



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Миллионщиков, Нормальные базисы семейства эндоморфизмов метризованного векторного расслоения,
Матем. заметки, 1985, том 38, выпуск 5, 691–708

<https://www.mathnet.ru/mzm5581>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.170

22 мая 2025 г., 16:57:49



НОРМАЛЬНЫЕ БАЗИСЫ СЕМЕЙСТВА ЭНДОМОРФИЗМОВ МЕТРИЗОВАННОГО ВЕКТОРНОГО РАССЛОЕНИЯ

В. М. Миллиончиков

§ 1. В этой статье речь будет идти о некоторых обобщениях введенного А. М. Ляпуновым [1] понятия нормальной фундаментальной системы решений линейной системы дифференциальных уравнений. Мы начнем с того, что напомним это понятие в той степени общности, в какой оно рассматривалось самим А. М. Ляпуновым, и проиллюстрируем на примерах содержание и роль этого понятия.

Показателем Ляпунова решения $\xi(\cdot)$ линейной системы дифференциальных уравнений $\dot{\xi} = A(t)\xi$ называется верхний предел $\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln |\xi(t)|$, или, что эквивалентно, точная нижняя грань тех чисел $\lambda \in \mathbf{R}$, для которых $|\xi(t)| \leq C_\lambda \exp(\lambda t)$ при некотором $C_\lambda \in \mathbf{R}$ и всех $t \in \mathbf{R}^+$. Если $\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \|A(\tau)\| d\tau < +\infty$ (только такие системы мы рассматриваем в § 1), то показатель Ляпунова всякого ненулевого решения есть число. Поясним сразу же, что следует понимать под показателями Ляпунова решений линейных дифференциальных уравнений произвольного порядка. Если дано уравнение

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_n(t)y = 0, \quad (1)$$

то показателем Ляпунова его решения $y(\cdot)$ называется не показатель Ляпунова функции $y(\cdot)$, т. е.

$\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln |y(t)|$, а показатель Ляпунова ее $(n - 1)$ -струйного расширения, т. е. $\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln \|y(t)\|_n$, где $\|y(t)\|_n \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{k=0}^{n-1} |y^{(k)}(t)|^2 \right)^{1/2}$.

Вообще, все, что относится к устойчивости и к показателям Ляпунова решений линейных систем первого порядка, переносится, как известно, на уравнения произвольного порядка путем стандартного сведения последних к системам первого порядка. Поясним, что y в уравнении (1) может принимать значения в векторном пространстве любой размерности; при этом $a_k(t)$ — линейные операторы, и лишь в одномерном пространстве их действие сводится к умножению на числа, с которыми они и отождествляются.

В качестве примера из механики, на котором мы проиллюстрируем понятие нормального базиса (нормальной фундаментальной системы решений), рассмотрим уравнение колебаний маятника $\ddot{u} + \sin u = 0$ (коэффициент при $\sin u$ убран надлежащей заменой времени). Линеаризуя это уравнение в нижнем положении равновесия ($u = 0$, $\dot{u} = 0$), получают уравнение $\ddot{u} + u = 0$, называемое уравнением малых колебаний маятника. Линеаризуя уравнение маятника в верхнем положении равновесия ($u = \pi$, $\dot{u} = 0$), получают уравнение $\ddot{u} - u = 0$.

Показатель Ляпунова любого ненулевого решения уравнения $\ddot{u} + u = 0$ равен нулю, так как норма одноструйного расширения решения $u(t) \equiv A \sin(t + \varphi)$ равна

$$((A \sin(t + \varphi))^2 + (A \cos(t + \varphi))^2)^{1/2} = A,$$

а $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln A = 0$ при всяком $A \in \mathbf{R}_*^+$. Поэтому, какую бы фундаментальную систему решений уравнения $\ddot{u} + u = 0$ мы ни взяли, сумма показателей Ляпунова входящих в нее решений равна нулю.

Иначе обстоит дело с уравнением $\ddot{u} - u = 0$ — уравнением в вариациях в верхнем положении равновесия. Это уравнение имеет решение $u(t) \equiv \exp t$, показатель Ляпунова которого есть $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln (((\exp t)^2 + (\exp t)^2)^{1/2}) = 1$ и решение $u(t) \equiv \exp(-t)$, у которого показатель

Ляпунова равен

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln(((\exp(-t))^2 + (-\exp(-t))^2)^{1/2}) = -1.$$

Рассмотрим две фундаментальные системы решений уравнения $\ddot{u} - u = 0$. Первая: $\exp t$, $\exp(-t)$; вторая: $\exp t$, $\exp t + \exp(-t)$. Сумма показателей Ляпунова решений, входящих в первую систему, равна, согласно проведенным выше вычислениям, $1 - 1 = 0$. А для второй фундаментальной системы сумма показателей Ляпунова входящих в нее решений равна $1 + 1 = 2$, поскольку показатель Ляпунова решения $C_1 \exp t + C_2 \exp(-t)$ при любых $C_1 \in \mathbb{R}_*$, $C_2 \in \mathbb{R}$ равен показателю Ляпунова решения $\exp t$ вследствие легко проверяемого равенства $\lim_{t \rightarrow +\infty} (\|C_1 \exp t + C_2 \exp(-t)\|_2 \|\exp t\|_2^{-1}) = |C_1|$. Таким образом, у уравнения $\ddot{u} - u = 0$ имеются фундаментальные системы решений с различными суммами показателей Ляпунова.

Фундаментальные системы решений, у которых сумма показателей Ляпунова имеет наименьшее возможное значение, названы А. М. Ляпуновым *нормальными*. Из изложенного выше следует, что $\exp t$, $\exp(-t)$ — нормальная фундаментальная система решений уравнения $\ddot{u} - u = 0$.

Итак, у уравнения $\ddot{u} + u = 0$ всякая фундаментальная система решений нормальна, а у уравнения $\ddot{u} - u = 0$ — не всякая.

С рассмотрением нормальных фундаментальных систем решений связано исследование условной устойчивости. Условной устойчивостью А. М. Ляпунов назвал устойчивость по отношению к возмущениям начальных значений, подчиненным некоторому условию, точнее, не выводящим начальное значение с некоторого многообразия. Так, верхнее положение равновесия маятника условно устойчиво (в линейном приближении; имеется теорема Ляпунова об условной устойчивости для нелинейного уравнения, но об этом мы сейчас сколько-нибудь обстоятельно говорить не будем), поскольку при всяком $C \in \mathbb{R}$ решение $u(t) \equiv C \exp(-t)$ уравнения $\ddot{u} + u = 0$ (т. е. всякое решение $u(\cdot)$ этого уравнения, начальное значение которого удовлетворяет условию $u(0) + \dot{u}(0) = 0$) удовлетворяет неравенству $\|u(t)\|_2 \leq \|u(0)\|_2 \exp(-t)$ при всех $t \in \mathbb{R}^+$. Если ухитриться качнуть маятник так, чтобы сум-

ма величин скорости и отклонения от верхнего положения в начальный момент времени равнялась нулю, то маятник будет не колебаться, а стремиться к верхнему положению равновесия. Подчеркнем, во избежание недоразумения, что здесь речь идет о линейном приближении. Для настоящего маятника, описываемого нелинейным уравнением $\ddot{u} + \sin u = 0$, условие, которому должна удовлетворять начальная точка фазовой кривой, чтобы маятник стремился к верхнему положению равновесия, несколько иное: точка $(u(0), \dot{u}(0))$ должна лежать на некоторой кривой в фазовом пространстве, касающейся прямой $u + \dot{u} = \pi$ (это и есть содержание вышеупомянутой теоремы Ляпунова об условной устойчивости применительно к рассматриваемому примеру). Обнаружить наличие условной устойчивости верхнего положения равновесия маятника нам помогло знание нормальной фундаментальной системы решений уравнения $\ddot{u} - u = 0$, точнее, знание того, что в нормальной фундаментальной системе решений этого уравнения имеется решение с отрицательным показателем Ляпунова.

Перейдем теперь к основному изложению, совершив при этом скачок вверх по ступенькам абстракции, с тем, однако, чтобы в конце статьи снова вернуться к рассмотрению более осязаемых объектов.

§ 2. 1. Абстрактным векторным расслоением мы называем тройку (E, p, B) , где E и B — некоторые множества, p — некоторое отображение E на B , причем на полном прообразе $p^{-1}(b)$ всякой точки $b \in B$ введена структура n -мерного векторного пространства над полем \mathbf{R} (или над полем \mathbf{C}). Множество E называется пространством, B — базой, p — проекцией, $p^{-1}(b)$ — слоем над точкой b . В этой статье всюду предполагается, что $n \in \mathbf{N}$. Правда, использоваться это условие (т. е. условие $n \neq 0$), будет, лишь начиная с определения 3.

Риманова метрика на абстрактном векторном расслоении (E, p, B) есть, по определению, отображение, которое каждой паре точек $\xi \in E, \eta \in E$, таких, что $p\xi = p\eta$, ставит в соответствие некоторое действительное число (или комплексное число — в варианте \mathbf{C}), причем сужение этого отображения на $p^{-1}(b) \times p^{-1}(b)$ при всяком $b \in B$ есть скалярное произведение на векторном пространстве $p^{-1}(b)$.

Эндоморфизмом абстрактного векторного расслоения называется пара отображений $X: E \rightarrow E, \chi: B \rightarrow B$, та-

кая, что $pX = \chi p$ и для всякого $b \in B$ сужение $X [b] \stackrel{\text{def}}{=} X|_{p^{-1}(b)}$ отображения X на слой над точкой b есть линейное отображение слоя над точкой b в слой над точкой χb . Семейством эндоморфизмов абстрактного векторного расслоения (E, p, B) будем называть произвольное отображение \mathfrak{M} множества $M \subset \mathbf{R}$ в множество эндоморфизмов абстрактного векторного расслоения. При этом от множества M будем требовать только одного: $+\infty$ должна быть его точкой накопления. Основные частные случаи:

$$M = \mathbf{R}, \quad M = \mathbf{R}^+, \quad M = \mathbf{Z}, \quad M = \mathbf{N}.$$

Значением отображения \mathfrak{M} в точке $t \in M$ является некоторый эндоморфизм (X_t, χ_t) .

2. Основным объектом рассмотрения будет для нас показатель Ляпунова $\lambda(\mathfrak{M}, \xi)$ семейства эндоморфизмов \mathfrak{M} в точке $\xi \in E$. Он определяется формулой

$$\lambda(\mathfrak{M}, \xi) = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln |X_t \xi|. \quad (2)$$

Здесь и всюду далее полагаем, по определению, $\ln 0 = -\infty$. В выражении « $t \rightarrow +\infty$ » имеется в виду, что $t \rightarrow +\infty$, оставаясь в M . Норма вектора $\eta \in E$ определяется через риманову метрику абстрактного векторного расслоения по формуле $|\eta| = \langle \eta, \eta \rangle^{1/2}$. Из этих определений следует, в частности, что для всякого $b \in B$ показатель $\lambda(\mathfrak{M}, 0_b)$ равен $-\infty$. Через 0_b мы обозначаем нулевой вектор слоя $p^{-1}(b)$. Говоря о ненулевом векторе пространства E , мы будем подразумевать вектор $\xi \in E$, такой, что $\xi \neq 0_{p\xi}$.

Из формулы (2) следует, что для всякого $\xi \in E$ показатель Ляпунова $\lambda(\mathfrak{M}, \xi)$ есть точка расширенной числовой прямой $\bar{\mathbf{R}}$, т. е. либо действительное число, либо один из символов $+\infty, -\infty$. Напомним, что в $\bar{\mathbf{R}}$ имеется отношение линейного порядка: если $\mu \in \bar{\mathbf{R}}, \nu \in \bar{\mathbf{R}}$, то $\mu \geq \nu$ в том и только в том случае, если либо $\mu = +\infty$, либо $\nu = -\infty$, либо $\mu \in \mathbf{R}, \nu \in \mathbf{R}$ и $\mu \geq \nu$ (последнее неравенство понимается в стандартном смысле — как неравенство между действительными числами).

В [2] доказана следующая лемма, имеющая в цитируемой статье тот же номер, что и здесь.

ЛЕММА 1. Для всяких $\alpha \in \mathbf{R}, \beta \in \mathbf{R}, b \in B, \xi \in p^{-1}(b), \eta \in p^{-1}(b)$ имеет место неравенство

$$\lambda(\mathfrak{M}, \alpha\xi + \beta\eta) \leq \max \{ \lambda(\mathfrak{M}, \xi), \lambda(\mathfrak{M}, \eta) \}. \quad (3)$$

3. **О п р е д е л е н и е 1.** Для всякого $b \in B$ обозначим через $\Xi(b)$ множество всех базисов $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ слоя $p^{-1}(b)$, векторы которых занумерованы в порядке невозрастания показателей Ляпунова:

$$\lambda(\mathfrak{M}, \xi_1) \geq \dots \geq \lambda(\mathfrak{M}, \xi_n).$$

В множестве $\Xi(b)$ введем отношение предпорядка, положив, что $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ и $\{\eta_1, \dots, \eta_n\}$ находятся в этом отношении в том и только в том случае, если $\lambda(\mathfrak{M}, \xi_i) \geq \lambda(\mathfrak{M}, \eta_i)$ для всех $i \in \{1, \dots, n\}$.

Напомним, что предпорядком на множестве Ξ называется транзитивное и рефлексивное отношение — см. [3, сводка результатов, § 6, п. 1, с. 384]. Отношение порядка, ассоциированное с отношением предпорядка, определяется (см. там же) как то отношение на фактор-множестве Ξ/R множества Ξ по отношению эквивалентности R : « x и y , а также y и x находятся в отношении предпорядка», которое порождено отношением предпорядка.

Напомним, что наименьшим элементом [3, сводка результатов, § 6, п. 5, с. 385—386] упорядоченного (по старой терминологии — частично упорядоченного) множества Ω называется элемент $a \in \Omega$, такой, что $x \geq a$ для всякого $x \in \Omega$. Само собой разумеется, что упорядоченное множество может не иметь ни одного наименьшего элемента.

Наименьший элемент множества Ξ , на котором задано отношение предпорядка, будем определять аналогично, т. е. как такой элемент $a \in \Xi$, что пара (x, a) находится в отношении предпорядка для всякого $x \in \Xi$. Эквивалентное определение: $a \in \Xi$ называется наименьшим элементом множества Ξ , на котором задано отношение предпорядка, если соответствующий ему элемент фактор-пространства Ξ/R является наименьшим элементом в Ξ/R .

Поясним теперь, во что превращаются эти общие определения в ситуации, рассматриваемой в определении 1. Отношение эквивалентности R в этой ситуации таково: базисы $\{\xi_1, \dots, \xi_n\} \in \Xi(b)$ и $\{\eta_1, \dots, \eta_n\} \in \Xi(b)$ находятся в отношении R , если $\lambda(\mathfrak{M}, \xi_i) = \lambda(\mathfrak{M}, \eta_i)$ для всех $i \in \{1, \dots, n\}$. Базис $\{\eta_1, \dots, \eta_n\} \in \Xi(b)$ называется наименьшим элементом множества $\Xi(b)$, наделенного отношением предпорядка в определении 1, если для всякого базиса $\{\xi_1, \dots, \xi_n\} \in \Xi(b)$ имеют место неравенства $\lambda(\mathfrak{M}, \xi_k) \geq \lambda(\mathfrak{M}, \eta_k)$ для всех $k \in \{1, \dots, n\}$.

О п р е д е л е н и е 2. При всяком $b \in B$ всякий наименьший элемент множества $\Xi(b)$, наделенного отноше-

нием предпорядка в определении 1, называется *нормальным базисом* слоя $p^{-1}(b)$.

Доказательство существования нормальных базисов любого слоя будет изложено в следующих параграфах.

§ 3. 1. При всяких $b \in B$, $\lambda \in \bar{\mathbf{R}}$ определим множество

$$E(\mathfrak{M}, b, \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \{\xi \in p^{-1}(b) : \lambda(\mathfrak{M}, \xi) \leq \lambda\}. \quad (4)$$

Из леммы 1 и того обстоятельства, что для всякого $b \in B$ показатель Ляпунова нулевого вектора равен $-\infty$ (и, следовательно, \leq любого $\lambda \in \bar{\mathbf{R}}$), вытекает, что при всяких $b \in B$, $\lambda \in \bar{\mathbf{R}}$ множество $E(\mathfrak{M}, b, \lambda)$ есть векторное подпространство слоя $p^{-1}(b)$. Таким образом, определено отображение

$$E(\mathfrak{M}, b, \cdot) : \bar{\mathbf{R}} \rightarrow \widehat{p^{-1}(b)} \quad (5)$$

расширенной числовой прямой $\bar{\mathbf{R}}$ в множество $\widehat{p^{-1}(b)}$ всех векторных подпространств слоя $p^{-1}(b)$.

Имеет место

ЛЕММА 2. Для всякого $b \in B$ отображение (5) принимает не более $n + 1$ различных значений.

Эта лемма легко выводится из формулы (4); впрочем, в [2] изложено ее доказательство.

2. Пусть фиксировано любое $b \in B$. В силу леммы 2 имеется $m \in \{0, \dots, n\}$ и имеются точки $\mu_0 < \dots < \mu_m$ расширенной числовой прямой, такие, что значение отображения (5) в любой точке равно одной из точек $E(\mathfrak{M}, b, \mu_0), \dots, E(\mathfrak{M}, b, \mu_m)$ множества $\widehat{p^{-1}(b)}$, причем все эти $E(\mathfrak{M}, b, \mu_0), \dots, E(\mathfrak{M}, b, \mu_m)$ различны. Из формулы (4) следует, что отображение (5) — монотонно неубывающее, т. е. $E(\mathfrak{M}, b, \mu) \subset E(\mathfrak{M}, b, \nu)$ для всяких точек $\mu \leq \nu$ расширенной прямой $\bar{\mathbf{R}}$. Поэтому из цепочки неравенств $\mu_0 < \dots < \mu_m$ следует цепочка (нестрогих) включений:

$$E(\mathfrak{M}, b, \mu_0) \subset \dots \subset E(\mathfrak{M}, b, \mu_m). \quad (6)$$

Так как подпространства, входящие в эту цепочку, все различны, то все включения в цепочке (6) в действительности — строгие.

3. ЛЕММА 3. Для всякого $b \in B$ имеет место равенство

$$E(\mathfrak{M}, b, \mu_m) = p^{-1}(b),$$

где $E(\mathfrak{M}, b, \mu_m)$ определено в предыдущем пункте.

Доказательство. Пусть дано $b \in B$. Из того, что $\lambda(\mathfrak{M}, \xi) \in \overline{\mathbf{R}}$ для всякого $\xi \in E$, следует, что $\lambda(\mathfrak{M}, \xi) \leq \leq +\infty$ для всякого $\xi \in p^{-1}(b)$. С помощью формулы (4) последнее утверждение можно переписать в виде равенства $E(\mathfrak{M}, b, +\infty) = p^{-1}(b)$. Таким образом, слой $p^{-1}(b)$ является одним из значений отображения (5) и потому $p^{-1}(b) = E(\mathfrak{M}, b, \mu_k)$ для некоторого $k \in \{0, \dots, \dots, m\}$. Так как в силу (6) имеет место включение $E(\mathfrak{M}, b, \mu_k) \subset E(\mathfrak{M}, b, \mu_m)$, то

$$p^{-1}(b) \subset E(\mathfrak{M}, b, \mu_m). \quad (7)$$

Из формулы (4) следует, что $E(\mathfrak{M}, b, \lambda) \subset p^{-1}(b)$ для всякого $\lambda \in \overline{\mathbf{R}}$. В частности, $E(\mathfrak{M}, b, \mu_m) \subset p^{-1}(b)$. Соединив это включение с включением (7), получаем утверждение леммы. Лемма доказана.

4. Фиксируем любое $b \in B$. Пусть $E(\mathfrak{M}, b, \mu_0) \subset \subset \dots \subset E(\mathfrak{M}, b, \mu_m)$ — подпространства слоя $p^{-1}(b)$, определенные в п. 2. Положим

$$d_s \stackrel{\text{def}}{=} \dim E(\mathfrak{M}, b, \mu_s) \quad (s \in \{0, \dots, m\}). \quad (8)$$

Из цепочки строгих включений (6) и формулы (8) вытекает цепочка строгих неравенств

$$d_0 < \dots < d_m. \quad (9)$$

Из формулы (8) вследствие леммы 3 вытекает равенство

$$d_m = n. \quad (10)$$

Определение 3. Пусть $b \in B$. Положим

$$E_k(\mathfrak{M}, b) = \begin{cases} E(\mathfrak{M}, b, \mu_0) & \text{при } k \in \{1, \dots, d_0\}, \\ & \text{если } d_0 \neq 0; \\ E(\mathfrak{M}, b, \mu_s) & \text{при } k \in \{d_{s-1} + 1, \dots, d_s\} \\ & (s \in \{1, \dots, m\}), \\ & \text{если } m \neq 0. \end{cases}$$

Предложение 1. Пусть $b \in B$. Определением 3 подпространства $E_k(\mathfrak{M}, b)$ определены при всех $k \in \in \{1, \dots, n\}$. Имеют место: цепочка нестрогих включений $E_1(\mathfrak{M}, b) \subset \dots \subset E_n(\mathfrak{M}, b)$, неравенство $E_1(\mathfrak{M}, b) \neq \{0_b\}$ и равенство $E_n(\mathfrak{M}, b) = p^{-1}(b)$.

Доказательство. Первый случай: $d_0 = 0, m = 0$.

Из $m = 0$ в силу леммы 3 следует равенство $p^{-1}(b) = E(\mathfrak{M}, b, \mu_0)$, а из $d_0 = 0$ в силу (8) следует, что $E(\mathfrak{M}, b, \mu_0) = \{0_b\}$. Поэтому в рассматриваемом случае $p^{-1}(b) = \{0_b\}$. Это невозможно, поскольку $\dim p^{-1}(b) = n \in \mathbb{N}$ — последнее условие наложено в п. 1 § 2. Мы доказали, что первый случай никогда не реализуется.

В т о р о й с л у ч а й: $d_0 \neq 0, m = 0$. Определение 3 превращается в этом случае в такое определение:

$$E_k(\mathfrak{M}, b) = E(\mathfrak{M}, b, \mu_0) \quad (k \in \{1, \dots, d_0\}).$$

Из $m = 0$ в силу (10) вытекает равенство

$$d_0 = n. \quad (11)$$

Следовательно, определение 3 в рассматриваемом случае переписывается в виде

$$E_k(\mathfrak{M}, b) = E(\mathfrak{M}, b, \mu_0) \quad (k \in \{1, \dots, n\})$$

и потому определяет $E_k(\mathfrak{M}, b)$ для всех $k \in \{1, \dots, n\}$. Отсюда следуют равенства $E_1(\mathfrak{M}, b) = \dots = E_n(\mathfrak{M}, b)$ и $\dim E_1(\mathfrak{M}, b) = \dim E(\mathfrak{M}, b, \mu_0) = d_0 = n > 0$. Предпоследнее равенство следует из (8), последнее равенство — из (11), а условие $n > 0$ наложено в п. 1 § 2. Следовательно, $E_1(\mathfrak{M}, b) \neq \{0_b\}$. Далее, поскольку $E_n(\mathfrak{M}, b) = E(\mathfrak{M}, b, \mu_0)$, а $m = 0$, то $E_n(\mathfrak{M}, b) = E(\mathfrak{M}, b, \mu_m)$. Отсюда в силу леммы 3 следует равенство $E_n(\mathfrak{M}, b) = p^{-1}(b)$. Предложение в рассматриваемом случае доказано.

Т р е т ь и й с л у ч а й: $d_0 = 0, m \neq 0$. В этом случае определение 3 выглядит следующим образом:

$$E_k(\mathfrak{M}, b) = E(\mathfrak{M}, b, \mu_s) \quad \text{при } k \in \{d_{s-1} + 1, \dots, d_s\} \quad (12)$$

$$(s \in \{1, \dots, m\}).$$

Из (9), (10) следует, что целочисленные отрезки $\{d_{s-1} + 1, \dots, d_s\}$ ($s \in \{1, \dots, m\}$) образуют разбиение целочисленного отрезка $\{d_0 + 1, \dots, n\}$. Так как d_0 сейчас равно нулю, то $\{d_0 + 1, \dots, n\} = \{1, \dots, n\}$. Поэтому формула (12) определяет $E_k(\mathfrak{M}, b)$ для всех $k \in \{1, \dots, n\}$, причем из (6), (12) следует цепочка нестрогих включений $E_1(\mathfrak{M}, b) \subset \dots \subset E_n(\mathfrak{M}, b)$. Так как d_0 сейчас равно нулю, то, положив в (12) $s = 1, k = 1$, получаем равенство

$$E_1(\mathfrak{M}, b) = E(\mathfrak{M}, b, \mu_1). \quad (13)$$

В цепочке строгих включений (6) содержится строгое включение $E(\mathfrak{M}, b, \mu_1) \supset E(\mathfrak{M}, b, \mu_0)$ векторных подпространств слоя $p^{-1}(b)$. Отсюда следует, что $E(\mathfrak{M}, b, \mu_1) \neq \{0_b\}$. Поэтому в силу (13) имеем $E_1(\mathfrak{M}, b) \neq \{0_b\}$.

Из (10) следует: $n \in \{d_{m-1} + 1, d_m\}$, поэтому в формуле (12) содержится равенство $E_n(\mathfrak{M}, b) = E(\mathfrak{M}, b, \mu_m)$. Из него в силу леммы 3 следует, что $E_n(\mathfrak{M}, b) = p^{-1}(b)$. Предложение в третьем случае доказано.

Ч е т в е р т ы й с л у ч а й: $d_0 \neq 0, m \neq 0$. Определение 3 в этом случае избавляется от обоих «если» и превращается в следующее определение:

$$E_k(\mathfrak{M}, b) = \begin{cases} E(\mathfrak{M}, b, \mu_0) & \text{при } k \in \{1, \dots, d_0\}, \\ E(\mathfrak{M}, b, \mu_s) & \text{при } k \in \{d_{s-1} + 1, \dots, d_s\} \quad (14) \\ & (s \in \{1, \dots, m\}). \end{cases}$$

Из (9), (10) следует, что целочисленные отрезки

$$\{1, \dots, d_0\}, \{d_{s-1} + 1, \dots, d_s\} \quad (s \in \{1, \dots, m\})$$

образуют разбиение множества $\{1, \dots, n\}$. Поэтому формула (14) определяет $E_k(\mathfrak{M}, b)$ для всех $k \in \{1, \dots, n\}$, причем из (6), (14) следует цепочка нестрогих включений $E_1(\mathfrak{M}, b) \subset \dots \subset E_n(\mathfrak{M}, b)$.

Положив в формуле (14) $k = 1$, получаем равенство

$$E_1(\mathfrak{M}, b) = E(\mathfrak{M}, b, \mu_0). \quad (15)$$

Так как в рассматриваемом сейчас случае число $d_0 = \dim E(\mathfrak{M}, b, \mu_0)$ отлично от нуля, то из равенства (15) следует, что $E_1(\mathfrak{M}, b) \neq \{0_b\}$.

Из формулы (10) следует, что $n \in \{d_{m-1} + 1, d_m\}$, поэтому в формуле (14) содержится равенство $E_n(\mathfrak{M}, b) = E(\mathfrak{M}, b, \mu_m)$, из которого в силу леммы 3 вытекает равенство $E_n(\mathfrak{M}, b) = p^{-1}(b)$. Мы доказали предложение и в четвертом случае. Предложение доказано.

5. О п р е д е л е н и е 4. Показатель Ляпунова $\lambda_k(\mathfrak{M}, b)$, где $k \in \{1, \dots, n\}$, $b \in B$, определяется формулой

$$\lambda_k(\mathfrak{M}, b) = \sup_{\xi \in E_{n-k+1}(\mathfrak{M}, b)} \lambda(\mathfrak{M}, \xi),$$

где $\lambda(\mathfrak{M}, \xi)$ определено формулой (2).

6. Напомним некоторые свойства подпространств $E_k(\mathfrak{M}, b)$ и показателей $\lambda_k(\mathfrak{M}, b)$, определенных в двух предыдущих пунктах. Эти свойства выражаются следую-

щими четырьмя предложениями, доказанными в [2]. В цитируемой статье это — предложения 1, 3—5.

Предложение 2. Для всякого $b \in B$ имеет место цепочка неравенств

$$\lambda_1(\mathfrak{M}, b) \geq \dots \geq \lambda_n(\mathfrak{M}, b).$$

Предложение 3. Для всяких $k \in \{1, \dots, n\}$, $b \in B$ имеет место равенство

$$E_{n-k+1}(\mathfrak{M}, b) = \{\xi \in p^{-1}(b) : \lambda(\mathfrak{M}, \xi) \leq \lambda_k(\mathfrak{M}, b)\}.$$

Предложение 4. Пусть $b \in B$. Тогда при всяких

$$k \in \{1, \dots, n-1\}, \xi \in E_{n-k+1}(\mathfrak{M}, b) \setminus E_{n-k}(\mathfrak{M}, b)$$

имеет место равенство $\lambda(\mathfrak{M}, \xi) = \lambda_k(\mathfrak{M}, b)$, а при всяком $\xi \in E_1(\mathfrak{M}, b)_*$ — равенство $\lambda(\mathfrak{M}, \xi) = \lambda_n(\mathfrak{M}, b)$.

Предложение 5. Пусть $b \in B$. Тогда при всяком $k \in \{1, \dots, n-1\}$ имеет место неравенство $\dim E_{n-k}(\mathfrak{M}, b) \geq n-k$, а для равенства $\dim E_{n-k}(\mathfrak{M}, b) = n-k$ необходимо и достаточно, чтобы $E_{n-k+1}(\mathfrak{M}, b) \neq E_{n-k}(\mathfrak{M}, b)$.

§ 4. В этом параграфе доказывается, что в каждом слое $p^{-1}(b)$ существуют нормальные базисы семейства \mathfrak{M} эндоморфизмов метризованного абстрактного векторного расслоения (E, p, B) . Это делается в несколько шагов. Прежде чем сформулировать предложение 6, представляющее собой первый шаг к этому доказательству, напомним обозначение $\Xi(b)$, введенное выше в определении 1. Так обозначается множество всех базисов слоя $p^{-1}(b)$, векторы которых занумерованы в порядке невозрастания показателей Ляпунова.

Предложение 6. Пусть $b \in B$, $\{\xi_1, \dots, \xi_n\} \in \Xi(b)$. Тогда $\lambda(\mathfrak{M}, \xi_k) \geq \lambda_k(\mathfrak{M}, b)$ для всех $k \in \{1, \dots, n\}$.

Доказательство. Так как $\{\xi_1, \dots, \xi_n\} \in \Xi(b)$, то

$$\lambda(\mathfrak{M}, \xi_1) \geq \dots \geq \lambda(\mathfrak{M}, \xi_n). \quad (16)$$

Предположим противное тому, что утверждается в доказываемом предложении: пусть

$$\lambda(\mathfrak{M}, \xi_k) < \lambda_k(\mathfrak{M}, b) \quad (17)$$

для некоторого $k \in \{1, \dots, n\}$. Обозначим через m наибольшее из тех $l \in \{k, \dots, n\}$, для которых $\lambda_l(\mathfrak{M}, b) =$

$= \lambda_l(\mathfrak{M}, b)$. Тогда

$$\lambda_k(\mathfrak{M}, b) = \lambda_m(\mathfrak{M}, b), \quad (18)$$

причем либо $m = n$, либо $m < n$ и $\lambda_{m+1}(\mathfrak{M}, b) \neq \lambda_m(\mathfrak{M}, b)$. Из (17), (18) следует неравенство

$$\lambda(\mathfrak{M}, \xi_k) < \lambda_m(\mathfrak{M}, b). \quad (19)$$

Так как $m \geq k$, то из (16) вытекает, что $\lambda(\mathfrak{M}, \xi_i) \leq \lambda(\mathfrak{M}, \xi_k)$ при всяком $i \in \{m, \dots, n\}$. Отсюда в силу (19) следует

$$\lambda(\mathfrak{M}, \xi_i) < \lambda_m(\mathfrak{M}, b) \quad (i \in \{m, \dots, n\}). \quad (20)$$

Первый случай: $m = n$. Тогда (20) превращается в неравенство $\lambda(\mathfrak{M}, \xi_n) < \lambda_n(\mathfrak{M}, b)$, противоречащее предложениям 2, 4, соединенным с равенством $E_n(\mathfrak{M}, b) = p^{-1}(b)$, содержащимся в предложении 1. Придя к противоречию, мы доказали предложение в случае $m = n$.

Второй случай: $m < n$. Тогда, как отмечено выше, $\lambda_{m+1}(\mathfrak{M}, b) \neq \lambda_m(\mathfrak{M}, b)$. Отсюда в силу определения 4 вытекает неравенство

$$E_{n-m}(\mathfrak{M}, b) \neq E_{n-m+1}(\mathfrak{M}, b). \quad (21)$$

Последнее неравенство вследствие включений $E_1(\mathfrak{M}, b) \subset \dots \subset E_n(\mathfrak{M}, b)$ (утверждение о наличии этих включений составляет часть предложения 1) эквивалентно неравенству

$$E_{n-m+1}(\mathfrak{M}, b) \setminus E_{n-m}(\mathfrak{M}, b) \neq \emptyset.$$

В силу предложения 5 из (21) следует равенство

$$\dim E_{n-m}(\mathfrak{M}, b) = n - m. \quad (22)$$

Из (20) в силу предложений 2, 4 следует, что $\xi_i \in E_{n-m}(\mathfrak{M}, b)$ при всех $i \in \{m, \dots, n\}$. Получилось, что $n - m + 1$ линейно независимых векторов ξ_m, \dots, ξ_n содержатся в векторном пространстве $E_{n-m}(\mathfrak{M}, b)$, размерность которого, согласно (22), равна $n - m < n - m + 1$. Придя к противоречию, мы доказали предложение и в случае $m < n$. Предложение доказано.

ЛЕММА 4. Для всякого $b \in B$ существует базис $\{\xi_1, \dots, \xi_n\} \in \Xi(b)$, такой, что $\lambda(\mathfrak{M}, \xi_k) \leq \lambda_k(\mathfrak{M}, b)$ для всех $k \in \{1, \dots, n\}$.

Доказательство. Пусть дано $b \in B$.

1) Согласно предложению 1, имеет место цепочка нестрогих включений $E_1(\mathfrak{M}, b) \subset \dots \subset E_n(\mathfrak{M}, b)$.

Положим $L_1 = E_1(\mathfrak{M}, b)$,

$$L_k = E_k(\mathfrak{M}, b)/E_{k-1}(\mathfrak{M}, b) \quad (k \in \{2, \dots, n\}).$$

Обозначим через φ_1 тождественное отображение $E_1(\mathfrak{M}, b)$ на L_1 (т. е. на себя самого), а через φ_k ($k \in \{2, \dots, n\}$) — естественный эпиморфизм $E_k(\mathfrak{M}, b)$ на L_k . Положим

$$r_k \stackrel{\text{def}}{=} \dim L_k \quad (k \in \{1, \dots, n\}).$$

При всяком $k \in \{1, \dots, n\}$, таком, что $r_k \neq 0$, выберем в пространстве L_k какой-нибудь базис $\eta(k, 1), \dots, \eta(k, r_k)$.

2) При всяком $k \in \{1, \dots, n\}$, таком, что $r_k \neq 0$, при всяком $i \in \{1, \dots, r_k\}$ в множестве $\varphi_k^{-1}\eta(k, i)$ (т. е. в полном прообразе вектора $\eta(k, i)$ при отображении φ_k) выберем любой вектор и обозначим его через $\xi(k, i)$. Хорошо известно (и легко доказывается), что совокупность так полученных векторов $\xi(k, i)$ является базисом слоя $p^{-1}(b)$.

3) Занумеровав векторы этого базиса в порядке невозрастания их показателей Ляпунова, получим некоторый базис $\{\xi_1, \dots, \xi_n\} \in \Xi(b)$.

4) При всяком $i \in \{1, \dots, r_1\}$ (напомним, что $r_1 = \dim E_1(\mathfrak{M}, b) \neq 0$), — в этом состоит одно из утверждений предложения 1) векторы $\xi(1, i)$ лежат в $E_1(\mathfrak{M}, b)$ согласно их определению. При всяком $k \in \{2, \dots, n\}$, таком, что $r_k \neq 0$, при всяком $i \in \{1, \dots, r_k\}$ имеем

$$\xi(k, i) \in E_k(\mathfrak{M}, b) \setminus E_{k-1}(\mathfrak{M}, b).$$

Это следует из того, что образ $\eta(k, i) = \varphi_k \xi(k, i)$ вектора $\xi(k, i)$ в фактор-пространстве $L_k = E_k(\mathfrak{M}, b)/E_{k-1}(\mathfrak{M}, b)$ отличен от нуля (поскольку этот образ есть по определению элемент базиса пространства L_k).

5) Из предыдущего пункта следует: а) r_1 векторов построенного базиса лежат в $E_1(\mathfrak{M}, b)$, б) при всяком $k \in \{2, \dots, n\}$, таком, что $r_k \neq 0$, число векторов построенного базиса, лежащих в $E_k(\mathfrak{M}, b) \setminus E_{k-1}(\mathfrak{M}, b)$, равно r_k .

Добавим теперь к этому, что при всяком $k \in \{2, \dots, n\}$, таком, что $r_k = 0$, число векторов построенного базиса, лежащих в $E_k(\mathfrak{M}, b) \setminus E_{k-1}(\mathfrak{M}, b)$, равно $0 = r_k$. В самом деле,

$$r_k \stackrel{\text{def}}{=} \dim (E_k(\mathfrak{M}, b)/E_{k-1}(\mathfrak{M}, b)),$$

и потому из равенства $r_k = 0$ следует, что теоретико-множественная разность $E_k(\mathfrak{M}, b) \setminus E_{k-1}(\mathfrak{M}, b)$ пуста.

6) Из предыдущего пункта следует, что при всяком $l \in \{1, \dots, n\}$ число векторов построенного базиса, лежащих в $E_l(\mathfrak{M}, b)$, равно

$$\sum_{k=1}^l r_k = \sum_{k=1}^l \dim L_k = \dim E_1(\mathfrak{M}, b) + \\ + \sum_{k=2}^l (\dim E_k(\mathfrak{M}, b) - \dim E_{k-1}(\mathfrak{M}, b)) = \dim E_l(\mathfrak{M}, b).$$

7) Напомним, что

$$\lambda(\mathfrak{M}, \xi_1) \geq \dots \geq \lambda(\mathfrak{M}, \xi_n) \quad (23)$$

(см. п. 3), — это и означает, что базис $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ принадлежит множеству $\Xi(b)$.

Предположим, что для некоторого $k \in \{1, \dots, n\}$ имеет место строгое неравенство $\lambda(\mathfrak{M}, \xi_k) > \lambda_k(\mathfrak{M}, b)$. Тогда из (23) следует, что $\lambda(\mathfrak{M}, \xi_i) > \lambda_k(\mathfrak{M}, b)$ при всяком $i \in \{1, \dots, k\}$. В силу предложения 3 это означает, что

$$\xi_i \notin E_{n-k+1}(\mathfrak{M}, b) \quad (i \in \{1, \dots, k\}). \quad (24)$$

Имеет место неравенство

$$\dim E_{n-k+1}(\mathfrak{M}, b) \geq n - k + 1; \quad (25)$$

если $n - k + 1 \neq n$, то это неравенство следует из предложения 5, если же $n - k + 1 = n$, то (25) вытекает из равенства $E_n(\mathfrak{M}, b) = p^{-1}(b)$, составляющего содержание одного из утверждений предложения 1. Из (24), (25) следует, что число векторов базиса $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$, лежащих в $E_{n-k+1}(\mathfrak{M}, b)$, строго меньше $\dim E_{n-k+1}(\mathfrak{M}, b)$. Это противоречит результату п. 6. Противоречие выведено из предположения, что для некоторого $k \in \{1, \dots, n\}$ выполнено строгое неравенство $\lambda(\mathfrak{M}, \xi_k) > \lambda_k(\mathfrak{M}, b)$. Следовательно, $\lambda(\mathfrak{M}, \xi_k) \leq \lambda_k(\mathfrak{M}, b)$ для всех $k \in \{1, \dots, n\}$. Лемма доказана.

Прежде чем двинуться дальше, напомним, что нормальные базисы были определены в конце § 2 — см. определение 2.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $b \in V$. Нормальные базисы слоя $p^{-1}(b)$ существуют. Базис $\{\eta_1, \dots, \eta_n\} \in \Xi(b)$ является нормальным в том и только в том случае, если $\lambda(\mathfrak{M}, \eta_k) = \lambda_k(\mathfrak{M}, b)$ для всех $k \in \{1, \dots, n\}$.

Доказательство. 1). В силу предложения 6 для всякого базиса $\{\eta_1, \dots, \eta_n\} \in \Xi(b)$ имеют место

неравенства

$$\lambda(\mathfrak{M}, \eta_k) \geq \lambda_k(\mathfrak{M}, b) \quad (k \in \{1, \dots, n\}). \quad (26)$$

В силу леммы 4 существует базис $\{\xi_1, \dots, \xi_n\} \in \Xi(b)$, для которого

$$\lambda(\mathfrak{M}, \xi_k) \leq \lambda_k(\mathfrak{M}, b) \quad (k \in \{1, \dots, n\}). \quad (27)$$

Фиксируем такой базис. Положив в (26) $\eta_k = \xi_k$ ($k \in \{1, \dots, n\}$), получим $\lambda(\mathfrak{M}, \xi_k) \geq \lambda_k(\mathfrak{M}, b)$ ($k \in \{1, \dots, n\}$). Отсюда в силу (27) следует

$$\lambda(\mathfrak{M}, \xi_k) = \lambda_k(\mathfrak{M}, b) \quad (k \in \{1, \dots, n\}). \quad (28)$$

Из фразы, содержащей формулу (26), в силу (28) вытекает следующее. Для всякого базиса $\{\eta_1, \dots, \eta_n\} \in \Xi(b)$ имеют место неравенства

$$\lambda(\mathfrak{M}, \eta_k) \geq \lambda(\mathfrak{M}, \xi_k) \quad (k \in \{1, \dots, n\}).$$

Эти неравенства означают, что базис $\{\xi_1, \dots, \xi_n\} \in \Xi(b)$ является нормальным.

2) Пусть базис $\{\eta_1, \dots, \eta_n\} \in \Xi(b)$ является нормальным, т. е. $\lambda(\mathfrak{M}, \zeta_k) \geq \lambda(\mathfrak{M}, \eta_k)$ ($k \in \{1, \dots, n\}$) для всякого базиса $\{\zeta_1, \dots, \zeta_n\} \in \Xi(b)$. Положив здесь $\zeta_k = \xi_k$ ($k \in \{1, \dots, n\}$), где $\{\xi_1, \dots, \xi_n\} \in \Xi(b)$ — базис, удовлетворяющий равенствам (28), — существование этого базиса доказано в предыдущем пункте, получаем

$$\lambda_k(\mathfrak{M}, b) \geq \lambda(\mathfrak{M}, \eta_k) \quad (k \in \{1, \dots, n\}). \quad (29)$$

С другой стороны,

$$\lambda(\mathfrak{M}, \eta_k) \geq \lambda_k(\mathfrak{M}, b) \quad (k \in \{1, \dots, n\}) \quad (30)$$

в силу предложения 6. Из (29), (30) следует

$$\lambda(\mathfrak{M}, \eta_k) = \lambda_k(\mathfrak{M}, b) \quad (k \in \{1, \dots, n\}). \quad (31)$$

3) Пусть базис $\{\eta_1, \dots, \eta_n\} \in \Xi(b)$ удовлетворяет равенствам (31). В силу предложения 6 для всякого базиса $\{\zeta_1, \dots, \zeta_n\} \in \Xi(b)$ имеют место неравенства

$$\lambda(\mathfrak{M}, \zeta_k) \geq \lambda_k(\mathfrak{M}, b) \quad (k \in \{1, \dots, n\}). \quad (32)$$

Из (31), (32) следует

$$\lambda(\mathfrak{M}, \zeta_k) \geq \lambda(\mathfrak{M}, \eta_k) \quad (k \in \{1, \dots, n\}). \quad (33)$$

Доказав формулу (33) для всякого базиса $\{\zeta_1, \dots, \zeta_n\} \in \Xi(b)$, мы доказали, что базис $\{\eta_1, \dots, \eta_n\} \in \Xi(b)$ является нормальным. Теорема доказана.

§ 5. 1. Прежде чем закончить абстрактное изложение и перейти к конкретизации, обсудим одну деталь. Даже при поверхностном сравнении определения 2 с определением нормальной фундаментальной системы решений линейной системы дифференциальных уравнений, воспроизведенным в § 1, легко заметить, что в обоих случаях нормальный базис определяется как наименьший элемент множества базисов, однако отношение предпорядка в одном случае отличается от отношения предпорядка в другом случае. Рассмотрения настоящего параграфа направлены на то, чтобы показать, что эта несогласованность в определениях — лишь кажущаяся. Впрочем, поспешим заметить, что только что написанное соображение носит сугубо предварительный характер. Для настоящего, а не поверхностного сравнения упомянутых определений почва пока не подготовлена. Для подготовки следует вложить ситуацию § 1 в ситуацию, рассмотренную в § 2—4, а этим мы займемся лишь в следующем параграфе.

2. ТЕОРЕМА 2. Для всяких $k \in \{1, \dots, n\}$, $b \in B$ имеет место равенство

$$\lambda_k(\mathfrak{M}, b) = \max_{\xi \in E_{n-k+1}(\mathfrak{M}, b)} \lambda(\mathfrak{M}, \xi).$$

Эта теорема доказана в [2] — см. предложение 2 цитируемой статьи.

3. Начиная с этого места и до конца параграфа считаем фиксированной некоторую точку $b \in B$. Наложим ограничение на семейство \mathfrak{M} : потребуем, чтобы показатель Ляпунова всякого ненулевого вектора слоя $p^{-1}(b)$ был числом, а не символом $-\infty$ или $+\infty$:

$$\lambda(\mathfrak{M}, \xi) \in \mathbf{R} \quad \text{для всякого } \xi \in p^{-1}(b)_*.$$

Это ограничение, которое будет предполагаться выполненным на протяжении всей оставшейся части § 5, приводит к тому, что

$$\lambda_k(\mathfrak{M}, b) \in \mathbf{R} \quad (k \in \{1, \dots, n\}).$$

Последнее вытекает из наложенного ограничения в силу теоремы 2.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $b \in B$. Пусть $\lambda(\mathfrak{M}, \xi) \in \mathbf{R}$ для всякого $\xi \in p^{-1}(b)_*$. Тогда базис $\{\eta_1, \dots, \eta_n\} \in \Xi(b)$ является нормальным в том и только в том случае, если для всякого базиса $\{\zeta_1, \dots, \zeta_n\} \in \Xi(b)$ имеет

место неравенство

$$\sum_{k=1}^n \lambda(\mathfrak{M}, \zeta_k) \geq \sum_{k=1}^n \lambda(\mathfrak{M}, \eta_k). \quad (34)$$

Доказательство. 1) Пусть $\{\eta_1, \dots, \eta_n\} \in \Xi(b)$ — нормальный базис. Согласно определению 2, это означает, что для всякого $\{\zeta_1, \dots, \zeta_n\} \in \Xi(b)$ имеют место неравенства

$$\lambda(\mathfrak{M}, \zeta_k) \geq \lambda(\mathfrak{M}, \eta_k) \quad (k \in \{1, \dots, n\}).$$

Сложив эти неравенства, получаем (34).

2) Пусть базис $\{\eta_1, \dots, \eta_n\} \in \Xi(b)$ таков, что для всякого базиса $\{\zeta_1, \dots, \zeta_n\} \in \Xi(b)$ выполнено (34). Пусть $\{\xi_1, \dots, \xi_n\} \in \Xi(b)$ — нормальный базис; в силу теоремы 1 такой базис существует и для него имеет место формула

$$\lambda(\mathfrak{M}, \xi_k) = \lambda_k(\mathfrak{M}, b) \quad (k \in \{1, \dots, n\}). \quad (35)$$

Положив в (34) $\zeta_k = \xi_k$ ($k \in \{1, \dots, n\}$) и воспользовавшись равенствами (35), получим

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k(\mathfrak{M}, b) \geq \sum_{k=1}^n \lambda(\mathfrak{M}, \eta_k). \quad (36)$$

В силу предложения 6 имеют место неравенства

$$\lambda(\mathfrak{M}, \eta_k) \geq \lambda_k(\mathfrak{M}, b) \quad (k \in \{1, \dots, n\}).$$

Если бы хоть одно из этих неравенств было строгим, то, сложив их, мы получили бы строгое неравенство

$$\sum_{k=1}^n \lambda(\mathfrak{M}, \eta_k) > \sum_{k=1}^n \lambda_k(\mathfrak{M}, b),$$

которое противоречит неравенству (36). Следовательно,

$$\lambda(\mathfrak{M}, \eta_k) = \lambda_k(\mathfrak{M}, b) \quad (k \in \{1, \dots, n\}).$$

В силу теоремы 1 отсюда следует, что базис $\{\eta_1, \dots, \eta_n\} \in \Xi(b)$ является нормальным. Теорема доказана.

§ 6. Закончив на этом абстрактное изложение, вернемся к ситуации, рассматривавшейся А. М. Ляпуновым [1].

Пусть дана линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x.$$

Здесь $A(\cdot)$ — суммируемое на каждом отрезке отображение $\mathbf{R}^+ \rightarrow \text{End } E^n$, где $\text{End } E^n$ — множество всех линейных преобразований евклидова пространства E^n .

Описав таким образом фон, на котором развиваются построения А. М. Ляпунова, мы не будем далее воспроизводить его построения непосредственно в том виде, в каком читатель может познакомиться с ними по классическому изложению [1], а опишем, как аранжировать элементы этого фона, чтобы образовать одну из возможных конкретизаций абстрактной ситуации, взятой за основу изложения в этой статье. Вот как мы поступим.

1. Для построения (абстрактного) векторного расслоения (E, p, B) положим $E = E^n$; в качестве базы B возьмем множество из одного элемента — обозначим его через $\{b\}$, указывая этим, что его единственная точка обозначается через b ; наконец, пусть отображение p (проекция) по определению переводит всякую точку $\xi \in E^n$ в точку b . Таким образом, $p^{-1}(b) = E^n$.

2. Скалярное произведение на $E^n = p^{-1}(b)$ задано — это и есть риманова метрика на построенном в предыдущем пункте абстрактном векторном расслоении.

3. При всяком $t \in \mathbf{R}^+$ рассмотрим отображение $\mathfrak{X}(t, 0)$, ставящее в соответствие значению всякого решения системы $\dot{\xi} = A(t)\xi$ в точке 0 значение того же решения в точке t . При всяком $t \in \mathbf{R}^+$ определим пару отображений $X_t: E \rightarrow E$, $\chi_t: B \rightarrow B$ следующим образом:

$$X_t = \mathfrak{X}(t, 0), \quad \chi_t = 1_B.$$

Так как база B состоит из единственной точки, то при всяком $t \in \mathbf{R}^+$ так определенная пара отображений (X_t, χ_t) удовлетворяет равенству $pX_t = \chi_t p$, что вместе со свойством линейности сужения X_t ($t \in \mathbf{R}^+$) на слой $p^{-1}(b)$, вытекающей из линейности отображений $\mathfrak{X}(t, 0): E^n \rightarrow E^n$ ($t \in \mathbf{R}^+$), означает, что при всяком $t \in \mathbf{R}^+$ пара отображений (X_t, χ_t) является эндоморфизмом построенного абстрактного векторного расслоения (E, p, B) . Изложенная конструкция позволяет применить определения и результаты этой статьи к системе $\dot{\xi} = A(t)\xi$.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
23.04.85

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Л я п у н о в А. М. Собр. соч. Т. 2.—М.—Л.: Изд-во АН СССР, 1956.
- [2] М и л л и о н щ и к о в В. М. Показатели Ляпунова семейства эндоморфизмов метризованного векторного расслоения.— Математические заметки, 1985, т. 38, вып. 1, с. 92—109.
- [3] Б у р б а к и Н. Теория множеств.— М.: Мир, 1965.