Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

П. П. Кулиш, Квантовая оупералгебра osp(2|1),
Зап. научн. сем. ЛОМИ, 1988, том 169, 95–106

https://www.mathnet.ru/znsl5602

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.81
16 января 2026 г., 02:36:44

П.П.Кулиш

КВАНТОВАЯ СУПЕРАЛГЕБРА $OSp(2|1)$

Введение

Квантовый метод обратной задачи (КМОЗ) позволил точно решить большое число моделей квантовой теории поля и статистической физики (см., например, [I, 2]) и привел к новым алгебраическим структурам [I, 3, 4] . Эти структуры и ряд других соотношений КМОЗ получили трактовку в терминах алгебр Хопфа [5] и глубокое дальнейшее развитие, получившее название квантовые группы и алгебры Ли [5, 6, 7] . Ряд утверждений этого направления пересекается с более абстрактными построениями матричных псевдогрупп [8] .

Учитывая, что в настоящее время имеется значительный интерес к "суперматематике" и хорошо развитая теория супералгебр Ли [9], мы построим квантовый аналог простейшей супералгебры Ли $OSp(2|1)$ В рамках КМОЗ сформулированы те модификации его основных понятий и соотношений, которые необходимы для применения их к суперсимметричным моделям или моделям с антикоммутирующими переменными (фермионами) [2, I0, II] . Найдены разнообразные R -матрицы - решения градуированного уравнения Янга-Бакстера (классического и квантового) [I0-I3] . Мы выбираем способ непосредственного построения квантовой супералгебры, используя имеющиеся R -матрицы и оставляя в стороне глубокие теоретические подходы, которые основаны на квантовании классического дубля [5, I4] . Первый раздел работы содержит необходимые для дальнейшего сведения о супералгебре и супергруппе $OSp(2|1)$. Соответствующие квантовые аналоги построены во втором разделе.

Выражаем признательность Н.Ю.Решетихину, с которым в процессе работы обсуждался ряд существенных вопросов и, в частности, его трактовка в рамках квантового дубля универсальной R -матрицы.

I. Супералгебра и супергруппа $OSp(2|1)$

Выделенность супералгебры $OSp(2|1)$ среди других супералгеб. состоит в том, что по многим свойствам она подобна алгебре Ли $sl(2) \subset OSp(2|1)$. Кроме генераторов $H, X_{\pm}$ алгебры $sl(2)$ она имеет еще два нечетных генератора $V_{\pm}$ с перестановочными соотношениями:

$$
\begin{aligned}
&[H,X_\pm]=\pm X_\pm\,,\quad [X_+,X_-]=2H,\\
&[H,V_\pm]=\pm\tfrac{1}{2}V_\pm\,,\quad [X_\pm,V_\mp]=V_\pm\,,\quad [X_\pm,V_\pm]=0\,,\\
&[V_\pm,V_\pm]_+=\pm\tfrac{1}{2}X_\pm\,,\quad [V_+,V_-]_+=-\tfrac{1}{2}H,
\end{aligned}
\tag{I}
$$

где $[\cdot,\cdot]_+$ означает антикоммутатор. Оператор Казимира дается выражением

$$
C_2=H^2+\frac{1}{2}[X_+,X_-]_++[V_+,V_-]\,. \tag{2}
$$

Конечномерные неприводимые представления $\mathcal{V}_\ell$ супералгебры $OSP(2|1)$ параметризуются полуцелым числом (спином) $s=\ell/2$, или целым числом $\ell\in\mathbb{Z}_+$, имеют размерность $\dim\mathcal{V}_\ell=4s+1=$ $=2\ell+1$ и значение оператора Казимира $s(s+1/2)$ [I5,I6].

Наименьшая размерность нетривиального неприводимого представления равна трем и при выборе старшего вектора в виде $(1,0,0)^t$ генераторы имеют вид

$$
H=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\quad X_+=(X_-)^t=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \tag{3}
$$

$$
V_+=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\quad V_-=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}. \tag{4}
$$

По отношению к четной подалгебре $(H,X_\pm)=OSP_0(2|1)=sl(2)\subset$ $\subset OSP(2|1)$ конечномерное представление $\mathcal{V}_\ell$ разлагается в прямую сумму двух неприводимых представлений [I5, I6]

$$
\mathcal{V}_\ell=\mathcal{V}_\ell^{(0)}\oplus\mathcal{V}_{\ell-1}^{(1)}, \tag{5}
$$

отвечающих спинам $\ell/2$ и $(\ell-1)/2$. Далее будем считать, что старший вектор $|\ell;\ell,\ell\rangle$ представления $\mathcal{V}_\ell$ четный и, следовательно, базисные векторы $\mathcal{V}_\ell^{(0)}$ вида $(X_-)^m|\ell;\ell,\ell\rangle$ четные, а базисные векторы $\mathcal{V}_{\ell-1}^{(1)}$, имеющие вид $(X_-)^nV_-|\ell;\ell,\ell\rangle\sim|\ell;\ell-1,\ell-1-2n\rangle$, нечетные.

В базисе $\mathcal{V}_\ell$, где базисные векторы $\mathcal{V}_\ell^{(0)}$ и $\mathcal{V}_{\ell-1}^{(1)}$ чередуются, генераторы V_+ и V_- представляются матрицами с ненулевыми элементами над и под диагональю соответственно

$$V_+ = \begin{pmatrix} 0 & \check{v}_{\ell-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \check{v}_{\ell-2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \\ & & & & \check{v}_{-\ell} \\ 0 & \dots & & & 0 \end{pmatrix} \quad V_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & & 0 \\ \check{w}_{\ell} & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & \check{w}_{\ell-1} & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & \dots & & \check{w}_{-\ell+1} & 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

$$(\check{v}_{\ell-1}, \check{v}_{\ell-2}, \dots, \check{v}_{-\ell}) = \frac{1}{2}(\sqrt{\ell}, \sqrt{1}, \sqrt{\ell-1}, \sqrt{2}, \dots, \sqrt{1}, \sqrt{\ell}),$$

$$(\check{w}_{\ell}, \check{w}_{\ell-1}, \dots, \check{w}_{-\ell+1}) = \frac{1}{2}(-\sqrt{\ell}, \sqrt{1}, -\sqrt{\ell-1}, \dots, -\sqrt{1}, \sqrt{\ell}).$$

Генераторы H и $X_\pm$ имеют обычную форму, отметим только, что в любом представлении $\check{v}_\ell$ у H есть нулевое собственное значение

$$2H = \mathrm{diag}(\ell, \ell-1, \dots, 0, -1, \dots, -\ell). \tag{7}$$

Разложение Клебша-Гордана тензорного произведения двух представлений $\check{v}_\ell \otimes \check{v}_p$ имеет простой спектр

$$\check{v}_\ell \otimes \check{v}_p = \sum_{q=|\ell-p|}^{\ell+p} \check{v}_q . \tag{8}$$

Для него вычислены коэффициенты Клебша-Гордана [15, 16] .

При переходе от супералгебры к супергруппе необходимо ввести набор параметров, на которые множатся генераторы супералгебры и экспоненцируются. В нашем случае параметры принадлежат комплексной алгебре Грассмана $\Lambda = \Lambda_0 \oplus \Lambda_1$, и умножая генераторы на элементы соответствующей четности получаем четные величины, которые затем экспоненцируются. Следует отметить, что при умножении нечетных генераторов $V_\pm$ на нечетные параметры $\varepsilon, \eta \in \Lambda_1$, нужно учитывать правило знаков. Например, для $\ell = 1$ имеем

$$\eta V_+ = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\eta & 0 \\ 0 & 0 & \eta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \varepsilon V_- = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \end{pmatrix}, [\eta V_+, \varepsilon V_-] = \frac{\eta\varepsilon}{2} H. \tag{9}$$

Знак матричного элемента ηV_+ меняется, если он стоит в нечетном столбце.

Элементы супергруппы $OSp(2|1)$ в представлении $\check{v}_1$ задаются матрицами 3×3 с пятью четными элементами и четырьмя нечетными.

Они удовлетворяют дополнительным условиям

$$g = \begin{pmatrix} a & \alpha & b \\ \gamma & e & \beta \\ c & \varepsilon & d \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} e &= 1 - \alpha\varepsilon, \\ \beta &= -d\alpha + b\varepsilon, \\ \gamma &= a\varepsilon - c\alpha, \end{aligned} \tag{10}$$

$$ad - bc - \alpha\varepsilon = 1, \tag{11}$$

которые следуют из соотношений

$$s\text{-}\det g = 1, \quad g^{st} J g = J, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Действие этой группы в проективном градуированном пространстве $\mathbb{C}^{2|1}$ ведет к супераналогу дробно-линейных преобразований. С ней связаны различные интегрируемые эволюционные уравнения.

2. Квантовая супергруппа

В настоящее время имеется несколько подходов к проблеме квантования структуры группы и алгебры Ли [5-8]. Для интересующего нас случая, в силу простоты супергруппы $OS_p(2|1)$, естественно воспользоваться методами работ [4, 6] и сравнить их. Будет использоваться квантование кокоммутативной алгебры Хопфа, связанной с универсальной обертывающей алгеброй $\mathcal{U}(osp(2|1))$.

Как видно из перестановочных соотношений (I), порождающими элементами универсальной обертывающей $\mathcal{U}(osp(2|1))$ служат генераторы $H, V_\pm$. Копроизведение Δ, превращающее $\mathcal{U}$ в алгебру Хопфа, задается привычными формулами

$$\Delta(H) = H \otimes I + I \otimes H, \quad \Delta(V_\pm) = V_\pm \otimes I + I \otimes V_\pm. \tag{13}$$

При квантовании, как и в случае $sl(2)$ [4-7], сохраним коммутаторы с H и изменим антикоммутатор генераторов $V_\pm$

$$[H, V_\pm] = \pm\tfrac{1}{2} V_\pm, \qquad [V_+, V_-]_+ = \varphi(H). \tag{14}$$

Структуру функции $\varphi(H)$ определим из требования, чтобы некоком-

мутативное копроизведение, которое мы будем обозначать так же, было гомоморфизмом универсальных обертывающих супералгебр $\mathcal{U}$ и $\mathcal{U}\otimes\mathcal{U}$, т.е. $\Delta(ab)=\Delta(a)\Delta(b)$. Для H копроизведение то же, а для $V_\pm$ положим

$$\Delta(V_\pm) = V_\pm \otimes e^{y\eta H} + e^{-y\eta H}\otimes V_\pm , \tag{I5}$$

где η - параметр квантования (классический предел $\eta\to 0$), а y - искомое число. Условие

$$\Delta([V_+,V_-]) = \Delta(\varphi(H)) = \varphi(H\otimes I + I\otimes H),$$

$$\Delta([V_+,V_-]_+) = [\Delta(V_+),\Delta(V_-)]_+ \tag{I6}$$

равенства правых частей с учетом (I4) и (I5) дает вид $\varphi(H)$

$$\varphi(H) = C(\eta)(\exp(2y\eta H) - \exp(-2y\eta H)), \tag{I7}$$

где произвольная функция $C(\eta)$ подбирается из соображений квазиклассичности, а y положим равным $1/2$.

Построим конечномерные представления получившейся алгебры (I4), (I7), выбрав $C(\eta)=-1/2\,sh\,\eta$. Структура матриц $V_\pm$ в этих представлениях будет та же (6), а из соотношения (I4) и тех же собственных значений H найдем ($w_n=(-1)^{l-n+1}v_{n-1}$)

$$v^2_{l-k-1} = \left(2sh\,\eta\, ch\frac{\eta}{4}\right)^{-1}\begin{cases} sh\frac{\eta}{4}(2l-k)\,ch\frac{\eta}{4}(k+1), & k=2m,\\ sh\frac{\eta}{4}(k+1)\,ch\frac{\eta}{4}(2l-k), & k=2m+1,\end{cases} \tag{I8}$$

$$m=0,1,2,\dots,l-1.$$

Получим теперь ту же квантовую супералгебру, исходя из известного тригонометрического решения градуированного уравнения Янга-Бакстера [I0, с.I57] (R-матрица массивной модели Тирринга или суперсимметричного уравнения синус-Гордон). Следуя [I7] и совершая преобразование подобия по одному из пространств с оператором $\exp(2uH)$, после умножения на $2\exp(-u)$ и предельного перехода $u\to\infty$, получим треугольную постоянную R-матрицу

$$
R(q) = \left(\begin{array}{cccc|cccc|cccc}
q & & & & & & & & & & & \\
 & 1 & & & a & & & & & & & \\
 & & q^{-1} & & & b & & & e & & & \\
 & & & & & & & & & & & \\
\hline
 & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & & c & & & \\
 & & & & & & 1 & & & d & & \\
 & & & & & & & & & & & \\
\hline
 & & & & & & & & q^{-1} & & & \\
 & & & & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & & & & q &
\end{array}\right)
\qquad
\begin{array}{l}
a = d = q - q^{-1}, \\
b = a q^{-1/2}, \\
c = a q^{-1/2}, \\
e = a(1+q^{-1}).
\end{array}
\tag{19}
$$

В действительности эта R-матрица удовлетворяет градуированному уравнению Янга-Бакстера [10, 11] с данными $a = d$ и e и условием $bcq = a^2$. Этим произволом мы далее воспользуемся, чтобы построенная по R-матрице (19) квантовая супералгебра совпадала с полученной ранее $osp_q(2,1)$ (14), (17).

Треугольная R-матрица и соотношение Янга-Бакстера вида

$$
R L_1^{(\pm)} L_2^{(\pm)} = L_2^{(\pm)} L_1^{(\pm)} R, \quad R L_1^{(+)} L_2^{(-)} = L_2^{(-)} L_1^{(+)} R \tag{20}
$$

для верхне (+) и нижне (−) треугольных матриц L, согласно [6], определяют квантовую алгебру, дуальную к алгебре функций на квантовой группе. Введем обозначения для элементов $L^{(\pm)}$ – генераторов квантовой алгебры

$$
L^{(+)} = \begin{pmatrix} e^{-\eta H} & U_- & Z_- \\ 0 & 1 & W_- \\ 0 & 0 & e^{\eta H} \end{pmatrix}, \qquad L^{(-)} = \begin{pmatrix} e^{\eta H} & 0 & 0 \\ W_+ & 1 & 0 \\ Z_+ & U_+ & e^{-\eta H} \end{pmatrix}. \tag{21}
$$

Мы учли тот факт, что согласно общей теории диагонали матриц $L^{(+)}$ и $L^{(-)}$ взаимно обратны. Элементы $Z_\pm$ – четные, а $U_\pm$ $W_\pm$ – нечетные. Из трех уравнений (20) следует много соотношений, среди которых независимые следующие:

$$
e^{-\eta H} U_- = q^{-1} U_- e^{-\eta H},
$$

$$
Z_- = \frac{1+q}{b} U_-^2 e^{\eta H} = \frac{1+q^{-1}}{bq} e^{\eta H} U_-^2,
$$

$$
W_- = \frac{a}{b} U_- e^{\eta H} = \frac{a}{bq} e^{\eta H} U_-,
$$

$$e^{-\eta H}U_+ = q U_+ e^{-\eta H},$$

$$Z_+ = (1+q) b^{-1} e^{\eta H} U_+^2,$$

$$W_+ = -c q a^{-1} e^{\eta H} U_+,$$

$$U_+ U_- + q^{-1} U_- U_+ = b\left(e^{-2\eta H} - 1\right)$$

Для согласования с перестановочным соотношением $HU_\pm = U_\pm(H \pm 1/2)$ положим $q = \exp(-\eta/2)$. Полное соответствие с величинами из формул (I4), (I5), (I7) получим сравнив копроизведение (I5) и получающееся при перемножении двух $L^{(+)}$ или двух $L^{(-)}$ матриц с независимыми элементами:

$$\Delta(U_\pm) = U_\pm \otimes I + e^{-\eta H} \otimes U_\pm,$$

$$\Delta(Z_\pm) = Z_\pm \otimes e^{\eta H} + e^{-\eta H} \otimes Z_\pm + U_\pm \otimes W_\pm. \tag{22}$$

Следовательно,

$$V_\pm = \left(4 \operatorname{sh} \eta/2 \operatorname{sh} 2\eta\right)^{-1/2} e^{\eta \frac{H}{2}} U_\pm. \tag{23}$$

Используемая нами R-матрица (I9) обладает, как и в случае R-матриц, зависящих от спектрального параметра [I2], свойством кросинга

$$C_1 R^{st_1}(q) C_1^{-1} = R^{-1}(q), \tag{24}$$

где st_1 – супертранспонирование по первому пространству, $C_1 = C^1 \otimes I$, а матрица C связана с матрицей инвариантной квадратичной формы (I2)

$$C = J \exp\left(\frac{1}{2}\eta H\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & q^{1/2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -q^{-1/2} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{25}$$

Отметим также наличие соотношения $R(q^{-1}) = R^{-1}(q)$ для R-матрицы (I9).

В рамках упомянутых во Введении квантового дубля и универсальной R-матрицы матрицы $L^{(\pm)}$ и R-матрица[19] связаны, в частности, через соотношения [6]

$$\langle L^{(\pm)}, T_1 T_2 \ldots T_k \rangle = R_1^{(\pm)} R_2^{(\pm)} \ldots R_k^{(\pm)}, \tag{26}$$

где элементы $t_{i,j}$, $i,j=1,2,3$ матрицы

$$T=\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix} \tag{27}$$

являются генераторами алгебры функций на формальной квантовой (супер) группе [6]. Как следствие этой связи матрицы $L^{(\pm)}$ также удовлетворяют свойству кроссинга $C(L^{(\pm)})^{st}C^{-1}=(L^{(\pm)})^{-1}$, например, для $L^{(-)}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & q^{1/2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -q^{-1/2} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{\eta H} & W_+ & Z_+ \\ 0 & 1 & -U_+ \\ 0 & 0 & e^{-\eta H} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -q^{1/2} \\ 0 & 1 & 0 \\ q^{-1/2} & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^{-\eta H} & 0 & 0 \\ -q^{-1/2}U_+, & 1 & 0 \\ -q^{-1}Z_+, & -q^{-1/2}W_+, & e^{\eta H} \end{pmatrix}. \tag{28}$$

С учетом связи Z_+ и W_+ с U_+ правая часть равна $(L^{(-)})^{-1}$.

Введенное в квантовую супералгебру копроизведение (15),(22) позволяет определить действие этой алгебры в (градуированном) тензорном произведении ее представлений и разложить это произведение в прямую сумму неприводимых. Например, тензорное произведение фундаментальных представлений $V_1\otimes V_1$ разлагается в ряд Клебша – Гордана

$$V_1\otimes V_1=V_2\oplus V_1\oplus V_0. \tag{29}$$

Если обозначить e_i, $i=\pm1,0$ базис в V_1, тогда $e_i\otimes e_j$ – базис в тензорном произведении этих пространств и в его терминах можно выразить базисные векторы $e_j^{(k)}$, $j=\pm k,\pm(k-1),\dots,0$ пространств неприводимых представлений V_k, $k=0,1,2$ из (29). Так вектор $e_1\otimes e_1=e_2^{(2)}$ – старший вектор V_2, а остальные могут быть построены применением понижающего оператора $\Delta(V_-)$:

$$\begin{aligned} &e_1^{(2)}\sim\Delta(V_-)e_2^{(2)}=w_1q^{-1/2}(e_0\otimes e_1+q e_1\otimes e_0), \\ &e_k^{(2)}\sim(\Delta(V_-))^{2-k}e_2^{(2)},\quad k=1,0,-1,-2. \end{aligned} \tag{30}$$

Аналогично строятся базисные векторы в V_1 и V_0, например,

$$e_0^{(0)}\sim(e_1\otimes e_{-1}-q^{1/2}e_0\otimes e_0-q e_{-1}\otimes e_1). \tag{31}$$

Преобразованные с помощью оператора перестановки $\mathcal{P}(e_i\otimes e_j)=(-1)^{p(i)p(j)}e_j\otimes e_i$ эти векторы становятся собственными для R-матрицы

$$\check{R}=\mathcal{P}R=\left(\begin{array}{c|c|c} q & 1 & q^{-1} \\ \hline 1 & a & -e \\ \hline q^{-1} & b & e \end{array}\right), \qquad R\mathcal{P}e_j^{(k)}=\lambda_k e_j^{(k)},$$

$$\lambda_2=q,\ \lambda_1=-q^{-1},\ \lambda_0=-q^{-2}. \tag{32}$$

Таким образом получается разложение R-матрицы по проекторам:

$$\hat{R}=R\mathcal{P}=\left(\begin{array}{c|c|c} q & 1 & q^{-1} \\ \hline 1 & 0 & d \\ \hline q^{-1} & 1 & 0 \end{array}\right)=qP_2+(-q^{-1})P_1+(-q^{2})P_0, \tag{33}$$

Используя проектор P_0 на одномерное представление и одно $(+,-)$ из сплетающих соотношений (20) можно построить центральный элемент квантовой супералгебры $osp(2|1)$, аналог оператора Казимира (2). Приведем ответ в терминах образующих $v_\pm$ с перестановочными соотношениями

$$v_+v_- + v_-v_+ = e^{\eta H}-e^{-\eta H}. \tag{34}$$

Эти образующие пропорциональны $V_\pm$ из (I4),(23), но в их терминах элемент центра c_2 выглядит проще и легче проверить его коммутативность с $v_\pm$:

$$c_2=ch\,2\eta(H+\tfrac{1}{4})+2sh\tfrac{\eta}{2}\cdot ch\,\eta(H+\tfrac{1}{2})v_-v_+ - \\ -2(ch\tfrac{\eta}{4})^2 v_-^2 v_+^2. \tag{35}$$

Рассмотрим градуированную квадратичную алгебру генераторов, порождающих $A(R)$ – алгебру функций на формальной квантовой группе [6], которая следует из фундаментального соотношения

$$\tilde{R}T\otimes T=(I\otimes T)(T\otimes I)\tilde{R}, \quad \tilde{R}=\mathcal{P}R\mathcal{P} \tag{36}$$

с R-матрицей (I9), матрицей T (27) и единичной 3×3 матрицей I. Приведем перестановочные соотношения элементов t_{ij} с элементами первого столбца t_{k1}, которые используются при построении левого комодуля $A(R)$:

$$t_{11}t_{21}=q\,t_{21}t_{11}, \qquad t_{21}t_{21}=-\frac{b}{(1+q)}t_{11}t_{31}, \\ t_{11}t_{31}=q^2t_{31}t_{11}, \qquad t_{12}t_{21}=-t_{21}t_{12}, \\ t_{21}t_{31}=q\,t_{31}t_{21}, \qquad t_{13}t_{31}=t_{31}t_{13}, \tag{37}$$

$$t_{11}t_{22}=t_{22}t_{11}-a t_{12}t_{21},$$
$$q^{-1}t_{11}t_{33}=q^{-1}t_{33}t_{11}+c t_{32}t_{12}+e t_{31}t_{13}, \tag{38}$$
$$q^{-1}t_{11}t_{32}=t_{32}t_{11}+a t_{31}t_{12}.$$

Также как матрицы $L^{(\pm)}$ и R, $\tilde{R}$ матрица T должна удовлетворять условию кроссинга, что уменьшает число независимых генераторов $A(R)$. Соответствующие соотношения аналогичны ограничениям (I0)-(I2) и имеют вид (см. (24),(25))

$$T^{st}C^{st}T=C^{st}, \qquad C^{st}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -q^{-1/2} \\ 0 & 1 & 0 \\ q^{1/2} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{39}$$

Некоторые из квадратичных соотношений (39) являются следствиями фундаментальных соотношений (36), например, элемент 11

$$-q^{-1/2}t_{11}t_{31}+t_{21}t_{21}+q^{1/2}t_{31}t_{11}=0,$$

другие ведут к ограничениям и центральному элементу, соответственно,

$$t_{22}t_{22}=1+(\sqrt{q}-\frac{1}{\sqrt{q}})t_{12}t_{32},$$
$$t_{11}t_{33}-q t_{13}t_{31}-\sqrt{q}\, t_{21}t_{23}=1, \tag{40}$$

которые аналогичны формулам (I0),(II).

Более детальный анализ свойств квантовой группы $Osp(2|1)$ будет проведен в следующей работе. Среди этих свойств упомянем: I) разложение и коэффициенты Клебша-Гордана представлений квантовой алгебры $osp(2|1)$, 2) копредставления $A(R)$, аналогичные описанным для квантовой группы $SU(2)$ в работах [I8, I9], 3) разностный аналог оператора Лапласа, связанный с выражением (35), 4) определяемая через коидеал $A(R)$ квантовая суперсфера (см. определение квантовой сферы в [6,I8,20]) и, наконец, 5) универсальная R-матрица [5], определяемая из сплетающего свойства для копроизведений $\Delta(\cdot)$ (I5,22) и $\Delta'(\cdot)=\mathcal{P}\Delta(\cdot)\mathcal{P}$

$$R\Delta(\cdot)=\Delta'(\cdot)R, \tag{4I}$$

$$R=exp(-2\eta\, H\otimes H)(1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(\eta)v_+^n\otimes v_-^n)$$

Характеризация универсальной обертывающей квантовой алгебры $OSP(2|1)$ как алгебры Хопфа [27] требует введения отображений коединицы и антипода S -антигомоморфизма, который на образующих имеет вид $S(H)=-H$, $S(V_\pm)=-\exp(\eta H/2)V_\pm\exp(-\eta H/2)$. Дальнейшее развитие возможно как в плане приложений в аспекте работ [21 - 25], так и в рамках общих построений [26;28].

Литература

1. F a d d e e v L.D. Integrable Models in 1 + 1 Dimensional Quantum Field Theory. In: Les Houches Lectures 1982, Elsevier, Amsterdam, 1984.
2. K u l i s h P.P., S k l y a n i n E.K. Lect.Notes Phys., 1982, v.151, p.61-119.
3. С к л я н и н Е.К. Функц.анал. и прил., 1982, т.16, № 4, с.27-34; Функц.анал. и прил.,1983,т.17, № 4, с.34-48.
4. К у л и ш П.П., Р е ш е т и х и н Н.Ю. - В кн.: Вопросы кв.теории поля и стат.физики. 2 (Зап.науч.семин.ЛОМИ,т.101) 1981, с.101-110.
5. Д р и н ф е л ь д В.Г. - В кн.: Дифф.геометрия, группы Ли и механика. УШ(Зап.науч.семин.ЛОМИ,т.155) 1986,с.18-49.
6. F a d d e e v L.D., R e s h e t i k h i n N.Yu., T a k h t a j a n L.A. Quantization of Lie groups and Lie algebras. - Preprint LOMI, 1987, E-14-87, 16 p.
7. J i m b o M. Lett.Math.Phys., 1986, v.11, p.247-252; Comm. Math.Phys., 1986, v.102, N 4, p.537-548.
8. W o r o n o w i c z S.L. Publ.RIMS, Kyoto Univ., 1987,v.23, p.117-181; Comm.Math.Phys., 1987, 111, 613-665.
9. K a c V.G. Adv.Math., 1977, v.26, p.8-96.
10. К у л и ш П.П., С к л я н и н Е.К. - В кн.: Дифф. геометрия, группы Ли и механика. Ш (Зап.науч.семин.ЛОМИ,т.95) 1980,с.129-160.
11. К у л и ш П.П. - В кн.: Вопросы кв.теории поля и стат.физики. 5(Зап.науч.семин.ЛОМИ,т.145) 1985, с.140-163.
12. Б а ж а н о в В.В., Ш а д р и к о в А.Г. Теор.мат.физ., 1987, т.73, № 3, с.402-419.
13. Л е й т е с Д.А., С е р г а н о в а В.В. Теор.мат.физ. 1984, т.58, № 1, с.26-37.
14. S e m e n o v - T i a n - S h a n s k y M.A. Publ.RIMS,Kyoto University, 1985, v.21, N 6, p.1237-1260; Lect.Notes Phys., 1987, v.280, p.174-214.

15. Scheunert M., Nahm W., Rittenberg V. Jour.Math.Phys., 1977, v.18, p.146-162.
16. Berezin F.A., Tolstoy V.N. Comm.Math.Phys., 1981, v.78, p.409-428.
17. Faddeev L.D., Takhtajan L.A. Lect.Notes Phys., 1986, v.246, p.166-179.
18. Vaksman L.L., Soybelman Y.S. Funk.Analiz Prilozh., 1988, T.22, N 3,4, p.111-121.
19. Masuda T., Mimachi K., Nakagami Y., Nuomi M., Ueno K. Preprint Yokohama University, March 1988, 9 p.
20. Podles P. Lett.Math.Phys., 1987, v.14, p.193-202.
21. Rosso M. Comp.Rend.Acad.Sc.Paris,1987, v.304,p.323-326.
22. Pasquier V. Etiology of IRF models. Preprint Saclay, SPhT/88-20, 1988, 13 p.
23. Reshetikhin N.Yu. Quantized universal enveloping algebras, the YBE and invariants of links. I. Preprint LOMI, E-4-87, 1988, 68 p.; Part II. Preprint LOMI, E-17-87,1988, 22 p.
24. Kohno T. Ann.Inst.Fourier, 1987, v.37, N4,p.101-121.
25. Wadati M., Akutsu Y., Deguchi T. Jour. Phys.Sos.Jpn., 1987, v.56, p.3464-3471; preprints III-VI Tokyo Univer., 1988.
26. Manin Yu.I. Some remarks on Koszul algebras and quantum groups. Preprint, Paris, 1987, 17 p.
27. Abe E. Hopf algebras. Cambridge tracts in math.v.74, Cambridge Univ.Pren, 1980, 301 p.
28. Reshetikhin N.Yu., Semenov-Tian-Shansky M.A. Quantum R -matrices and factorization problems in quantum groups. Preprint Imper.College, London, 1988, 22 p.

P.P.Kulish. Quantum superalgebra

Quantum deformation of the simplest rank one orthosymplectic superalgebra is given by deformation of the odd generator anticommutator $[V_+, V_-] \sim \mathrm{sh}\,\eta H$ or by using the constant triangular R-matrix which is an appropriate limit of the supersymmetric sine-Gordon model R-matrix.