Алгебра и анализ
Том 11 (1999), вып. 3

МНОГОМЕРНЫЕ ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА И „НЕПРИЧЕСЫВАЕМОСТЬ“ МОДУЛЯРНОЙ ГРУППЫ ГИЛЬБЕРТА

© Г. А. Носков

Доказывается отсутствие ограниченного комбинга на модулярной группе Гильберта, соответствующей вполне вещественному числовому полю степени ≥ 2. В частности, такая группа не допускает автоматной структуры.

Введение

Автоматные группы образуют большой класс конечно-определенных групп, которые (по крайней мере теоретически) допускают эффективные компьютерные вычисления. Этот класс содержит все гиперболические (по Громову) группы, группы с малыми сокращениями, фундаментальные группы компактных пространств неположительной кривизны и множество других интересных групп.

Понятие автоматности содержит важную геометрическую составляющую, именно наличие ограниченного комбинга на группе. Пусть C_Γ — граф Кэли конечно-порожденной группы Γ.

Комбингом на группе Γ называется выбор для каждого элемента $g \in \Gamma$ пути $p_g : [0, b_g] \to C_\Gamma$ в графе Кэли, идущего из $1 \in \Gamma$ в $g \in \Gamma$, т. е. $p_g(0) = 1, p_g(b_g) = g$. Расширим область определения каждого пути p_g на всю полуось $\mathbb{R}_+$, считая его постоянным, начиная с момента $t = b_g$. Ограниченность комбинга означает, неформально говоря, что путь p_g равномерно ограниченно варьируется при небольшой вариации $g \in \Gamma$. Чтобы дать точное определение, зафиксируем константы $k > 0, \epsilon \geq 0$ и введем расстояние в пространстве путей формулой

$$\rho(p_g, p_h) = \sup_t\{d(p_g(t), p_h(t))\} + |b_g - b_h|\}$$

Ключевые слова: группа с комбингом, теория приведения, модулярная группа Гильберта, многомерное изопериметрическое неравенство.

(метрика d берется в графе Кэли).

Ограниченным (k, ϵ)*-комбингом* (или *причесыванием*) на группе Γ называется комбинг, для которого выполняется неравенство $\rho(p_g, p_h) \leq kd(g,h) + \epsilon$ при любых $g, h \in \Gamma$.

Ограниченный комбинг, обладающий определенным свойством рекурсивности, называется автоматной q-структурой (см. [ECHLPT]).

Существуют более сильные условия, а именно наличие ограниченного *бикомбинга* и *биавтоматной* структуры. Неформально они означают, что рассматривается эквивариантное семейство путей, связывающих каждую пару элементов группы, причем путь равномерно ограниченно варьируется при малых вариациях его концов.

До сих пор не описаны S-арифметические группы и решетки в группах Ли, допускающие ограниченный (би)комбинг или (би)автоматную структуру. Отметим следующую диаграмму включений между классами $(\mathcal{B})\mathcal{C}$, $(\mathcal{B})\mathcal{C}$, допускающими ограниченный (би)комбинг или (би)автоматную структуру

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \supset & \mathcal{BC} \\ \cup & & \cup \\ \mathcal{A} & \supset & \mathcal{BA}. \end{array}$$

Неизвестно, являются ли эти включения равенствами, „... хотя широко распространено мнение, что существуют причесываемые группы, не допускающие автоматной структуры“ [Fa].

Терстон и Эпштейн показали [ECHLPT], что группа $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ при $n > 2$ непричесываема. (Чисто алгебраическое доказательство того факта, что $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ при $n > 2$ не допускает ограниченного бикомбинга субэкспоненциального роста, приводится в работе [BM]). Используя другой метод, Герстен и Шорт [GS, Sh] показали, что $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$ над кольцом целых вещественного квадратичного поля $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ не допускает ограниченного бикомбинга. Этот результат усилен в [Pi], где доказано, что эти группы непричесываемы.

Каждая решетка в $SO(n,1)$ биавтоматна. Это следует из результата Эпштейна о биавтоматности геометрически конечных групп [ECHLPT] и из того факта, что решетки в $SO(n,1)$ геометрически конечны [Bo]. В [Fa] доказано, что неприводимая решетка в полупростой линейной группе Ли $G \neq SO(n,1)$ допускает ограниченный бикомбинг в том и только том случае, когда она кокомпактна.

Целью настоящей заметки является доказательство следующего факта:

Теорема. *Пусть $\mathcal{O}$ — кольцо целых вполне вещественного поля K степени n над $\mathbb{Q}$. Тогда при $n \geq 2$ группа $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$ не допускает ограниченного комбинга в смысле* [ECHLPT]. *В частности, она не является автоматной.*

Мы комбинируем подходы работ [ECHLPT] и [Pi], где были рассмотрены соответственно группы $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$, $n \geq 3$ и $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$, $\mathcal{O}$ вещественное и квадратичное.

Работа была выполнена в основном во время визита в SFB 343 Университета Билефельд в конце 1995 г. Автор благодарен проф. Г. Абельсу за поддержку и за многие полезные обсуждения. Автор признателен проф. Б. Фарбу, приславшему статью [Fa], и рецензенту за конструктивную критику, способствовавшую улучшению текста. Работа была частично поддержана грантом РФФИ № 96-01-01610.

§1. Многомерные изопериметрические неравенства для групп с ограниченным комбингом

Следующая теорема Эпштейна–Терстона дает основной инструмент для доказательства отсутствия ограниченного комбинга.

Теорема (см. 10.3.5 в [ECHLPT]). *Пусть Γ — группа с ограниченным комбингом, действующая вполне разрывно и кокомпактно изометриями на стягиваемом римановом многообразии M. Существует константа k со следующим свойством: для каждого липшицева $(n-1)$-цикла b в M, $n \geq 1$, существует липшицева n-цепь c такая, что $\partial c = b$ и*

$$\mathrm{mass}_n\ c \leq k \cdot \mathrm{diam}\ b \cdot \mathrm{mass}_{n-1}\ b.$$

Непосредственно из теоремы вытекает

Следствие. *Пусть Γ — группа изометрий, действующая вполне разрывно и кокомпактно на стягиваемом римановом многообразии M. Предположим, что для фиксированного натурального n и для каждого натурального m в M найдется липшицев $(n-1)$-цикл b_m (зависящий от m), масса и диаметр которого ограничены сверху полиномом от m. Предположим, что для любого выбора липшицевых n-цепей c_m в M с $\partial c_m = b_m$ масса c_m растет экспоненциально с m. Тогда Γ не допускает ограниченного комбинга.*

§2. Конструкция Эпштейна–Терстона в произведении гиперболических плоскостей

2.1. Орисферы в H^n. Обозначим $H = \{z \in \mathbb{C} : z = x + yi, y > 0\}$ верхнюю полуплоскость с координатами x, y и с гиперболической метрикой $\frac{1}{y^2}(dx^2+dy^2)$. Отождествление точки (x, y) с матрицей

$$\begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

позволяет рассматривать H как разрешимую группу Ли. Пусть H^n — прямое произведение n копий плоскости H. Мы будем использовать координаты $(y, x) = (y_1, \dots, y_n, x_1, \dots, x_n)$ в H^n и, там, где это необходимо, координаты $t_i = \ln y_i$. Левоинвариантная метрика на H^n дается формулой $ds^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{y_i^2}(dx_i^2 + dy_i^2) = \sum_{i=1}^n dt_i^2 + e^{-2t_i} dx_i^2$.

Для вещественного r определим *орисферу*

$$S_\infty(r) = \{(t, x) \in H^n : \sum_1^n t_i = r\} \tag{1}$$

и *оришар*

$$B_\infty(r) = \{(t, x) \in H^n : \sum_1^n t_i > r\}.$$

$S_\infty(0)$ есть подгруппа Ли в H^n и $S_\infty(r) = g(r/n)S_\infty(0)$, где $g(s) = (s, \dots, s; 0, \dots, 0)$, $s \in \mathbb{R}$ — 1-параметрическая подгруппа в H^n, записанная в (t, x)-координатах. Таким образом, все $S_\infty(r)$ изометричны (как римановы подмногообразия в H^n).

2.2. Замечание рецензента. Отметим, что всевозможные оришары и орисферы в H^n не исчерпываются $B_\infty(r)$ и $S_\infty(r)$ даже с учетом действия группы изометрий пространства. Более того, они, как правило, не изометричны $B_\infty(r)$, $S_\infty(r)$.

2.3. Предложение. *Для любого натурального $n \geq 2$ и любого вещественного r существует последовательность липшицевых $(n-1)$-циклов b_m в $S_\infty(r)$, удовлетворяющих следующим условиям:*

1) *Масса и диаметр циклов b_m ограничены сверху полиномом от m.*

2) *Пусть* c_m *— цепи с границей* $\partial c_m = b_m$, *лежащие в дополнении* $B_\infty(r)$, *где* $B_\infty(r) = \{(t,x) \in H^n : \sum t_i > r\}$. *Тогда масса* c_m *растет экспоненциально по* m.

Доказательство. Построение цикла $b = b_m$ **в** $S_\infty(0)$. Цикл $b = b_m$ комбинаторно-эквивалентен „нормальному расслоению“ Z границы n-куба $[-1,1]^n$ в $\mathbb{R}^n$. Под нормальным вектором во внутренней точке $(n-1)$-мерной грани куба мы имеем в виду координатный единичный вектор, ортогональный к грани и направленный наружу. Грани куба $[-1,1]^n$ находятся во взаимно-однозначном соответствии с разбиениями $[1,n] = I \cup J \cup L$ с непустым $I \cup J$, именно грань f_{IJ} определяется равенством

$$f_{IJ} = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i = 1, x_j = -1, x_l \in [-1,1], i \in I, j \in J, l \in L\}.$$

Всякая выпуклая линейная комбинация различных базисных векторов e_i для $i \in I$ и $-e_j$ для $j \in J$ считается нормальным вектором в точке $x \in f_{IJ}$. Нормальные векторы в x образуют симплекс с вершинами в точках e_i и $-e_j$. Соответствующая клетка Z_{IJ} цикла Z является прямым произведением симплекса размерности $|I| + |J| - 1$ и куба размерности $n - |I| - |J|$ и, следовательно, имеет размерность $n-1$. Искомый цикл $b = b_m$ построим, вкладывая Z в $S_\infty(0)$. Мы сделаем это, вкладывая по отдельности каждую грань. Из (1) следует, что орисфера $S_\infty(0)$ допускает представление $S_\infty(0) = S_0 \times \mathbb{R}^n$, где $S_0 = \{t \in \mathbb{R}^n : \sum t_i = 0\}$. Образ b_{IJ} грани Z_{IJ} сферы Z в $S_\infty(0)$ соответствует прямому произведению симплекса $\triangle_{IJ} \subset S_0$ и куба $\Box_{IJ} \subset \mathbb{R}^n$. Положим $\Box_{IJ} = \frac{1}{2}e^{2m} f_{IJ}$ и

$$\triangle_{IJ} = \text{выпуклая оболочка } \{v_k \mid k \in I \cup J\},$$

где

$$v_k = (m, \dots, m, \underbrace{-m(n-1)}_{k}, m, \dots, m).$$

Наконец, полагаем $b_{IJ} = \triangle_{IJ} \times \Box_{IJ}$ и $b = \bigcup b_{IJ}$. Соответствие $Z_{IJ} \to b_{IJ}$ сохраняет отношение примыкания между гранями Z_{IJ}, определяя тем самым липшицев гомеоморфизм между Z и b (который даже гладок на каждом Z_{IJ}).

Свойства циклов b_m.

2.4. Лемма. *Масса b_m растет полиномиально с m.*

Доказательство. Для подсчета массы сингулярного (липшицевого) симплекса $f : \Delta^k \to M$ необходимо проинтегрировать по Δ^k k-мерный якобиан $V(x)$ отображения f, который определяется следующим образом. Дифференциал D_x существует почти для всех $x \in \Delta^k$. Если D_x определен, то он отображает ортонормальный базис в x на k-репер векторов, касательных к M в $f(x)$. Этот k-репер определяет параллелепипед в касательном пространстве $T_x M$, имеющий k-объем $V(x) \geq 0$. Масса цепи определяется по линейности. В нашем случае мы параметризуем $b_{IJ} = \triangle_{IJ} \times \Box_{IJ}$ „самим собой“, и объем $V(t,x)$ в точке $(t,x) \in \triangle_{IJ} \times \Box_{IJ}$ равен $e^{-2\sum_{l\in L} t_l} = e^{-2|L|m}$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\operatorname{mass} b_{IJ} &= e^{-2|L|m} \times (\text{евклидов объем } b_{IJ})\\ &= e^{-2|L|m} \times (\text{евклидов объем } \Box_{IJ}) \times (\text{евклидов объем } \triangle_{IJ})\\ &= (\text{евклидов объем } \triangle_{IJ}),\end{aligned}$$

и последний объем растет, как $m^{\dim \triangle_{IJ}}$. ●

2.5. Лемма. $\operatorname{diam} b_{IJ}$ *растет полиномиально с m.*

Доказательство. Любые две точки b_{IJ} можно соединить кусочно-линейным путем, каждый линейный участок которого имеет либо постоянные t-координаты, либо постоянные x-координаты. Если x-координаты постоянны, то длина участка совпадает с евклидовой длиной и ограничена сверху евклидовым диаметром $\triangle_{IJ}$. Если же t-координаты постоянны, то участок параллелен некоторой x_l-оси, $l \in L$, так что t_l-координата любой точки этого участка равна m. Но тогда длина участка ограничена сверху величиной $\int_{-e^m}^{e^m} \frac{dx_l}{e^m} = 2$. ●

Построение цепи c с границей ∂b. Обозначим через $\triangle^0_{IJ}$ выпуклую оболочку начала координат и симплекса $\triangle_{IJ}$, и пусть $c_{IJ} = \triangle^0_{IJ} \times \Box_{IJ}$. Граница цепи $\bigcup_{I,J} c_{IJ}$ состоит из b и куба $c_0 = [-e^m, e^m]^n$. Чтобы дополнить n-цепь $\bigcup_{I,J} c_{IJ}$ до цепи c, имеющей b в качестве границы, осталось добавить к $\bigcup_{I,J} c_{IJ}$ заполненный куб c_0.

Другие цепи c_m в $S_\infty(0)$ с $\partial c_m = b_m$.

2.6. Лемма. *Замкнутая n-форма $\omega = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ на H^n (записанная в (t, x)-координатах) ограничена на $S_\infty(r)$.*

Доказательство. Напомним определение нормы дифференциальной формы ω на многообразии M:

$$\|\omega\| = \sup\{|\omega(\xi_1, \ldots, \xi_n)| : \xi_1, \ldots, \xi_n \in T_x M, |\xi_1|, \ldots, |\xi_n| \leq 1, x \in M\}.$$

Пусть

$$\xi_i = (\xi_{i1}, \ldots, \xi_{in}; \eta_{i1}, \ldots, \eta_{in}), \quad i = 1, \ldots, n,$$

— касательные векторы в $(t, x) \in S_\infty(r)$ с нормой ≤ 1.

Это значит, что

$$x_i^2 = \xi_{i1}^2 + \ldots + \xi_{in}^2 + e^{-2t_1}\eta_{i1}^2 + \ldots + e^{-2t_n}\eta_{in}^2 \leq 1 \tag{2}$$

и

$$t_1 + \ldots + t_n = r.$$

Имеем

$$\omega(\xi_1, \ldots, \xi_n) = (dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n)(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \det_{1 \leq i,j \leq n} |\eta_{ij}|$$
$$= e^r \det_{1 \leq i,j \leq n} |e^{-t_i}\eta_{ij}|.$$

Строки определителя $\det_{1 \leq i,j \leq n} |e^{-t_i}\eta_{ij}|$ имеют евклидову норму ≤ 1 ввиду (2), следовательно, все выражение не превышает e^r. •

Далее мы пользуемся обозначением $\omega c := \int_\omega c$ для n-формы ω и липшицевой n-цепи c.

2.7. Лемма. *ωc_m растет экспоненциально с m.*

Доказательство. Заметим вначале, что $\omega c_{IJ} = 0$. В самом деле, напомним, что $c_{IJ} = \triangle_{IJ}^0 \times \square_{IJ}$ и $\square_{IJ}$ лежит в гиперплоскости $x_i = \mathrm{const}$ для $i \in I \cup J$, так что интегрирование по x_i дает нуль. Остается проинтегрировать ω по кубу c_0, что, очевидно, дает евклидов объем этого куба, т. е. $2^n e^{mn}$. •

2.8. Лемма. *Пусть c'_m — последовательность цепей в $S_\infty(0)$ с $\partial c'_m = b_m$, тогда масса c'_m растет экспоненциально с m.*

Доказательство. Так как форма ω замкнута и орисфера $S_\infty(0)$ стягиваема, то значение ω на всех n-цепях с границей b_m то же самое, в частности, $\omega c'_m = \omega c_m$. Далее, ω имеет норму ≤ 1, так что $\omega c'_m \leq \text{mass } c'_m$, и лемма следует из экспоненциального роста ωc_m (только что доказанного). •

Завершение доказательства предложения 2.3. Заметим вначале, что левоинвариантность дает нам конструкцию цикла b_m со свойствами, доказанными выше, в произвольной орисфере $S_\infty(r)$. Зафиксируем вещественное r и рассмотрим соответствующую последовательность циклов b_m в $S_\infty(r)$. Пусть $M_0 = H^n - B_\infty(r)$ — подмногообразие в H^n, полученное удалением оришара $B_\infty(r)$ из H^n. Пусть c'_m — некоторая последовательность цепей в M_0 с $\partial c'_m = b_m$. Нам необходимо доказать, что масса c'_m растет экспоненциально с m. Для этого нам понадобится следующая

2.9. Лемма. *Проекция $\pi : M_0 \to S_\infty(r)$ вдоль геодезических, ортогональных орисфере $S_\infty(r)$ не увеличивает расстояний и, следовательно, не увеличивает массу.*

Доказательство. Это утверждение верно для гораздо более общих пространств (так называемых пространств Адамара) и вытекает из того, что оришары выпуклы, и метрическая проекция на выпуклое множество не увеличивает расстояния (см. [BGS, B]). (Замечание рецензента). •

Из леммы 2.7 следует, что $\text{mass}(\pi c'_m)$ растет экспоненциально с m, и ввиду леммы 2.8 мы заключаем, что $\text{mass}(c'_m)$ также растет экспоненциально с m. Предложение 2.3 доказано. •

§3. Доказательство теоремы

Мы найдем кокомпактное вполне разрывное действие группы $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$ на некотором подмногообразии $M \subset H^n$ и применим критерий Эпштейна–Терстона для доказательства того факта, что Γ не допускает ограниченного комбинга. Нам понадобятся стандартные факты из теории приведения [vdG].

3.1. Действие Γ на H^n и теория приведения. Мы отсылаем к [vdG] по поводу формулируемых здесь фактов. Пусть K — вполне вещественное числовое поле степени $n = [K : \mathbb{Q}]$ и пусть $\varnothing$ — его кольцо целых. Имеется ровно n различных вложений поля K в $\mathbb{R}$, и вместе они индуцируют вложение $\sigma : K \to \mathbb{R}^n$ и вложение Γ в $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})^n$. Образ $\varnothing$ относительно σ в $\mathbb{R}^n$ является решеткой ранга

n, и образ Γ является дискретной подгруппой в $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^n$, и поэтому Γ действует вполне разрывно, кокомпактно и изометрично на H^n.

Действие Γ на H^n не кокомпактно, и теория приведения позволяет найти такое Γ-инвариантное стягиваемое подмногообразие M с границей, что действие Γ на M кокомпактно и вполне разрывно. M получается удалением из H^n объединения попарно-непересекающихся открытых оришаров.

Вложения $\sigma_i : K \to \mathbb{R}$ индуцируют вложение проективной прямой $\mathrm{Pr}(K)$ в $\mathrm{Pr}(\mathbb{R})^n$ — произведение n копий проективной прямой $\mathrm{Pr}(\mathbb{R})$. Линейное действие группы $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ на $\mathbb{R}^2$ индуцирует действие $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ на $\mathrm{Pr}(\mathbb{R})$ дробно-линейными преобразованиями, и так же действует группа $\mathrm{PSL}_2(K)$ на $\mathrm{Pr}(\mathbb{R})^n$. Орбиты $\mathrm{Pr}(K)$ относительно Γ называются *каспами* группы Γ. С каждым ненулевым идеалом $A = \mathcal{O}\alpha + \mathcal{O}\beta$ в $\mathcal{O}$ ассоциируется *орифункция*

$$\mu_l(z) = \mathrm{Norm}(A) \prod_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{Im}\ z_i}{|\sigma_i(\alpha) - \sigma_i(\beta) z_i|^2},$$

зависящая только от $l = (\alpha : \beta) \in \mathrm{Pr}(K)$. Определим *оришар*

$$B_l(r) = \{z \in H^n : \ln \mu_l(z) > r\}$$

с центром в точке в $l \in \mathrm{Pr}(K) \subseteq \mathrm{Pr}(\mathbb{R})^n$ и *орисферу*

$$S_l(r) = \{z \in H^n : \ln \mu_l(z) = r\}.$$

В частности, для $l = \infty$ имеем $\mu_\infty(z) = \prod_{i=1}^n y_i$, $y_i = \mathrm{Im}\, z_i$, и определение совпадает с определением орисферы $S_\infty(r)$, данным в 2.1.

Функция μ Γ-инвариантна в том смысле, что $\mu_{gl}(gz) = \mu_l(z)$ для всех $g \in \Gamma$. В частности, Γ переставляет оришары одного и того же радиуса.

3.2. Лемма. *Для достаточно большого r подмногообразие*

$$M = H^n - \bigcup_{l \in \mathrm{Pr}(K)} B_l(r)$$

стягиваемо, и $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$ действует вполне разрывно и кокомпактно.

Доказательство. Это факт хорошо известен, и мы просто дадим точные ссылки. То, что действие вполне разрывно, отмечено в начале настоящего пункта. Чтобы обеспечить кокомпактность действия, заметим вначале, что для достаточно большого r оришары $B_l(r)$, $B_{l'}(r)$ не пересекаются для различных l, l' [vdG, лемма I.2.1]. Увеличивая r, мы можем считать, что замкнутые оришары радиуса r также не пересекаются, следовательно, множество $M = H^n - \bigcup_{l \in \mathrm{Pr}(K)} B_l(r)$ является подмногообразием в H^n. Дальнейшее увеличение r позволяет считать, что для всех каспов $l \in \mathrm{Pr}(K)$ оришар $B_l(r)$ содержится „в шаре влияния“

$$F_l = \{(t, x) \in H^n : \mu_l(z) \geq \mu_{l'}(z) \text{ для всех } l' \neq l\}$$

(см. [vdG, с. 8]). Тогда фактор-пространство $H^n - \bigcup_{l \in \mathrm{Pr}(K)} B_l(r)$ по модулю $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$ является компактным многообразием с границей (см. [vdG, с. 10]), откуда и следует кокомпактность действия.

Наконец, для доказательства стягиваемости заметим вначале, что H^n гомеоморфно $\mathbb{R}^{2n}$, и потому стягиваемо. Для доказательства стягиваемости дополнения $M = H^n - \bigcup_{l \in \mathrm{Pr}(K)} B_l(r)$ достаточно построить деформационную ретракцию H^n на M. Деформационная ретракция ϕ_∞ пространства H^n на $H^n - B_\infty(r)$ дается формулой

$$(t, x) \mapsto (1 - \tau)t + \tau \frac{rt}{\sum t_i}, \quad 0 \leq \tau \leq 1,$$

для $(t, x) \in B_\infty(r)$ и требованием, что ϕ_∞ тождественна на $H^n - B_\infty(r)$. Так как $\mathrm{PSL}_2(K)$ действует транзитивно на $\mathrm{Pr}(K)$, то можно определить деформационную ретракцию ϕ_l пространства H^n на $H^n - B_l(r)$ для каждого $l \in \mathrm{Pr}(K)$ по эквивариантности. Определим теперь деформационную ретракцию H^n на $M = H^n - \bigcup_{l \in \mathrm{Pr}(K)} B_l(r)$ как тождественную на $M = H^n - \bigcup_{l \in \mathrm{Pr}(K)} B_l(r)$ и равную ϕ_l на $B_l(r), l \in \mathrm{Pr}(K)$. •

3.3. Γ не допускает ограниченного комбинга. Применим теорему Эпштейна–Терстона для действия Γ на M. Предположим противное, т. е. что Γ допускает ограниченный комбинг. Возьмем циклы $b_m \subset S_\infty(r)$, сконструированные в 2.3. Тогда теорема Эпштейна–Терстона показывает, что b_m есть граница n-цепи c'_m в M, чья масса ограничена сверху полиномом от m. Ввиду леммы 2.9 масса цепи $\pi c'_m \subset S_\infty(r)$ также растет полиномиально с m. Это противоречит лемме 2.8.

Список литературы

[BGS] Ballmann W., Gromov M., Schroeder V., *Manifolds of nonpositive curvature*, Progr. Math., vol. 61, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1985.

[B] Ballmann W., *Lectures on spaces of nonpositive curvature*, DMV Sem., vol. 25, Birkhäuser Verlag, Basel, 1995.

[BM] Bridson M. R., Vogtmann K., *On the geometry of the automorphism group of a free group*, Bull. London Math. Soc. **27** (1995), no. 6, 544–552.

[Bo] Bowditch B. H., *Geometrical finiteness for hyperbolic groups*, J. Funct. Anal. **113** (1993), no. 2, 245–317.

[ECHLPT] Epstein D. B. A., Cannon J. W., Holt D. F., Levy S. V. F., Paterson M. S., Thurston W. P., *Word processing in groups*, Jones and Bartlet Publishers, Boston, MA, 1992.

[Fa] Farb B., *Combing lattices in semisimple Lie groups*, Groups—Korea'94 (A. C. Kim et al., eds.), Walter de Gruyter, Berlin, 1995, pp. 57–67.

[GS] Gersten S. M., Short H. B., *Rational subgroups of biautomatic groups*, Ann. of Math. (2) **134** (1991), no. 1, 125–158.

[Pi] Pittet Ch., *Hilbert modular groups and isoperimetric inequalities*, Combinatorial and Geometric Group Theory (Edinburgh, 1993), London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 204, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995, pp. 259–268.

[Sh] Short H. B., *Groups and combings*, Preprint, École Normale Sup. de Lyon, July 1990.

[vdG] van der Geer G., *Hilbert modular surfaces*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), vol. 16, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1988.

644099, Омск
ул. Певцова, 13
ОФИМ СОРАН
E-mail: noskov@iitam.omsk.net.ru

Поступило 24 марта 1997 г.