А.М.Бикчентаев

О СВЯЗИ МЕЖДУ СЛУЧАЙНЫМИ И НЕЧЕТКИМИ МЕТРИКАМИ

В [9] было показано, что в пространстве Менгера можно выделить нечеткую топологию специального вида, определяемую нечеткими окрестностями обычных точек, введенную в [8]. В настоящей работе предлагается метод, дающий достаточно хорошие нечеткие топологии в случайных метрических пространствах с функциями треугольника из класса, изученного в [3]. Эти нечеткие топологии задаются нечеткими псевдоквазиметриками, определенными в [5], которые строятся из случайной метрики и пары законов композиций, участвующих в конструкции функции треугольника. Некоторые ограничения на случайные метрики и законы композиции позволяют восстановить исходную случайную метрику по построенной нечеткой псевдоквазиметрике, получить нечеткую псевдометрику и нечеткую метрику.

Оказывается, если случайное метрическое пространство компактно в топологии $\mathfrak{S}$, определенной в [2], то оно будет нечетко компактным в топологии нечеткой псевдоквазиметрики [7].

§ I. Предварительные сведения

Пусть B – множество всех невозрастающих непрерывных слева функций $\xi(r)$, определенных на всей вещественной прямой R и таких, что $\xi(r)=1$ $(r \leq 0)$, $\lim\limits_{r\to\infty} \xi(r)=0$. В B введено естественное отношение порядка: $\xi \leq \eta$, если

$\xi(r) \leq \eta(r)$ для любого $r \in R$. Относительно этого порядка множество B имеет наименьший элемент Δ: $\Delta(r) = 0$ для любого $r > 0$.

Закон композиции, определяющий в B структуру коммутативной упорядоченной полугруппы с нейтральным элементом Δ, называется функцией треугольника [4].

Определение I.I. [4]. Множество X называется случайным метрическим пространством (СМП) с функцией треугольника μ, если любой паре (x, y) элементов из X сопоставлен элемент $xy \in B$, причем имеют место аксиомы:

(СМI) $xy = \Delta$ тогда и только тогда, когда $x = y$;

(СМ2) $xy = yx$;

(СМ3) $xy \leq \mu(xz, zy)$

для любых x, y, z из X.

Определение I.2 [3]. Закон композиции S на неотрицательной полуоси вещественных чисел R_+ назовем S- функцией, если выполняются требования:

1) $S(0, a) = a$;

2) $S(a, b) = S(b, a)$;

3) $S(a, S(b, c)) = S(S(a, b), c) \equiv S(a, b, c)$;

4) $S(a, b) \leq S(a, c)$ при $b \leq c$;

5) $S(a+0, b+0) = S(a, b)$ (непрерывность справа по совокупности переменных) для любых чисел $a, b, c \in R_+$.

Приведем примеры S- функций:

$$S_r(a, b) = (a^r + b^r)^{\frac{1}{r}}, \; r > 0; \quad S_\infty(a, b) = max\,(a, b) \qquad (a, b \in R_+).$$

Закон композиции на $[0, 1]$, обладающий свойствами 1) - 5), носит специальное название t- функции [4].

Теорема I.3 [3]. Пусть S есть S-функция, T есть t- функция. Тогда соотношение

$$\mu_S^T(\xi, \eta)(r) = \begin{cases} 1 & \text{, если } r \leq 0, \\ \inf\limits_{S(r_1, r_2) < r} T(\xi(r_1), \eta(r_2)), & \text{если } r > 0 \end{cases}$$

определяет функцию треугольника на множестве B.

Пусть X - произвольное множество, $I=[0,1]$. Под нечеткими подмножествами в X мы будем понимать функции $\lambda \in I^X$. Через $supp\,\lambda=\{x\in X \mid \lambda(x)>0\}$ обозначим носитель нечеткого множества λ, q_x^α - нечеткое множество с функцией принадлежности

$$q_x^\alpha(y)=\begin{cases}\alpha, & \text{если } y=x,\\ 0, & \text{если } y\neq x,\end{cases}$$

θ - нечеткое множество с функцией принадлежности, всюду равной нулю. Напомним, что все операции над нечеткими множествами поточечные (более подробно см. [5]).

Определение I.4 [7]. Семейство $\delta\subset I^X$ называется нечеткой топологией на X, если оно содержит все постоянные функции, замкнуто относительно конечных пересечений и произвольных объединений.

Определение I.5 [7]. Семейство $\sigma\subset\delta$ называется базой нечеткой топологии δ, если каждое $\nu\in\delta$ представимо в виде $\nu=\bigvee_{j\in J}\nu_j$ с $\nu_j\in\sigma$ $(j\in J)$.

Всюду в дальнейшем будем полагать, что $\inf$ по пустому множеству равен $+\infty$, $S(+\infty,a)=+\infty$ $(a\in R_+\cup\{+\infty\})$.

§ 2. Нечеткие метрики

Пусть S есть S-функция.

Определение 2.I. Нечеткая псевдоквазиметрика (п.к.метрика) на X - это отображение $\rho: I^X\times I^X\to[0,\infty]$, удовлетворяющее следующим условиям:

(MI) $\rho(\theta,\lambda)=\infty$, если $\lambda\neq\theta$;
$\rho(\lambda,\lambda)=0$;
$\rho(\lambda,\theta)=0$;

(M2) $\rho(\lambda,\nu)\leq S(\rho(\lambda,\chi),\rho(\chi,\nu))$;

(M3) (i) $\rho(\lambda,\chi)\geq\rho(\nu,\chi)$, если $\lambda\leq\nu$;

(M4) Пусть ν, χ_α $(\alpha \in A)$ таковы, что для любого $\lambda \in I^X$ $\rho(\chi_\alpha, \lambda) < r$ влечет $\lambda \leq \nu$.

Тогда для всех χ таких, что $\rho(\bigvee_\alpha \chi_\alpha, \chi) < r$, верно $\chi \leq \nu$.

З а м е ч а н и е 2.2. Приведенные аксиомы (M1)-(M4) были предложены в [5] после детального анализа функции расстояния Хаусдорфа на подмножествах для S- функции S_1.

Как и в [5], для каждого $r \in (0, \infty)$ введем о к р е с т н о с т н о е о т о б р а ж е н и е $D_r : I^X \to I^X$, полагая

$$D_r(\lambda) = \bigvee \{ \nu \mid \rho(\lambda, \nu) < r \} .$$

В [5] показано, что для всех $r \in (0, \infty)$ справедливы следующие соотношения:

(A1) $D_r(\theta) = \theta$,

(A2) $\lambda \leq D_r(\lambda)$,

(A3) $D_r(\bigvee_\alpha \lambda_\alpha) = \bigvee_\alpha D_r(\lambda_\alpha)$.

Оказывается ([5], теорема 4.5), что если ρ - нечеткая п.к.метрика на X с окрестностными отображениями $\{ D_r \mid r > 0 \}$, то

$$\rho(\lambda, \nu) = \inf \{ r \mid \nu \leq D_r(\lambda) \} \qquad (\lambda, \nu \in I^X).$$

Нетрудно заметить, что окрестностные отображения $\{ D_r \mid r > 0 \}$ нечеткой п.к.метрики ρ удовлетворяют неравенству

$$D_r \circ D_\alpha \leq D_{S(r,\alpha)} .$$

П р е д л о ж е н и е 2.3. Если $\{ D_r \mid r \in (0, \infty) \}$ - семейство отображений $D_r : I^X \to I^X$, удовлетворяющих (A1)-(A3) и таких, что $D_r \circ D_\alpha \leq D_{S(r,\alpha)}$ для всех $r, \alpha \in (0, \infty)$, то отображение $\rho : I^X \times I^X \to [0, \infty]$, определенное соотношением $\rho(\lambda, \nu) = \inf \{ r \mid \nu \leq D_r(\lambda) \}$, является нечеткой п.к.метрикой на X. Далее, ее окрестностные отображения (обозначим их через E_r) имеют вид $E_r = \bigvee_{\alpha < r} D_\alpha$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Свойства (M1), (M3), (M4) получены в [5], исходя из (A1)-(A3). (M2) доказано там же для S - функции S_1. Покажем справедливость (M2) в общем случае.

Пусть $\lambda, \chi, \nu \in I^X$. Для $r > \rho(\lambda,\chi)$ и $a > \rho(\chi,\nu)$ имеем $\chi \le D_r(\lambda)$ и $\nu \le D_a(\chi)$. Тогда $\nu \le D_a \circ D_r(\lambda) \le D_{S(a,r)}(\lambda)$ и, по определению ρ, $\rho(\lambda,\nu) \le S(a,r)$, откуда следует $\rho(\lambda,\nu) \le S(\rho(\lambda,\chi), \rho(\chi,\nu))$.

Пример 2.4. Покажем, что используя непрерывную S - функцию S, на произвольном множестве X можно задать нечеткую п.к. метрику. Для $x \in X$, $\lambda \in I^X$, $r > 0$ положим

$$D_r(\lambda)(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ если } x \notin \operatorname{supp}\lambda, \\ \min\{S(\lambda(x), r), 1\} & , \text{ если } x \in \operatorname{supp}\lambda. \end{cases}$$

Очевидно, что семейство $\{D_r \mid r > 0\}$ удовлетворяет (A1) - (A3).

Пусть $r, a \in (0,\infty)$, $x \in \operatorname{supp}\lambda$.

$$D_r \circ D_a(\lambda)(x) = \min\{S(\min\{S(\lambda(x), a), 1\}, r), 1\} =$$

$$= \min\{\min\{S(S(\lambda(x), a), r), 1\}, \min\{S(1, r), 1\}\} \le$$

$$\le \min\{S(\lambda(x), S(r,a)), 1\} = D_{S(r,a)}(\lambda)(x).$$

Тогда по предложению 2.3

$$\rho(\lambda,\nu) = \begin{cases} +\infty & , \text{ если } \operatorname{supp}\nu \setminus \operatorname{supp}\lambda \ne \emptyset, \\ \sup\limits_{x \in \operatorname{supp}\nu} \inf\{r \mid \nu(x) \le \min\{S(\lambda(x), r), 1\}\}, & \text{ если } \operatorname{supp}\nu \subset \operatorname{supp}\lambda. \end{cases}$$

Теорема 2.5. Пусть ρ - нечеткая п.к.метрика на X с окрестностными отображениями D_r и S-функция S строго монотонна по одному аргументу при фиксированных значениях другого. Тогда семейство $\{D_r(\lambda) \mid \lambda \in I^X, r \in (0,\infty)\}$ образует базу некоторой нечеткой топологии на X. Эта нечеткая топология называется топологией нечеткой п.к. метрики ρ.

Доказательство. Достаточно показать, что для всех $\lambda, \nu \in I^X$, $r, a \in (0,\infty)$ можно подобрать некоторое индексное множество A и $K_\alpha \in I^X$, $b_\alpha \in (0,\infty)$ $(\alpha \in A)$ такие, что

$$D_r(\lambda) \wedge D_a(\nu) = \bigvee_{\alpha \in A} D_{b_\alpha}(K_\alpha).$$

Пусть $K = D_r(\lambda) \wedge D_a(\nu)$. Если $K = \theta$, то $K = D_r(\theta)$ (т.е. $card\, A = 1$). Если $K \neq \theta$, то

$$K = \vee\{\chi_1 \mid \rho(\lambda,\chi_1) < r\} \wedge \vee\{\chi_2 \mid \rho(\nu,\chi_2) < a\} =$$

$$= \bigvee_{\chi_1} \bigvee_{\chi_2} \{\chi_1 \wedge \chi_2 \mid \rho(\lambda,\chi_1) < r,\ \rho(\nu,\chi_2) < a\} =$$

$$= \vee\{\chi_\alpha \mid \alpha \in A\},$$

где $\chi_\alpha = \chi_{\alpha_1} \wedge \chi_{\alpha_2}$ и $\rho(\lambda,\chi_{\alpha_1}) < r$, $\rho(\nu,\chi_{\alpha_2}) < a$.

Для каждого $\alpha \in A$ положим

$$b_\alpha = \inf\{b \mid S(b,\rho(\lambda,\chi_{\alpha_1}),\rho(\nu,\chi_{\alpha_2})) \geq \min\{S(r,\rho(\nu,\chi_{\alpha_2})), S(a,\rho(\lambda,\chi_{\alpha_1}))\}\}$$

и $K_\alpha = \chi_\alpha$. Если $\rho(K_\alpha,\chi) < b_\alpha$, то $S(\rho(K_\alpha;\chi),\rho(\lambda,\chi_{\alpha_1})) < r$.

Далее, из $\chi_{\alpha_1} \geq K_\alpha$ вытекает, что $\rho(\chi_\alpha,\chi) \leq \rho(K_\alpha,\chi)$ и $S(\rho(\chi_{\alpha_1},\chi),\rho(\lambda,\chi_{\alpha_1})) < r$. Из (M2) $\rho(\lambda,\chi) < r$, следовательно, $\chi \leq D_r(\lambda)$. Аналогично, $\chi \leq D_a(\nu)$.

Далее, из $D_{b_\alpha}(K_\alpha) \leq K$ $(\alpha \in A)$ следует, что $\bigvee_{\alpha \in A} D_{b_\alpha}(K_\alpha) \leq K$. Так как $\chi_\alpha = K_\alpha \leq D_{b_\alpha}(K_\alpha)$, то $K = \bigvee_\alpha \chi_\alpha \leq \bigvee_\alpha D_{b_\alpha}(K_\alpha)$.

Т е о р е м а 2.6. Пусть X – СМП с функцией треугольника μ_S^T. Тогда формула

$$\rho(\lambda,\nu) = \sup_{y \in supp\,\nu} \inf\{r > 0 \mid \nu(y) \leq \sup_{x \in supp\,\lambda}\{1 - T(1-\lambda(x), xy(r))\}\}$$

определяет нечеткую п.к.метрику ρ на X. При этом, если СМП X и t-функция T удовлетворяют условиям

(i) $\quad xy(r) < xy(a) \quad (r > a \geq 0)$;

(ii) $\forall \beta \in (0,1)\ \exists \alpha \in (0,1)$ такое, что $1 > T(\beta,\alpha) > T(\beta,\gamma)$ $(\gamma < \alpha)$,

то по нечеткой метрике ρ можно восстановить случайную метрику

$$xy(r) = \sup\{\gamma \in I \mid \exists \alpha,\beta \in I : T(1-\alpha,\gamma) \leq 1-\beta,\ \rho(q_x^\alpha, q_y^\beta) \geq r\}. \quad (*)$$

Доказательство. Для $x \in X$, $\lambda \in I^X$, $r \in (0,\infty)$ введем $T^{\lambda}_{r,x}$ формулой

$$T^{\lambda}_{r,x}(y) = 1 - T(1-\lambda(x), xy(r)) \qquad (y \in X).$$

Положим $D_r(\lambda) = \bigvee_{x \in supp \lambda} T^{\lambda}_{r,x}$. Ясно, что семейство $\{D_r \mid r \in (0,\infty)\}$ удовлетворяет (A1) – (A3). Проверим выполнение неравенства

$$D_r \circ D_a(\lambda) \leq D_{S(r,a)}(\lambda) \qquad (\lambda \in I^X,\ r, a \in (0,\infty)).$$

Для $z \in X$ и $y \in supp\, D_a(\lambda)$ имеем

$$T^{D_a(\lambda)}_{r,y}(z) = 1 - T(1 - D_a(\lambda)(y), yz(r)) =$$

$$= 1 - T\Big(1 - \sup_{x \in supp \lambda} \big(1 - T(1-\lambda(x), xy(a))\big), yz(r)\Big) =$$

$$= \sup_{x \in supp \lambda} \big(1 - T(T(1-\lambda(x), xy(a)), yz(r))\big) =$$

$$= \sup_{x \in supp \lambda} \big(1 - T(1-\lambda(x), T(xy(a), yz(r)))\big) \leq$$

$$\leq \sup_{x \in supp \lambda} \big(1 - T(1-\lambda(x), xz(S(r,a)))\big) = D_{S(r,a)}(\lambda)(z).$$

Остается взять $\sup$ по всем $y \in supp\, D_a(\lambda)$ и применить предложение 2.3.

Пусть теперь выполнены условия (i) – (ii). Обозначим множество в правой части ($*$) через $I(x,y;r)$. Тогда из $\rho(q^{\alpha}_x, q^{\beta}_y) \geq r$ следует, что $\beta > 1 - T(1-\alpha, xy(a))$ при всех $a < r$; в то же время $\beta \leq 1 - T(1-\alpha, \gamma)$ для всех $\gamma \in I(x,y;r)$.

Таким образом, $xy(r) \geq \sup I(x,y;r)$.

Далее, пусть $\alpha \in (0,1)$ такое, что $T(1-\alpha, xy(r)) < 1$. Положим $\beta = 1 - T(1-\alpha, xy(r))$. Тогда $\rho(q^{\alpha}_x, q^{\beta}_y) = \inf\{a > 0 \mid \beta \leq 1 - T(1-\alpha, xy(a))\} = \inf\{a > 0 \mid T(1-\alpha, xy(r)) \geq T(1-\alpha, xy(a))\} = r$, тем самым $xy(r) \in I(x,y;r)$.

Теорема доказана.

Пример 2.7. Пусть $\langle X, \rho \rangle$ – метрическое пространство. Определим на X структуру СМП, положив

$$xy(r) = \begin{cases} 1, & \text{если } r \leq 0, \\ \rho(x,y)/(\rho(x,y)+r), & \text{если } r > 0. \end{cases}$$

Тогда X – СМП с функцией треугольника $\mu_{S_1}^{T_1}$ (t-функция $T_1(a,b)=min\{a+b,1\}$), с топологией , эквивалентной исходной топологии метрического пространства, удовлетворяющее условиям теоремы 2.6 (и теоремы 2.10).

О п р е д е л е н и е 2.8 [5]. Нечеткая п.к. метрика ρ на X называется нечеткой псевдометрикой, если $D_r = D_r^{-1}$ для всех $r \in (0,\infty)$, где

$$D_r^{-1}(\lambda) = \wedge\{\nu \mid D_r(\nu') \le \lambda'\} \qquad (\lambda \in I^X,\ \lambda' \equiv 1-\lambda).$$

О п р е д е л е н и е 2.9 [5]. Нечеткая псевдометрика ρ на X называется нечеткой метрикой, если

$$\Big(\bigwedge_{r>0} D_r\Big)(\lambda) = \lambda ,$$

где $\bigwedge_{r>0} D_r : I^X \to I^X$ – наибольшее отображение, удовлетворяющее (А1) – (А3) и

$$\Big(\bigwedge_{r>0} D_r\Big)(\lambda) \le D_a(\lambda) \qquad \forall a \in (0,\infty).$$

Т е о р е м а 2.10. Пусть X – СМП с функцией треугольника $\mu_S^{T_1}$. Тогда $\rho : I^X \times I^X \to [0,\infty]$, определенная по теореме 2.6, есть нечеткая псевдометрика на X . При этом ρ – нечеткая метрика на X тогда и только тогда, когда СМП X удовлетворяет условию

$$\lim_{r\to 0} xy(r) = 1 \qquad \text{для всех } x,y \in X \qquad (**).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что в теореме 2.6

$$D_r(\lambda)(z) = \sup_{x\in supp\lambda} max\{\lambda(x) - xz(r), 0\}$$

для всех $r \in (0,\infty)$, $z \in X$, $\lambda \in I^X$.

Пусть $y \in X$. Имеем

$$D_r(\lambda)(z) \ge \lambda(y) - yz(r),$$

$$[D_r(\lambda)]'(z) - zy(r) \le \lambda'(y),$$

$$\sup_{z \in supp[D_r(\lambda)]'} \max\{[D_r(\lambda)]'(z) - zy(r), 0\} \le \lambda'(y),$$

$$D_r([D_r(\lambda)]') \le \lambda'.$$

Таким образом, $D_r^{-1} \le D_r$.

Далее, если бы нашлись $r \in (0,\infty), \lambda \in I^X, y \in X$ такие, что $D_r(\lambda)(y) > D_r^{-1}(\lambda)(y)$, то для некоторого $\nu \in I^X$ имеем (а) $\nu(y) < D_r(\lambda)(y)$; (б) $D_r(\nu') \le \lambda'$.

Из (а) следует, что найдется $x \in X$ такой, что $\nu(y) < \lambda(x) - xy(r)$. Из (б) следует, что $\lambda(z) - \tilde{x}z(r) \le \nu(\tilde{x})$ для любых $\tilde{x}, z \in X$. Это противоречит (а) при $z = x$, $\tilde{x} = y$.

Покажем теперь достаточность условия (**). Заметим сначала, что, как показано Хаттоном в [6],

$$\left(\bigwedge_{r>0} D_r\right)(\lambda) = \bigwedge_{\sup\Gamma=\lambda} \bigvee_{\nu\in\Gamma} \bigwedge_{r>0} D_r(\nu),$$

где $\Gamma \subset I^X$. Для $\lambda \in I^X$ рассмотрим семейство

$$\Gamma_\lambda = \{q_x^{\lambda(x)}\}_{x \in supp\,\lambda} \subset I^X,$$

откуда

$$\bigwedge_{r>0} D_r(q_x^{\lambda(x)}) = q_x^{\lambda(x)} \qquad (q_x^{\lambda(x)} \in \Gamma_\lambda).$$

Докажем необходимость (**). Если бы нашлись $x, y \in X$ такие, что $\lim_{r\to 0+} xy(r) = t \in (0,1)$, то, очевидно,

$$\bigwedge_{r>0} D_r(q_x^\alpha) \geqslant q_x^\alpha \vee q_y^{\alpha - t} \qquad \text{для} \quad \alpha \in (t, 1].$$

Теорема доказана.

Пусть $\langle X, \delta \rangle$ – нечеткое топологическое пространство (т.е. X – множество, δ – нечеткая топология на X).

О п р е д е л е н и е 2.11 [7]. Нечеткое множество $\nu \in I^X$ называется нечетко компактным, если для всех $\beta \subset \delta$, удовлетворяющих условию $\bigvee_{\lambda\in\beta} \lambda \geqslant \nu$ и всех $\varepsilon > 0$, существует конечное подмножество $\beta_0 \subset \beta$ такое, что $\bigvee_{\lambda\in\beta_0} \lambda \geqslant \nu - \varepsilon$.

О п р е д е л е н и е 2.12 [7]. Нечеткое топологическое пространство нечетко компактно, если все нечеткие множества с постоянными функциями принадлежности в $\langle X, \delta \rangle$ нечетко компактны.

Пусть $\langle X, \tau \rangle$ – обычное топологическое пространство. Согласно [7] через $\omega(\tau)$ обозначим нечеткую топологию на X, совпадающую с семейством всех нечетких множеств с полунепрерывными снизу в топологии τ функциями принадлежности. В [7] доказано, что $\langle X, \omega(\tau) \rangle$ нечетко комплектно тогда и только тогда, когда $\langle X, \tau \rangle$ компактно.

П р е д л о ж е н и е 2.13. Пусть X – СМП с функцией треугольника μ_S^T (s– функция S такая же, как и в теореме 2.5). Обозначим через $\mathfrak{S}$ его топологию, задаваемую системой окрестностей вида $N_{\varepsilon,\tau}(x) = \{y \in X \mid xy(\tau) < \varepsilon\}_{\varepsilon,\tau > 0}$ (существование $\mathfrak{S}$ следует из теоремы 2 [3] и теоремы 4 [2]), и пусть δ_ρ – топология нечеткой п.к. метрики, получаемой по теореме 2.6. Тогда, если $\langle X, \mathfrak{S} \rangle$ компактно, $\langle X, \delta_\rho \rangle$ нечетко компактно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно показать, что нечеткие множества $T_{\tau,x}^{\lambda}$, введенные в доказательстве теоремы 2.6, имеют полунепрерывные снизу в топологии $\mathfrak{S}$ функции принадлежности.

Для $t \in (0,1)$ имеем

$$\{z \in X \mid T_{\tau,x}^{\lambda}(z) > t\} = \{z \in X \mid T(1-\lambda(x), xz(\tau)) < 1-t\} =$$

$$= \{z \in X \mid xz(\tau) < \inf\{\gamma \in I \mid T(1-\lambda(x), \gamma) \geq 1-t\}\} \in \mathfrak{S}.$$

По предложению 1 ([1, с.58]) $T_{\tau,x}^{\lambda} \in \omega(\mathfrak{S})$.

Остается применить предложение 2.3 и теорему 2.5.

З а м е ч а н и е 2.14. Пользуясь методом, предложенным в [9], покажем, что в СМП с произвольной функцией треугольника μ_S^T можно выделить нечеткую топологию, определяемую нечеткими окрестностями обычных точек [8]. Действительно, семейство

$$\Sigma = \{T_{\tau,x}^{\alpha} \mid \tau \in (0,\infty), \alpha \in (0,1]\} \subset I^X,$$

где $T_{r,x}^{\alpha}$ есть сокращенная запись для $T_{r,x}^{\lambda}$ с $\lambda = q_x^{\alpha}$ (см. теорему 2.6), образует базу нечетких окрестностей [8] точек $x \in X$. Положим

$$F(x) = \{\lambda \in I^X \mid \exists\ T_{r,x}^{\alpha} \leq \lambda,\ T_{r,x}^{\alpha} \in \Sigma\}.$$

Условия (i) – (iii) из [8] проверяются так же, как и в [9].

Покажем (iv). Пусть $\lambda \in F(x), T_{r,x}^{\alpha} \leq \lambda$, и $y \in \operatorname{supp} T_{r,x}^{\alpha}$. Существуют $a, b \in (0, r)$ такие, что $\beta = T_{a,x}^{\alpha}(y) > 0$, $S(a, b) < r$ и

$$T_{r,x}^{\alpha}(z) = 1 - T(1-\alpha, xz(r)) \geq 1 - T(1-\alpha, T(xy(a), yz(b))) =$$

$$= 1 - T(1-\beta, yz(b)) = T_{b,y}^{\beta}(z), \quad z \in X.$$

Итак, $T_{b,y}^{\beta} \leq T_{r,x}^{\alpha} \leq \lambda$, следовательно, $\lambda \in F(y)$.

Пусть $\delta^* = \{\nu \in I^X \mid x \in \operatorname{supp} \lambda \Rightarrow \nu \in F(x)\}$ – нечеткая топология на X, задаваемая системой окрестностей (теорема 1 [8]). Из теорем 2.6 и 2.5 следует, что $\delta_\rho < \delta^*$. Вообще говоря, δ_ρ не совпадает с δ^*, что показывает

Пример 2.15. Пусть топология $\mathfrak{G}$ СМП X с функцией треугольника μ_S^T (s-функция S как в теореме 2.5) недискретна. Тогда $\delta_\rho \neq \delta^*$.

В силу отделимости $\mathfrak{G}$ (теорема 2 [3], теорема 4 [2]) найдется $U \in \mathfrak{G}$ такое, что $X \setminus U \notin \mathfrak{G}$. Положим

$$\nu(x) = \begin{cases} 1/2, & \text{если} \quad x \in U, \\ 1, & \text{если} \quad x \in X \setminus U. \end{cases}$$

По построению $\nu \notin \omega(\mathfrak{G})$; тем самым $\nu \notin \delta_\rho$ (предложение 2.13). В то же время нетрудно проверить, что $\nu \in \delta^*$.

Пример 2.16. Пусть t-функция T удовлетворяет условию $T(a,b)=1$ при некоторой паре (a,b), где $a \in (0,1)$ и $b \in (0, 1-a)$. Тогда для функции треугольника μ_S^T с произвольной s-функцией S существует СМП X, на котором теорема 2.6 не определяет нечеткую псевдометрику.

Положим $X=\{x,y,z\}$ и

$$xy(r)=\begin{cases}1, & \text{если } r\le 0,\\ a, & \text{если } 0<r\le 1,\\ 0, & \text{если } r>1,\end{cases}\qquad yz(r)=\begin{cases}1, & \text{если } r\le 0,\\ b, & \text{если } 0<r\le 1,\\ 0 & \text{если } r>1,\end{cases}$$

$$xz(r)=\begin{cases}1, & \text{если } r\le S(1,1),\\ 0 & \text{если } r>S(1,1),\end{cases}$$

где $b>a$.

Очевидно, что ни при какой S - функции S множество X, наделенное этой случайной метрикой, не удовлетворяет (СМЗ) с функцией треугольника $\mu_S^{T_1}$. Пусть $r\in(0,1]$, $\lambda=q_x^1$. Тогда $D_r(\lambda)=q_x^1\vee q_y^{1-a}$, и для $\nu=q_x^1\vee q_y^b$ имеем $x\notin supp\, D_r(\nu')$, следовательно,

$$D_r^{-1}(\lambda)(y)<D_r(\lambda)(y).$$

Автор глубоко благодарен Ф.Ф.Султанбекову за постановку задачи, внимание к работе и ценные советы.

Литература

1. Бурбаки Н. Общая топология. Числа и связанные с ними группы и пространства.- М.: Физматгиз, 1958.-248 с.

2. Муштари Д.Х., Шерстнев А.Н. О способах введения топологии в случайных метрических пространствах.- Изв.вузов. Матем., 1966, № 6, с.99 - 106.

3. Султанбеков Ф.Ф. Об одном классе функций треугольника в системе аксиом случайного метрического пространства.- Изв.вузов. Матем., 1981, № 3, с.60 - 66.

4. Шерстнев А.Н. О вероятностном обобщении метрических пространств.- Учен.зап. Казанск.ун-та, 1964, т.124, кн.2, с.3 - 11.

5. Erceg Michael A. Metric spaces in fuzzy set

theory. — J. Math. Anal. Appl., 1979, v. 69, № 1, p. 205-230.

6. Hutton B.W. Uniformities on fuzzy topological spaces. — J. Math. Anal. Appl., 1977, v. 58, № 3, p. 559-571.

7. Lowen R. Fuzzy topological spaces and fuzzy compactness. — J. Math. Anal. Appl., 1976, v. 56, № 8, p. 621-633.

8. Ludescher H., Roventa E. Sur les topologies floues d'efinies a l'aide des voisinages. — C.r. Acad. sci, 1976, 283, № 8, A575-A577.

9. Roventa E. Asupra unor exemple de structuri topologice fuzzy definite cu ajutorul vecinătătilor. — Studi si cercetari matematice, 1980, t. 32, № 3, p. 345-352.

Б.Г.Габдулхаев

АППРОКСИМАЦИОННЫЕ ЧИСЛА ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ И ОПТИМИЗАЦИЯ ПРИБЛИЖЕННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В данной работе устанавливается и изучается связь между аппроксимационными числами линейных операторов и оптимизацией приближенных методов решения линейных функциональных уравнений II рода. В качестве приложений предлагается оптимизация методов вырожденных ядер решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода, что позволило получить для них ряд окончательных результатов.

§ 1. Постановка задачи

Пусть X - банахово пространство, а $\mathcal{L}(X)$ - пространство определенных в X линейных ограниченных операторов с обычной нормой. Рассмотрим в пространстве X класс $\mathcal{E}$ однозначно разрешимых линейных операторных уравнений

$$Kx \equiv x - Hx = y \quad (x, y \in X,\ H \in \mathcal{L}(X)), \tag{1}$$