При этом решение задачи (7), (8) имеет вид

$$\mathbf{u}_{(p,k)}(\mu) = \sum_{j,m \neq k} \langle F_{(p)}(\mu), y_{(m,j)}(\mu) \rangle (\lambda_m(\mu) - \lambda_k(\mu))^{-1} y_{(m,j)}(\mu),$$

причём ряд сходится по норме, и каждое слагаемое аналитически зависит от  $\mu \in J_k$ . В этом случае по теореме Вейерштрасса его сумма также обладает этим свойством. Теорема доказана.  $\square$

**Замечание 4.** При выполнении оценок  $f_k(\mu) \leq 1$  из независимости от  $\mu$  оператора  $A_0(\mu)$  и аналитичности по  $\mu$  в окрестности нуля оператора  $A_1(\mu)$  следует выполнимость предположений теоремы 4.

## 2. Приложение к граничным задачам для линейных дифференциальных уравнений скалярного аргумента

Речь пойдёт о линейном дифференциальном уравнении с отклоняющимся аргументом

$$\sum_{j=0}^{N_1} \sum_{r=1}^{N_2} C_{j,r}(\mu) y^{(j)}(t + T_{j,r}(\mu)) + \sum_{j=0}^{N_3} \sum_{r=1}^{N_4} C_{j,r,1}(t, \mu) y^{(j)}(T_{j,r,1}(t, \mu)) = \lambda y(t) \quad t \in Q, \quad (27)$$

в котором  $N_3 \leq N_1 - 1$ ,  $C_{j,r}(\mu)$  не зависят от  $t$ ,  $\mu \in J$ ,  $y^{(j)}(t)$  – производная порядка  $j$  функции  $y(t)$ ,  $T_{j,r}(\mu)$  – вещественные числа,  $T_{j,r,1}(t, \mu)$  – вещественнозначные функции,  $C_{j,r,1}(t, \mu)$  – суммируемые в каждом компакте функции, причём  $C_{N_1-1,r,1}(t, \mu)$  ограничены в существенном. Считаем, что все рассматриваемые функции измеримы по Лебегу. Обозначим через  $Q_T$  объединение при  $j \neq 0$  множеств  $\{t + T_{j,r}(\mu), t \in Q\}$ ,  $\{T_{j,r,1}(t, \mu), t \in Q\}$ , через  $Q_{T_0}$  – объединение множеств  $\{t + T_{0,r}(\mu), t \in Q\}$ ,  $\{T_{0,r,1}(t, \mu), t \in Q\}$ ,  $Q$ .

**Определение 2.** Функция  $y(t)$ ,  $t \in Q_T \cup Q_{T_0}$ , для которой  $y^{(j)}(t)$ ,  $j = 0, \dots, (N_1 - 1)$ , абсолютно непрерывны в каждом компакте из  $Q_T$ , называется решением уравнения (27), если при почти всех  $t \in Q$  выполняется (27).

**Определение 3.** Решение  $y(t)$  уравнения (27) называется  $2\pi$ -периодическим, если выполняются равенства

$$y^{(j)}(t) = \sum_{|k|=0}^{\infty} y_k (\exp(ikt))^{(j)}, \quad t \in R, \quad j = 0, \dots, N_1, \quad (28)$$

в которых  $y_k$  не зависят от  $t$ , и ряды сходятся в  $L^2(2\pi)$  по норме.

Здесь и далее  $L^2(2\pi)$  – множество всех  $2\pi$ -периодических функций  $h(t)$ , удовлетворяющих условию  $\|h(t)\| = \left( \int_0^{2\pi} |h(t)|^2 dt \right)^{1/2} < +\infty$ .

**Определение 4.** Нечётное  $2\pi$ -периодическое решение уравнения (27) называется решением Штурма–Лиувилля.

**Определение 5.** Чётное  $2\pi$ -периодическое решение уравнения (27) называется решением Неймана.

**Определение 6.** Решение  $y(t)$  уравнения (27) называется анти- $2\pi$ -периодическим, если выполняются равенства

$$y^{(j)}(t) = \sum_{|k|=0}^{\infty} y_k (\exp(it(k + 1/2)))^{(j)}, \quad t \in R, \quad j = 0, \dots, N_1,$$

в которых  $y_k$  не зависят от  $t$ , и ряды сходятся в  $L^2(2\pi)$  по норме.

Очевидно, что для решения Штурма–Лиувилля выполняются равенства

$$y^{(j)}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k (\sin(kt))^{(j)}, \quad t \in R, \quad j = 0, \dots, N_1.$$

Аналогично для решения Неймана имеем равенства

$$y^{(j)}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k (\cos(kt))^{(j)}, \quad t \in R, \quad j = 0, \dots, N_1.$$

Сказанное указывает на то, что наибольшее внимание следует уделить  $2\pi$ -периодической задаче. Изучая эту задачу, считаем, что множество  $Q$  содержит интервал длины  $2\pi$ .

Удобно обозначить через  $AC^n(2\pi)$  множество всех  $2\pi$ -периодических функций  $x(t)$ , для которых производные  $x^{(j)}(t)$ ,  $j = 0, \dots, n - 1$ , существуют, абсолютно непрерывны в каждом компакте из  $R$  и  $x^{(n)}(t) \in L^2(2\pi)$ . Очевидно, что условия (28) равносильны включению  $y(t) \in AC^{N_1}(2\pi)$ .

Чтобы воспользоваться абстрактной схемой, положим  $H = L^2(2\pi)$ , а также при  $z(t) \in AC^{N_1}(2\pi)$

$$A_0(\mu)z(t) = \sum_{|p|=0}^{\infty} z_p \left( \sum_{j=0}^{N_1} \sum_{r=1}^{N_2} C_{j,r}(\mu) \exp(ipT_{j,r}(\mu)) (ip)^j \right) \exp(ip t), \quad (29)$$

$$A_1(\mu)z(t) = \sum_{|p|=0}^{\infty} z_p \left( \sum_{j=0}^{N_3} \sum_{r=1}^{N_4} C_{j,r,1}(t, \mu) \exp(ipT_{j,r,1}(t, \mu)) (ip)^j \right). \quad (30)$$

Сходимость в  $H$  по норме рядов (29), (30) легко следует из сделанных предположений и из равенств (28). Коэффициенты Фурье суммы ряда (29) обозначим через  $\gamma_p(\mu)$ . Тогда множество всех собственных значений оператора  $A_0(\mu)$  совпадает с множеством  $\{\gamma_p(\mu), p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ . Фиксируем  $\lambda_1(\mu), \lambda_2(\mu), \dots$  – все различные элементы данного множества. Это и есть все различные собственные значения оператора  $A_0(\mu)$ . Кратность  $n_k(\mu)$  собственного значения  $\lambda_k(\mu)$  равна количеству целочисленных решений  $p$  уравнения

$$\gamma_p(\mu) = \lambda_k(\mu). \quad (31)$$

Очевидно, она конечна, если у уравнения  $\sum_{r=1}^{N_2} C_{N_1,r}(\mu) \exp(ipT_{N_1,r}(\mu)) = 0$  конечное множество целочисленных корней  $p$ . Всюду считаем, что  $n_k(\mu) < +\infty$ . Целочисленные корни  $k_j$  уравнения (31) перепишем в виде  $(k, j)$ .

Итак,  $\{(k, j), j = 1, \dots, n_k(\mu)\}$  – множество всех целочисленных корней уравнения (31). Тогда  $y_{(k,j)}(t) = (\sqrt{2\pi})^{-1} \exp(ik_j t)$  – собственные элементы оператора  $A_0(\mu)$ , соответствующие собственному значению  $\lambda_k(\mu)$ .

Далее под записью  $\sum^{(k)}$  понимаем запись  $\sum_{q=1, q \neq k}^{\infty} \sum_{j=1}^{n_q}(\mu)$ .

К сожалению, без дополнительных предположений обойтись невозможно. Объяснение этому – простое: из неравенства

$$\sum^{(k)} |z_{q_j}(\lambda_q(\mu) - \lambda_k(\mu))^{-1}|^2 < +\infty \quad (32)$$

в общем случае не следуют неравенства

$$\sum^{(k)} |z_{q_j}(iq_j)^m|^2 < +\infty, \quad m = 0, \dots, N_3$$

даже тогда, когда выполняются равенства

$$\langle z(t), y_{(k,j)}(\mu) \rangle = 0, \quad j = 1, \dots, n_k(\mu). \quad (33)$$

Напомним, что  $q_j$  – целочисленное решение уравнения  $\gamma_p(\mu) = \lambda_q(\mu)$ . Другими словами, если  $z(t)$  принадлежит области определения оператора  $A_0(\mu) - \lambda_k(\mu)I$ , то необязательно  $z(t) \in AC^{N_3}(2\pi)$ . Но без этого включения непонятен смысл записи  $A_1(\mu)z(t)$ . Поэтому предполагаем, что при  $m \leq N_3$  и  $q \neq k$  выполняются оценки

$$|q_j^m (\lambda_q(\mu) - \lambda_k(\mu))^{-1}| \leq B_{m,k}(\mu), \quad j = 1, \dots, n_q(\mu). \quad (34)$$

В частности, при  $m = 0$  вычисляем  $a(k, \mu)$ .

**Замечание 5.** В тех случаях, когда  $N_1 \geq 2$ ,

$$\gamma_p(\mu) = (ip)^{N_1} + \sum_{m=0}^{N_1-2} \sum_{r=1}^{N_2} C_{m,r}(\mu) (ip)^m \exp(ipT_{m,r}(\mu)),$$

оценки (34) выполняются автоматически, более того, имеет место асимптотика  $B_{m,k}(\mu) = O(k^{m-N_1})$ ; если все числа  $\lambda_k(\mu)$  – целые, то  $a(k, \mu) \leq 1$ .

Заметим, что область определения оператора  $A_0(\mu) - \lambda_k(\mu)I$  состоит из всех тех  $z(t) \in L^2(2\pi)$ , для которых выполняются оценки (32).

Из предположений относительно коэффициентов и отклонений аргумента для уравнения (27) следует, что при  $m = 0, \dots, N_3$ ,  $w(t) \in AC^{N_1}(2\pi)$  выполняются оценки

$$\|C_{m,r,1}(t, \mu) w^{(m)}(T_{m,r,1}(t, \mu))\| \leq B_{m,r,1}(\mu) \|w^{(m)}(t)\|. \quad (35)$$

В силу (34) в случае (33)

$$\|z^{(m)}(t)\| \leq B_{m,k}(\mu) \|(A_0(\mu) - \lambda_k(\mu)I)z(t)\|. \quad (36)$$

Из неравенств (32)–(36) легко следует, что

$$\|C_{m,r,1}(t, \mu) z^{(m)}(T_{m,r,1}(t, \mu))\| \leq b_{m,k,1}(\mu) \|(A_0(\mu) - \lambda_k(\mu)I)z(t)\|,$$

если  $z(t)$  удовлетворяет условиям (33) и  $m \leq N_3$ . В результате имеем  $b(k, \mu) = b_{0,k,1}(\mu) + \dots + b_{N_3,k,1}(\mu)$ , причём в силу замечания 5  $b(k, \mu) = O(k^{N_3+1-N_1})$ , если  $B_{m,k}(\mu) = O(k^{m-N_1})$ .

Величина  $g(k, \mu)$  равна

$$\begin{aligned} \|A_1(\mu) \mathbf{y}_{(k)}(\mu)\| &= \left( \sum_{j=1}^{n_k(\mu)} \|A_1(\mu) y_{(k,j)}(\mu)\|^2 \right)^{1/2} = \\ &= \left( \sum_{j=1}^{n_k(\mu)} \left\| \sum_{m=0}^{N_3} \sum_{r=1}^{N_4} C_{m,r,1}(t, \mu) (ik_j)^m \exp(ik_j T_{m,r,1}(t, \mu)) \right\|^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

с учётом того, что записи  $(k, j)$ ,  $k_j$  означают одно и то же. Очевидно, что оценки (31) гарантируют нормальную разрешимость оператора  $A_0(\mu) - \lambda_k(\mu)I$ .

Зная  $a(k, \mu)$ ,  $g(k, \mu)$ ,  $b(k, \mu)$ , из неравенства (17) находим  $f_k(\mu)$  – величину, используемую в (10). В силу замечания 5  $f_k(\mu) \rightarrow 0$  при  $|k| \rightarrow +\infty$ , если  $N_1 > 1$ ,  $N_3 \leq N_1 - 2$ ,  $C_{N_1, j_0}(\mu) \neq 0$ ,  $T_{N_1, j_0}(\mu) = 0$ ,  $C_{N_1, j}(\mu) = 0$  при  $j \neq j_0$ .

Таким образом, к изучаемой  $2\pi$ -периодической задаче применимы полученные выше результаты (теоремы 1–4), связанные с существованием и нахождением собственных значений.

Следующим шагом ответим на вопрос: *когда к изучаемой задаче применимы формулы Шрёдингера?*

Очевидно, что в случае  $f_k(\mu) \leq 1$  при некотором  $k$  и дополнительных предположениях об аналитической зависимости от  $\mu \in J_k$  всех функций  $C_{m,j,1}(t, \mu)$ ,  $T_{m,j,1}(t, \mu)$ ,  $(\lambda_q(\mu) - \lambda_k(\mu))^{-1}$  при  $q \neq k$  выполняются предположения теоремы 4. Это означает справедливость формул Шрёдингера. При этом следует отметить, что при таких  $k$  для матричного собственного значения  $\Lambda_k(\mu)$  выполняется равенство

$$\Lambda_k(\mu) = \Lambda_{k,0}(\mu) + \sum_{m=1}^{\infty} \mu^m W_{m,k}, \text{ где } W_{m,k} \text{ не зависят от } \mu, \text{ причём}$$

$$\sqrt{2\pi} \Lambda_{k,0}(\mu) = \begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_{1,1}(\mu), \dots, \tilde{\lambda}_{1, n_k(\mu)}(\mu) \\ \dots \\ \tilde{\lambda}_{n_k(\mu), 1}(\mu), \dots, \tilde{\lambda}_{n_k(\mu), n_k(\mu)}(\mu) \end{pmatrix},$$

где

$$\tilde{\lambda}_{j,r}(\mu) = \int_0^{2\pi} (A_1(\mu) \exp(ik_j t)) \exp(-ik_r t) dt.$$

Из теоремы 4 следует, что если при некотором  $k$  собственные значения матрицы  $\Lambda_k(\mu)$  аналитически зависят от  $\mu$ , то и собственные значения  $2\pi$ -периодической задачи для уравнения (27) аналитически зависят от  $\mu$ , при этом соответствующие собственные функции рассматриваемой задачи можно выбрать аналитически зависящими от  $\mu$ .

**Замечание 6.** Оператор  $A_0(\mu)$  мы определили с помощью равенств (29), хотя можно его выбрать иначе, например,

$$A_0(\mu)z = \sum_{|p|=0}^{\infty} z_p \left( \sum_{j \in Q_1} \sum_{r \in Q_2} C_{j,r}(\mu) (ip)^j \exp(ipT_{j,r}(\mu)) \right) \exp(ip t),$$

где  $Q_j$  – подмножества множеств  $\{0, \dots, N_j\}$ ,  $j = 1, 2$ . Выбирать  $A_0(\mu)$  следует так, чтобы облегчить проверку условий теорем 1–4.

**Замечание 7.** Если  $N_1 > 1$  – чётное число и  $y_{(k,j)}(t, \mu) = (\sqrt{\pi})^{-1} \sin(kt)$ , то все сказанное о  $2\pi$ -периодической задаче с естественными изменениями переносится на задачу Штурма–Лиувилля, а в случае  $y_{(k,j)}(t, \mu) = (\sqrt{\pi})^{-1} \cos(kt)$  – и на задачу Неймана, причём при дополнительных предположениях  $C_{N_1-1,r}(\mu) = 0$ ,  $C_{N_1-1,r}(t, \mu) = 0$  в качестве оператора  $A_0(\mu)$  следует взять оператор, определяемый равенствами

$$A_0(\mu)z(t) = \sum_{k=1}^{\infty} z_k (ik)^{N_1} \sin(kt)$$

для задачи Штурма–Лиувилля,

$$A_0(\mu)z(t) = \sum_{k=0}^{\infty} z_k (ik)^{N_1} \cos(kt)$$

для задачи Неймана.

При таком выборе при всех  $k$  выполняются равенства  $n_k(\mu) = 1$ .

### 3. Задача Чебышёва–Эрмита для дифференциальных уравнений с отклоняющимися аргументами

Речь пойдёт о задаче во всем пространстве  $R^n$  для уравнения

$$P(\mu, t, D)z(t) \equiv P_1(\mu, t, D)z(t) + P_2(\mu, t, D)z(t) = \lambda z(t), \quad t \in R^n, \quad (37)$$

в которой

$$P_1(\mu, t, D)z(t) \equiv \sum_{\alpha \in Q_1} C_{\alpha}(\mu) l^{\alpha} z(t);$$

$$P_2(\mu, t, D)z(t) \equiv \sum_{\alpha \in Q_2} C_{\alpha,r}(\mu, t) z^{(\alpha)}(T_{\alpha,r}(\mu, t));$$

$Q_1, Q_2$  – конечные множества мультииндексов  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ,  $C_{\alpha}(\mu)$  не зависят от  $t = (t_1, \dots, t_n)$ ;

$$l^{\alpha} z(t) \equiv \left( \prod_{j=1}^n l_j^{\alpha_j} \right) z(t), \quad l_j z(t) \equiv -(z(t))_{t_j}^{(2)} + t_j^2 z(t);$$

функции  $C_{\alpha,r}(\mu, t)$ ,  $T_{\alpha,r}(\mu, t)$  измеримы по Лебегу, причём  $T_{\alpha,r}(\mu, t)$  – вещественные.

Известно [7, с. 401], что оператор  $l_j$  имеет в  $L^2(R)$  собственные значения  $\nu_m = 2m + 1$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ , которым соответствуют собственные функции Чебышева–Эрмита  $z_{(m)}(t_j)$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ , образующие ортонормированный базис в  $L^2(R)$ .

Чтобы воспользоваться абстрактной схемой, обозначим

$$k = (k_1, \dots, k_n), \quad z_{(k)}(t) = \prod_{j=1}^n z_{(k_j)}(t_j), \quad \nu_k = (\nu_{k_1}, \dots, \nu_{k_n}), \quad \nu_k^\alpha = \prod_{j=1}^n \nu_{k_j}^{\alpha_j},$$

$$A_0(\mu)y(t) = \sum_{|k|=0}^{\infty} P_1(\mu, t, D)(y_k z_{(k)}(t)), \quad (38)$$

$$A_1(\mu)y(t) = \sum_{|k|=0}^{\infty} P_2(\mu, t, D)(y_k z_{(k)}(t)). \quad (39)$$

В выписанных равенствах

$$y(t) = \sum_{|k|=0}^{\infty} y_k z_{(k)}(t) \in H = L^2(R^n). \quad (40)$$

Области определений  $D_{A_0(\mu)}$ ,  $D_{A_1(\mu)}$  соответственно операторов  $A_0(\mu)$ ,  $A_1(\mu)$  состоят из всех тех функций (40), при которых соответствующие ряды (38), (39) сходятся по норме в  $H$ .

Очевидно, что множество  $\sigma(\mu)$  всех собственных значений оператора  $A_0(\mu)$  имеет вид

$$\left\{ \gamma_k(\mu) = \sum_{\alpha \in Q_1} C_\alpha(\mu) \nu_k^\alpha, \quad k \in Z^+ \right\}.$$

Здесь и ниже  $Z^+$  – множество всех векторов размерности  $n$  с целочисленными неотрицательными координатами. Некоторые элементы множества  $\sigma(\mu)$  могут совпадать между собой. Поэтому фиксируем  $\lambda_k(\mu)$ ,  $k \in Z^+$ , – все различные элементы множества  $\sigma(\mu)$ . Тогда кратность  $n_k(\mu)$  собственного значения  $\lambda_k(\mu)$  равна количеству решений  $p \in Z^+$  уравнения

$$\gamma_p(\mu) = \lambda_k(\mu).$$

Решения этого уравнения перепишем в виде  $(k, j)$ ,  $j = 1, \dots, n_k(\mu)$ , а собственные элементы  $z_{(k)}(t)$  оператора  $A_0(\mu)$ , соответствующие собственному значению  $\lambda_k(\mu)$ , – в виде  $y_{(k,j)}(t)$ ,  $j = 1, \dots, n_k(\mu)$ . Тогда

$$\{y_{(k,j)}(t), \quad j = 1, \dots, n_k(\mu), \quad k \in Z^+\}$$

есть ортонормированный базис в  $H$ .

Всюду считаем, что  $n_k(\mu) < +\infty$ ,  $a(k, \mu) = \sup_{q \neq k} |\lambda_k(\mu) - \lambda_q(\mu)|^{-1} < +\infty$ .

Эти предположения выполняются, например, тогда, когда  $|\gamma_p(\mu)| \rightarrow +\infty$  при  $|p| \rightarrow +\infty$ .

Приведем условия, гарантирующие подчинённость оператора  $A_1(\mu)$  оператору  $A_0(\mu) - \lambda_k(\mu)I$ . Напомним, что подчинённость для нас означает существование некоторой постоянной  $b(k, \mu)$  такой, что для всех  $z(t) \in D_{A_0(\mu)}$ , удовлетворяющих условию

$$\langle z(t), y_{(k,j)}(t) \rangle = 0, \quad j = 1, \dots, n_k(\mu),$$

выполняются оценки

$$\|A_1(\mu)z(t)\| \leq b(k, \mu) \|(A_0(\mu) - \lambda_k(\mu)I)z(t)\|. \quad (41)$$

Укажем условия, гарантирующие выполнение оценок (41).

Пусть  $R^n = \bigcup_{j=1}^M \Omega_{\alpha,r,j}(\mu)$ , где  $\Omega_{\alpha,r,j}(\mu)$  попарно не пересекаются, и функции  $T_{\alpha,r}(t, \mu)$  в каждом  $\Omega_{\alpha,r,j}(\mu)$  дифференцируемы и обратимы. Через  $\delta_{\alpha,r,j}(\tau, \mu)$  обозначим якобиан преобразования координат  $\tau = T_{\alpha,r}(t, \mu)$ ,  $t \in \Omega_{\alpha,r,j}(\mu)$ . Если почти всюду в  $\Omega_{\alpha,r,j}(\mu)$  выполняются оценки

$$|C_{\alpha,r}(t, \mu) \delta_{\alpha,r,j}(T_{\alpha,r}(t, \mu))| \leq B_{\alpha,r,j},$$

то

$$\begin{aligned} \left( \int_{\Omega_{\alpha,r,j}(\mu)} |C_{\alpha,r}(t, \mu) w(T_{\alpha,r}(t, \mu))|^2 dt \right)^{1/2} &= \\ &= \left( \int_{T_{\alpha,r}\Omega_{\alpha,r,j}} |C_{\alpha,r}(T_{\alpha,r}^{-1}(\tau, \mu)) \delta_{\alpha,r,j}(\tau, \mu)|^2 |w(\tau)|^2 d\tau \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

где  $T_{\alpha,r}\Omega_{\alpha,r,j}$  – область значений функции  $T_{\alpha,r}(t, \mu)$ ,  $t \in \Omega_{\alpha,r,j}(\mu)$ . Поэтому выполняются оценки (41). Имеем, что  $g(k, \mu) = \|A_1(\mu) \mathbf{y}_{(k)}(t)\|$ , где  $\mathbf{y}_{(k)}(t)$  – вектор-столбец с координатами  $y_{(k_j)}$ ,  $j = 1, \dots, n_k(\mu)$ ,  $\gamma_{k_j} = \lambda_k(\mu)$ .

Итак, постоянные  $a(k, \mu)$ ,  $b(k, \mu)$ ,  $g(k, \mu)$  вычислены. Поэтому из (17) находим  $f_k(\mu)$ . В случае  $f_k(\mu) \leq 1$  к исследуемой задаче применимы теоремы 1–4. В частности, если при фиксированном  $k$  выполняется оценка  $f_k(\mu) \leq 1$ , то в случае аналитической зависимости от  $\mu \in J$  объектов  $C_{\alpha,r,1}(t, \mu)$ ,  $(\lambda_q(\mu) - \lambda_k(\mu))^{-1}$  (при  $q \neq k$ ),  $T_{\alpha,r}(t, \mu)$  матричные собственные значения  $\Lambda_k(\mu)$  аналитически зависят от  $\mu \in J$ . При этом соответствующие собственные векторы  $\mathbf{v}_{(k)}(\mu)$  можно выбрать аналитически зависящими от  $\mu \in J$ . Другими словами, для вычисления матричных собственных значений  $\Lambda_k(\mu)$  и соответствующих им собственных векторов  $\mathbf{v}_{(k)}(\mu)$  применимы формулы Шрёдингера.

**Замечание 8.** Область применимости полученных результатов значительно шире рассмотренных двух задач.

### Summary

*V.S. Mokeichev, A.M. Sidorov.* Matrix Eigenvalues in Analytic Perturbation Theory for Linear Operators.

In the present paper, we propose a new approach to the analytic perturbation theory for isolated eigenvalues of finite multiplicity. This approach is based on the notion of the matrix eigenvalue of a linear operator. As an application example, we consider linear problems for differential equations.

**Key words:** linear operator, matrix eigenvalue, analytic perturbation theory.

### Литература

1. *Schrödinger E.* Quantisierung als Eigenwertproblem. Dritte Mitteilung: Störungstheorie, mit Anwendung auf den Starkeffekt der Balmerlinien // Ann. Phys. – 1926. – Bd. 80. – S. 437–490.
2. *Rellich F.* Störungstheorie der Spektralzerlegung. I. Mitteilung. Analytische Störung der isolierten Punkteigenwerte eines beschränkten Operators // Math. Ann. – 1937. – Bd. 113. – S. 600–619.

3. *Мокейчев В.С.* Собственные значения граничных задач. Преобразование граничных задач к граничным задачам с малыми коэффициентами // Дифференц. уравнения. – 1989. – Т. 25, № 2. – С. 222–228.
4. *Мокейчев В.С., Сидоров А.М.* О матричном подходе к теории возмущений линейных операторов // Современные методы теории функций и смежные проблемы: Материалы конф. Воронеж. зимней матем. школы. – Воронеж: Изд.-полиграф. центр Воронеж. ун-та, 2009. – С. 119–120.
5. *Сидоров А.М.* Матричные собственные значения в теории возмущений // Современные проблемы теории функций и их приложений: Материалы 16-й Саратов. зимней школы. – Саратов: Научн. шк., 2012. – С. 161–162.
6. *Бари Н.К.* Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве // Учен. зап. Моск. гос. ун-та. – 1951. – Т. 4, Вып. 148. – С. 69–107.
7. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 528 с.

Поступила в редакцию  
10.04.12

---

**Мокейчев Валерий Степанович** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики Казанского (Приволжского) федерального университета.

Е-mail: *Valery.Mokeychev@ksu.ru*

**Сидоров Анатолий Михайлович** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической статистики Казанского (Приволжского) федерального университета.

Е-mail: *Anatoly.Sidorov@ksu.ru*