И. А. Бернадский, Р. А. Минлос, Об индексах дефекта симметрических якобиевых матриц, *Изв. вузов. Матем.*, 1968, номер 2, 16–20

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1968 МАТЕМАТИКА № 2 (69)

УДК 519.55

И. А. Бернадский, Р. А. Минлос

ОБ ИНДЕКСАХ ДЕФЕКТА СИММЕТРИЧЕСКИХ ЯКОБИЕВЫХ МАТРИЦ

1. Как известно, некоторые вопросы анализа (например, проблема моментов [1]) приводят к задаче определения индексов дефекта у симметрической якобиевой матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & & \\ & b_2 & a_3 & b_3 & \\ 0 & & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \tag{1}$$

(a_i, b_i вещественны). Точнее: если определить с помощью матрицы A оператор A_0 на множестве D_{A_0} финитных последовательностей из l_2, то легко видеть, что A_0 — симметрический оператор. Нетрудно показать, что индексы дефекта A_0 могут быть равны либо (0, 0), либо (1, 1). Задача состоит в различении этих двух случаев.

В настоящей статье мы устанавливаем алгоритм, позволяющий вычислить индексы дефекта для одного довольно широкого класса якобиевых матриц, а именно матриц с полиномиально растущими элементами. Другими словами, найдутся два полинома

$$\begin{aligned} Q(n) &= \alpha_0 n^k + \alpha_1 n^{k-1} + \ldots + \alpha_k, \\ P(n) &= p_0 n^s + p_1 n^{s-1} + \ldots + p_s \end{aligned} \tag{2}$$

такие, что

$$\begin{aligned} |a_n - Q(n)| &< M, \\ |b_n - P(n)| &< M \qquad (n = 1, 2, \ldots). \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь a_n, b_n — элементы матрицы (1), $M = \mathrm{const}$. О некоторых дополнительных условиях, при которых задача решается до конца, будет сказано ниже.

Для якобиевой матрицы (1) общего вида существует ряд критериев [1] того, что ее индексы дефекта равны (0, 0) или (1,1). Если элементы матрицы (1) удовлетворяют условиям (3), (2), то эти критерии действительны в следующих случаях: 1) при $s = 1$ индексы дефекта равны (0, 0) (критерий Карлемана); 2) при $k \geqslant 2s$ индексы дефекта будут (0,0) (критерий Денниса и Уолла); 3) при $s > 1$, $|a_n| \leqslant c$ ($c = \text{const}$, $n = 1, 2, \ldots$) индексы дефекта (1,1) (критерий Березанского).

Таким образом, мы видим, что для матрицы (1) с элементами, удовлетворяющими условиям (3), (2), в большом числе случаев указанные критерии не действуют.

2. Предлагаемый нами метод нахождения индексов дефекта у матрицы (1) продемонстрируем на следующем примере.

Пусть $a_n = 0$, $b_n = n^2$, т. е. матрица A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 2^2 & & \\ & 2^2 & 0 & 3^2 & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Заметим, что сопряженный оператор A_0^* задается той же матрицей A, только уже на множестве $D_{A_0^*}$ всех таких последовательностей x из l_2, что $A_0^* x \in l_2$. Поэтому согласно общей теории индекс дефекта матрицы A равен числу решений уравнения

$$Ax = \lambda x, \quad \operatorname{Im} \lambda \neq 0, \tag{5}$$

$$x \in l_2, \tag{6}$$

или, если обозначить $x = (x_1, x_2, \ldots)$, системы

$$x_2 = \lambda x_1; \ (n-1)^2 x_{n-1} + n^2 x_{n+1} = \lambda x_n, \ n > 1. \tag{7}$$

Введем производящую функцию

$$f_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n z^n. \tag{8}$$

В силу нашего требования (6) эта функция аналитична в единичном круге. Система уравнений (7), как нетрудно проверить, эквивалентна следующему дифференциальному уравнению относительно $f_0(z)$:

$$z(z^2+1) f'' + (z^2-1) f' + \left(\frac{1}{z} - \lambda\right) f = 0. \tag{9}$$

Это уравнение имеет 3 особые точки: $z_1 = i$, $z_2 = -i$, $z_3 = 0$.

Нетрудно убедиться, что существует ровно одно (с точностью до множителя) решение уравнения (9), аналитичное в нуле. Очевидно, функция $f_0(z)$ должна совпадать с этим решением. Далее, определенное таким образом решение уравнения (9) будет, вообще говоря, иметь особенности в точках z_1 и z_2. Характер этих особенностей может быть определен непосредственно без отыскания явного вида решения $f_0(z)$. Действительно, применяя метод Фробениуса ([2], [3]), найдем, что всякое решение дифференциального уравнения (9) в окрестности точки $z = i$ имеет вид

$$f(z) = c_1 \varphi_1(z) + c_2 [\varphi_2(z) + \varphi_3(z) \ln(z - i)],$$

где c_1, c_2 — постоянные, а функции $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ регулярны в точке $z = i$. Аналогичные особенности имеет любое решение уравнения (9) и в точке $z_2 = -i$. Таким образом, решение $f_0(z)$ может иметь на единичной окружности особенности только логарифмического характера. Отсюда вытекает, что интеграл

$$\int_0^{2\pi} |f_0(e^{i\vartheta})|^2 \, d\vartheta \tag{10}$$

сходится, а значит, сходится и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2. \tag{11}$$

Таким образом, у матрицы (4) индексы дефекта равны (1,1). Заметим, впрочем, что этот результат следует и из критерия Березанского.

3. Рассмотрим другой пример. Пусть теперь матрица A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_0 & p_0 & & & \\ p_0 & \alpha_0 \cdot 2^k & p_0 \cdot 2^s & & \\ & p_0 \cdot 2^s & \alpha_0 \cdot 3^k & p_0 \cdot 3^s & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \tag{12}$$

(α_0 — вещественное, $p_0 > 0$). Индексы дефекта этой матрицы можно определить, используя методику, изложенную в предыдущем пункте. Система уравнений (7) в данном случае имеет вид

$$\left.\begin{aligned} \alpha_0 x_1 + p_0 x_2 &= \lambda x_1, \\ p_0 (n-1)^s x_{n-1} + \alpha_0 n^k x_n + p_0 n^s x_{n+1} &= \lambda x_n, \quad n > 1. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Введем, как и прежде, производящую функцию (8) и напишем дифференциальное уравнение относительно нее, эквивалентное системе (13). При этом удобно различать три случая:

I. $k < s$,

$$\left.\begin{aligned} & p_0 z^s (z^2+1) \frac{d^s f}{dz^s} + p_0 \sum_{\nu=k+1}^{s-1} z^\nu (a_\nu^{(s)} z^2 + c_\nu) \frac{d^\nu f}{dz^\nu} + \\ & + \sum_{\nu=1}^{k} z^\nu (p_0 a_\nu^{(s)} z^2 + \alpha_0 a_\nu^{(k)} z + p_0 c_\nu) \frac{d^\nu f}{dz^\nu} + ((-1)^s p_0 - \lambda z) f = 0. \end{aligned}\right\} \tag{14_{I}}$$

II. $k = s$,

$$\left.\begin{aligned} & z^s (p_0 z^2 + \alpha_0 z + p_0) \frac{d^s f}{dz^s} + \sum_{\nu=1}^{s-1} z^\nu (p_0 a_\nu^{(s)} z^2 + \alpha_0 a_\nu^{(k)} z + p_0 c_\nu) \frac{d^\nu f}{dz^\nu} + \\ & + ((-1)^s p_0 - \lambda z) f = 0. \end{aligned}\right\} \tag{14_{II}}$$

III. $k > s$,

$$\left.\begin{aligned} & \alpha_0 z^{k+1} \frac{d^k f}{dz^k} + \alpha_0 \sum_{\nu=s+1}^{k-1} a_\nu^{(k)} z^{\nu+1} \frac{d^\nu f}{dz^\nu} + \sum_{\nu=1}^{s} z^\nu (p_0 a_\nu^{(s)} z^2 + \alpha_0 a_\nu^{(k)} z + \\ & + p_0 c_\nu) \frac{d^\nu f}{dz^\nu} ((-1)^s p_0 - \lambda z) f = 0. \end{aligned}\right\} \tag{14_{III}}$$

Здесь коэффициенты $a_\nu^{(\mu)}$, c_ν постоянны и могут быть вычислены.

Рассмотрим каждый случай в отдельности, считая $s>1$ (как уже отмечалось, при $s=1$ и любом k оператор A_0 самосопряжен).

Случай I. $k<s$. Уравнение (14_I) имеет три особые точки: $z_1=i$, $z_2=-i$, $z_3=0$. Легко убедиться [3], что это уравнение имеет, и притом единственное, аналитическое в окрестности нуля решение. Из определения функции $f_0(z)$ следует, что она должна совпадать с этим решением. Как следует из общей теории [3], в окрестности точки $z=i$ любое решение уравнения (14_I), в частности $f_0(z)$, представляется в виде линейной комбинации решений:

$$f^{(1)}(z)=(z-i)^{r_{s-1}}\varphi_1(z),$$

$$f^{(2)}(z)=(z-i)^{r_{s-2}}\varphi_2(z)+(z-i)^{r_{s-1}}\varphi_{21}(z)\ln(z-i),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f^{(s-1)}(z)=(z-i)^{r_1}\varphi_{s-1}(z)+(z-i)^{r_2}\varphi_{s-1,2}(z)\ln(z-i)+\ldots+$$
$$+(z-i)^{r_{s-1}}\varphi_{s-1;\,s-2}(z)\ln^{s-2}(z-i),$$

$$f^{(s)}(z)=(z-i)^{r_s}\varphi_s(z),$$

где $r_1=0$, $r_2=1$, ..., $r_{s-1}=s-2$, $r_s=a+ib$, $a=\frac{1}{2}s-1$, b зависит от коэффициентов $a_\nu^{(\mu)}$, c_ν уравнения (14_I), а функции φ_ν, $\varphi_{\nu\mu}$ регулярны в окрестности точки $z=i$. Аналогичное представление для функции $f_0(z)$ возможно и в окрестности точки $z_2=-i$. Поэтому легко видеть, что $f_0(z)$ интегрируема с квадратом на единичной окружности (при $s>1$). Отсюда следует сходимость ряда (11). Таким образом, индексы дефекта матрицы A в этом случае равны (1,1).

Случай II. $k=s$. Здесь так же, как и в предыдущем случае, существует единственное аналитическое в окрестности точки $z=0$ решение, и оно совпадает с $f_0(z)$. Рассмотрим теперь два подслучая:

а) $|\alpha_0|\leqslant 2p_0$. Здесь особые точки уравнения (14_II) (за исключением точки $z=0$) лежат на единичной окружности. Поступая так, как и выше, получим вид общего решения в окрестности каждой из особых точек [3]. При этом оказывается, что здесь также все особенности у решения интегрируемы с квадратом вдоль единичной окружности (при $s>1$), и тем самым индексы дефекта равны (1,1).

б) $|\alpha_0|>2p_0$. В этом случае особая точка $z=z_0$ уравнения (14_II) (кроме точки $z=0$) располагается внутри единичного круга. Если бы решение $f_0(z)$, регулярное в нуле, оставалось регулярным в точке $z=z_0$, то индексы дефекта были бы равны (1,1). Очевидно, что если такая ситуация имеет место при каком-нибудь одном комплексном λ, то она имеет место и при всяком комплексном λ. Нам это представляется маловероятным, и, действительно, в этом случае индексы дефекта нашей матрицы равны (0, 0) [4]. Доказать этот факт нашим методом не удается.

Случай III. $k>s$.

а) При $k>s+1$ легко проверить, что уравнение (14_III) не имеет аналитических в нуле решений. Отсюда следует, что индексы дефекта матрицы A равны (0,0).

б) При $k=s+1$ неизвестно, существует ли аналитическое в нуле решение уравнения (14_III), поэтому ничего нельзя сказать об индексах дефекта матрицы A.

Итак, справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть якобиева матрица A имеет вид* (12) *и* $s > 1$. *Тогда, если* $k < s$, *то индексы дефекта матрицы* A *равны* (1,1). *Если* $k = s$ *и при этом* $|\alpha_0| \leqslant 2p_0$, *то индексы дефекта равны* (1,1). *Если* $k > s + 1$, *то индексы дефекта равны* (0,0).

4. Аналогичный результат имеет место для якобиевых матриц общего вида, элементы которых удовлетворяют условиям (3), (2). Причем, как правило, индексы дефекта матрицы не меняются, если у полиномов $P(n)$, $Q(n)$ отбросить младшие члены (исключение составляет случай $k = s$, $|\alpha_0| = 2p_0$ (см. теорему 2), однако и здесь нам неизвестна зависимость индексов дефекта от коэффициентов α_1, p_1). Не вдаваясь в подробности, сформулируем эти результаты в виде теоремы, обобщающей теорему 1.

Теорема 2. *Пусть элементы якобиевой матрицы* (1) *удовлетворяют условиям* (3), (2) *и пусть* $s > 1$.

Тогда:

1) *если* $k < s$, *то индексы дефекта матрицы* (1) *равны* (1,1);

2) *если* $k = s$, $|\alpha_0| \leqslant 2p_0$, *причем в случае, когда* $|\alpha_0| = 2p_0$, *выполнены условия*:

а) *если* $\alpha_0 = 2p_0$, *то* $\alpha_1 \neq 2p_1 - sp_0$;

б) *если* $\alpha_0 = -2p_0$, *то* $\alpha_1 \neq -2p_1 - sp_0$,

то индексы дефекта равны (1,1);

3) *если* $k > s + 1$, *то индексы дефекта матрицы* (1) *равны* (0,0).

г. Москва

Поступило
19 XI 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахиезер Н. И. Классическая проблема моментов. М., Физматгиз, 1961.
2. Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения. М., ИИЛ, 1962.
3. Sternberg W. Über die asymptotische Integration von Differentialgleichungen. Math. Ann., B. 81, 1920.
4. Чистяков А. Якобиевы матрицы с операторными элементами. ДАН СССР, т. 178, № 5, 1968.

А. В. ГОХМАН. ГЕОМЕТРИЯ ДИНАМИКИ ТОЧКИ ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ

(аннотация статьи, принятой к печати)

Рассматривается движение точки с переменной массой $m(t)$ без воздействия внешних сил. Доказывается, что всякому такому движению соответствует геодезическая в некотором четырехмерном пространстве, представляющем собой специальное реономное пространство с так называемой s-финслеровой связностью. (Работа поступила в журнал «Математика» 21. XI. 1967.)

М. В. ЕЛИСТРАТОВА. КОНЕЧНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ХАНКЕЛЯ — СОБОЛЕВА. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ В ИНТЕГРАЛЬНОЙ ФОРМЕ

(аннотация статьи, принятой к печати)

Вводятся конечные интегральные преобразования, позволяющие представлять решения краевых задач математической физики в двух эквивалентных формах: в интегральной форме и в виде ряда по собственным функциям. Эти преобразования полезны при решении краевых задач уравнений, для которых соответствующие однородные уравнения допускают хотя бы частичные разделения переменных и представляют относительно отделяющейся переменной уравнение Бесселя порядка m для полых цилиндрических тел. (Работа поступила в журнал «Математика» 5. VI. 1967.)