М. Д. Сурначев, Асимптотическое поведение на бесконечности решений уравнений типа Эмдена–Фаулера, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2009, номер 2, 53–56

Краткие сообщения

УДК 517.95

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ТИПА ЭМДЕНА–ФАУЛЕРА

М. Д. Сурначев[1]

Рассматривается полулинейное уравнение $\Delta u = |u|^{\sigma-1}u$ во внешности шара в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$. При значении показателя σ больше "критического" $(= \frac{n}{n-2})$ установлено, что ведущий член асимптотики любого решения при $x \to \infty$ есть линейная комбинация производных фундаментального решения. Доказано существование решений с указанным главным членом асимптотики такого типа.

Ключевые слова: Полулинейный, асимптотики, уравнения Эмдена–Фаулера, пространства Кондратьева, критический показатель, сверхкритическая зона.

The semilinear equation $\Delta u = |u|^{\sigma-1}u$ is considered in the exterior of a ball in $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$. It is shown that if the exponent σ is greater than a "critical" value $(= \frac{n}{n-2})$, then for $x \to \infty$ the leading term of the asymptotics of any solution is a linear combination of derivatives of the fundamental solution. It is shown that solutions with the indicated leading term in asymptotics of such a type exist.

Key words: semilinear, asymptotics, Emden–Fowler equations, Kondrat'ev spaces, critical exponent, supercritical range.

Рассмотрим уравнение

$$\triangle u - |u|^{\sigma-1}u = 0, x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad \sigma > \frac{n}{n-2}, \quad n \geqslant 3. \tag{1}$$

Под решением в области Ω понимается функция из $C^2(\Omega)$, удовлетворяющая уравнению в классическом смысле.

Сформулируем две теоремы, дающие описание поведения решений этого уравнения при $x \to \infty$.

Теорема 1. *Пусть функция $u(x)$ — решение уравнения (1) в области $|x| > 1$. Тогда найдутся такое целое число $m \geqslant 0$ и гармонический многочлен $P_m(x) = \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha x^\alpha$ порядка m, что*

$$u(x) = P_m(x)|x|^{2-n-2m} + O(|x|^{2-n-m-\gamma})$$

для всех $\gamma < \min(\sigma(n-2) - n, 1)$. При этом $\sum_{|\alpha|} |c_\alpha| < \mathrm{Const}(\sigma, n, m)$.

Теорема 2. *Пусть задан гармонический многочлен $P_m(x) = \sum\limits_{|\alpha|=m} c_\alpha x^\alpha$. Тогда для любого $\gamma \in (0, (n+m-2)(\sigma-1)-2)$ найдется такое число R, зависящее от $\sum\limits_\alpha |c_\alpha|$, σ, n, m, γ, что в области $|x| > R$ существует решение уравнения (1), имеющее при $x \to \infty$ асимптотику*

$$u(x) = P_m(x)|x|^{2-n-2m} + O(|x|^{2-n-m-\gamma}).$$

Следствие. *Пусть $u(x)$ — положительное решение уравнения (1) во внешности единичного шара в $\mathbb{R}^n$. Тогда $u(x) = c|x|^{2-n} + O(|x|^{2-n-\varepsilon})$, где c — постоянная, зависящая от решения, и ε — положительная постоянная.*

[1] *Сурначев Михаил Дмитриевич* — асп. каф. дифференциальных уравнений мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: peitsche@yandex.ru.

Вспомогательные результаты. Введем пространство $\mathring{\mathrm{H}}_a^k$ — замыкание пространства $\mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ по норме

$$\|u\|^2_{\mathring{\mathrm{H}}_a^k} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha|\leqslant k} |D^\alpha u|^2 r^{a+2|\alpha|-2k}\, dx.$$

Пусть S — единичная сфера $\mathbb{R}^n$. Обозначим через $\triangle_\theta$ оператор Лапласа–Бельтрами на S. Обозначим через T множество решений уравнения

$$-\lambda^2 + i(n-2)\lambda + \beta_j = 0, \tag{2}$$

где $\beta_j = -j(j+n-2)$, $j = 0,1,2,\ldots$ — j-е собственное значение $\triangle_\theta$. Легкие вычисления дают $T = \{-ik;\ i(n-2+k)\}_{k=0}^\infty$. Также обозначим через $\{\psi_{sj}\}_s$ ортонормированный в $L^2(S)$ базис пространства собственных функций, соответствующих j-му собственному значению $\triangle_\theta$. Для $\lambda \in T$ будем обозначать через $j(\lambda)$ то число j, при котором данное λ решает уравнение (2).

Введем функцию $\theta_R(x)$, такую, что

$$\theta_R(x) = 0,\ |x| \leqslant R;\ \theta_R(x) = 1,\ |x| \geqslant 2R;\ 0 \leqslant \theta_R(x) \leqslant 1;\ \theta_R(x) \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Сформулируем несколько необходимых для доказательства утверждений.

Лемма 1. *Для функции $u(x)$, которая является решением уравнения* (1) *в области $|x| > 1$, верна оценка*

$$|u(x)| \leqslant C(|x|-1)^{\frac{2}{1-\sigma}}$$

с постоянной C, зависящей только от σ, n.

Доказательство этого утверждения можно найти, например, в работе [1].

Лемма 2. *Для функции $u(x)$, которая является решением уравнения* (1) *в области $|x| > 1$, верна оценка*

$$|u(x)| \leqslant C|x|^{2-n}, \quad |x| > 2,$$

с постоянной C, зависящей только от σ, n.

Доказательство. Выберем число A так, чтобы $A \cdot 2^{2-n} \geqslant \sup\limits_{|x|=2} |u(x)|$. Рассмотрим функцию $v(x) = A|x|^{2-n}$. Ясно, что $0 = \triangle v_0 < v_0^\sigma$, т.е. $v(x)$ является суперрешением уравнения (1). Так как при $|x| = 2$ выполнено $v(x) \geqslant |u(x)|$ и $u(x), v(x) \to 0$ при $x \to \infty$, то из принципа максимума следует, что $|u(x)| \leqslant v(x)$ при $|x| \geqslant 2$.

Первые два утверждения основываются только на принципе максимума и построении барьеров. Легко видеть, что оценка леммы 2 точна.

Следующие две леммы — результаты из общей теории весовых пространств В. А. Кондратьева (см., например, [2, 3] и ссылки там).

Лемма 3. *Пусть функция $f(x) \in \mathring{\mathrm{H}}_a^0$ и на прямой $\operatorname{Im}\lambda = \frac{a+n-4}{2}$ нет чисел из T. Тогда существует и единственно $u(x) \in \mathring{\mathrm{H}}_a^2$ — решение $\triangle u = f$ в $\mathbb{R}^n$, причем $\|u\|_{\mathring{\mathrm{H}}_a^2} \leqslant C\|f\|_{\mathring{\mathrm{H}}_a^0}$.*

Лемма 4. *Пусть функция $u(x)$ является решением $\triangle u = f$ в $\mathbb{R}^n$, причем $u \in \mathring{\mathrm{H}}_{a_1}^2$ и $f \in \mathring{\mathrm{H}}_{a_2}^0$, где $a_1 < a_2$. Пусть на прямых $\operatorname{Im}\lambda = \frac{a_2+n-4}{2}$ и $\operatorname{Im}\lambda = \frac{a_1+n-4}{2}$ нет чисел из T. Тогда $u(x) = \sum\limits_{\lambda,s} c_{js} r^{i\lambda}\psi_{j(\lambda)s}(\omega) + u_1(x)$, где суммирование ведется по $\lambda \in T$, лежащим между прямыми $\operatorname{Im}\lambda = \frac{a_1+n-4}{2}$ и $\operatorname{Im}\lambda = \frac{a_2+n-4}{2}$, причем $\|u_1\|_{\mathring{\mathrm{H}}_{a_2}^2} + \sum\limits_{j,s} |c_{js}| \leqslant C(\|u_1\|_{\mathring{\mathrm{H}}_{a_1}^2} + \|f\|_{\mathring{\mathrm{H}}_{a_2}^0})$.*

Из локальных поточечных оценок эллиптической теории (см., например, [4, следствие 9.21]) легко получить следующее утверждение.

Лемма 5. *Пусть $u(x) \in \mathring{\mathrm{H}}_a^2$ и $\triangle u \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Тогда для $x \neq 0$*

$$|u(x)| \leqslant C\left[|x|^{\frac{4-a-n}{2}}\|u\|_{\mathring{\mathrm{H}}_{a-4}^0} + |x|^2 \sup_{\frac{1}{2}|x|\leqslant|y|\leqslant 2|x|} |\triangle u(y)|\right]$$

с постоянной $C = C(n,a)$.

Для доказательства существования решений используется принцип Лерэ–Шаудера в следующей форме.

Лемма 6. *Пусть $\mathfrak{S}$ — замкнутое выпуклое множество в банаховом пространстве $\mathfrak{B}$ и пусть T — непрерывное отображение множества $\mathfrak{S}$ в себя, такое, что образ $T\mathfrak{S}$ является предкомпактным множеством. Тогда отображение T имеет неподвижную точку.*

Главная лемма сводится к применению леммы 4 для получения разложения и оценки результата с помощью леммы 5. Принадлежность рассматриваемых функций пространствам $\mathring{\mathrm{H}}^k_a$ есть легкое следствие классической эллиптической теории регулярности (см., например, [4, гл. 9]).

Лемма 7. *Пусть функция $z(x)$ удовлетворяет уравнению $\triangle z = z^\sigma + \eta$, где $z(x) = 0$ при $|x| < R$ и $z(x) \leqslant C|x|^{2-n-\tau}$ с некоторым $\tau \geqslant 0$, функция $\eta(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ и равна нулю вне кольца $R < |x| < 2R$. Тогда для любого $\gamma \in (0, \tau(\sigma-1)+\sigma(n-2)-n)$ и для любого τ', такого, что $\tau' < \tau$ и $|\tau'-\tau| < \operatorname{dist}(i(n-2+\tau), T)$, если на прямых $\operatorname{Im}\lambda = n-2+\tau'$ и $\operatorname{Im}\lambda = n-2+\tau+\gamma$ нет решений уравнения (2), то*

$$z(x) = \sum r^{i\lambda_j^-} c_{sj}\psi_{sj}(\omega) + z_1(x),$$

причем

$$z_1(x) \in \mathring{\mathrm{H}}^2_{n+2\tau+2\gamma}, \quad \|z_1\|_{\mathring{\mathrm{H}}^2_{n+2\tau+2\gamma}} + \sum |c_{sj}| \leqslant C_1 \quad \text{и} \quad |z_1(x)| \leqslant C_2|x|^{2-n-\tau-\gamma},$$

где λ_j^- — решения уравнения (2), лежащие в области $n-2+\tau' < \operatorname{Im}\lambda < n-2+\tau+\gamma$, а постоянные $C_j = C_j(C, \|\eta\|_{L_2}, n, \sigma, \gamma, \tau, \tau')$, $j = 1, 2$.

Доказательство теоремы 1. Расмотрим функцию $v(x) = \theta_2(x)u(x)$. Функция $v(x)$ удовлетворяет уравнению $\triangle v = v^\sigma + \eta$, причем носитель функции η лежит в кольце $\{2 < |x| < 4\}$, η ограничена (абсолютной величиной, зависящей только от n, σ) и непрерывна. Согласно лемме 2, $|v(x)| \leqslant C|x|^{2-n}$. Используя лемму 7, получаем $v(x) = cr^{2-n} + v_1(x)$, где $|v_1(x)| < C|x|^{2-n-\gamma}$ и $v_1 \in \mathring{\mathrm{H}}^2_{n+2\gamma}$.

Если же $u(x)$ знакопеременна, то $c = 0$, и, применяя лемму 7 нужное число раз (конечное!), получаем

$$v(x) = |x|^{2-n-m} \sum_{|s|=m} c_s x^s + v_1(x),$$

причем

$$|v_1(x)| < C|x|^{2-n-m-\gamma}, \quad |x| > 2.$$

Оценка коэффициэнтов c_α содержится в утверждении леммы 7.

Доказательство Теоремы 2. Обозначим данную гармоническую функцию $|x|^{2-n-2m} \sum\limits_{|\alpha|=m} c_\alpha x^\alpha$ через $u_0(x)$. Будем обозначать $C_0 = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |u_0(x)| \cdot |x|^{m+n-2}$. Введем банахово пространство

$$\mathfrak{B} = \{v(x) : v(x) = 0, |x| < R; \sup_{x\in\mathfrak{R}^n} |v(x)| \cdot |x|^{\gamma+n+m-2} < \infty\}$$

с нормой

$$\|v\|_{\mathfrak{B}} := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |v(x)| \cdot |x|^{\gamma+n+m-2}.$$

Обозначим $\mathfrak{S}_1 = \{x \in \mathfrak{B} : \|x\|_{\mathfrak{B}} \leqslant 1\}$. Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ уравнение

$$\triangle w = (u_0\theta_R + v)^\sigma := F(v), \tag{3}$$

где v есть элемент $\mathfrak{B}$. Определим оператор T, сопоставляющий функции $v(x) \in \mathfrak{B}$ функцию $w\theta_R$. Легко проверяется, что для $a = -n + 2(n+m-2)\sigma - \delta$, $\delta > 0$, имеет место $F(v) \in \mathring{\mathrm{H}}^0_a$ и

$$\|F(v)\|^2_{\mathring{\mathrm{H}}^0_a} \leqslant C_1 \left(\|v\|^{2\sigma}_{\mathfrak{B}} \frac{R^{-\delta-\gamma\sigma}}{\delta+2\gamma\sigma} + C_0^{2\sigma} \frac{R^{-\delta}}{\delta} \right).$$

Согласно лемме 3, существует решение уравнения (3) из пространства $\mathring{\mathrm{H}}^2_a$. Используя оценку леммы 5, при $|x| > R$ получаем

$$|w(x)| \leqslant C \left(C_0^\sigma R^{-\delta/2} + \|v\|^\sigma_{\mathfrak{B}} R^{-\delta/2-\gamma\sigma} \right) |x|^{2+(2-m-n)\sigma+\delta/2}.$$

Таким образом, для $v \in \mathfrak{S}_1$

$$|Tv(x)| \leqslant C_1|x|^{2-m-n-\gamma-\tau}, \quad \tau > 0, \quad |x| > R, \tag{4}$$

если число R выбрано достаточно большим, а δ — достаточно малым. Аналогичным образом показывается, что отображение T непрерывно из $\mathfrak{S}_1$ в $\mathfrak{S}_1$.

В силу того что все элементы $X := T\mathfrak{S}_1$ удовлетворяют оценке (4), для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $K > 0$, что для всех $v \in X$ имеем $\|v - v\xi_{|x|<K}\|_{\mathfrak{B}} < \varepsilon/2$, где через ξ_A обозначена характеристическая функция множества A. Рассмотрим X_K — ограничение семейства функций из X на шар радиуса K. Воспользовавшись стандартными эллиптическими оценками и теоремой Арцела–Асколи, мы получаем предкомпактность семейства функций X_K в пространстве $C(R < |x| < K)$. Следовательно, в $\mathfrak{B}$ найдется $\varepsilon/2$-сеть для множества X_K (для функций, обращающихся в нуль вне слоя $R < |x| < K$, норма в $\mathfrak{B}$ эквивалентна обычной норме пространства непрерывных функций: $\|u\|_C R^{\gamma+m+n-2} \leqslant \|u\|_{\mathfrak{B}} \leqslant \|u\|_C K^{\gamma+m+n-2}$).

В силу принципа Лерэ–Шаудера у отображения $T : \mathfrak{S}_1 \to \mathfrak{S}_1$ найдется неподвижная точка v_0. Теперь сумма $u_0 + v_0$ и будет при $|x| > 2R$ искомым решением уравнения (1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кондратьев В.А., Ландис Е.М.* О качественных свойствах решений одного нелинейного уравнения второго порядка // Матем. сб. 1988. **135**, № 3. 346–359.
2. *Багиров Л.А., Кондратьев В.А.* Об эллиптических уравнениях в $\mathbb{R}^n$ // Дифференц. уравнения. 1975. **11**, № 3. 498–504.
3. *Кондратьев В.А., Олейник О.А.* Краевые задачи для уравнений с частными производными в негладких областях // Успехи матем. наук. 1983. **38**, вып. 2(230). 3–76.
4. *Гилбарг Д., Трудингер Н.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989.

Поступила в редакцию
20.11.2006

УДК 517.521

О ЛИНЕЙНОЙ НЕЗАВИСИМОСТИ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИЙ ЛЕРХА

Е. А. Уланский[1]

Оценивается количество линейно независимых чисел среди $1, \Phi_1\left(z, \frac{p}{q}\right), \ldots, \Phi_a\left(z, \frac{p}{q}\right)$ в зависимости от натурального числа a, где $\Phi_s\left(z, \frac{p}{q}\right)$, $s = 1, 2, \ldots,$ — функции Лерха.

Ключевые слова: функции Лерха, обобщенные полилогарифмы, линейная независимость.

The number of linearly independent numbers among $1, \Phi_1\left(z, \frac{p}{q}\right), \ldots, \Phi_a\left(z, \frac{p}{q}\right)$ is estimated depending on a natural number a, where $\Phi_s\left(z, \frac{p}{q}\right)$, $s = 1, 2, \ldots,$ are Lerch functions.

Key words: Lerch functions, generalized polylogarithms, linear independence.

Введение. Пусть $z \in \mathbb{C}$, $|z| \leqslant 1$, $s \in \mathbb{N}$, причем $z \neq 1$ при $s = 1$, а также $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant |p| < q$, $(p, q) = 1$. *Функции Лерха* определяются следующим образом:

$$\Phi_s\left(z, \frac{p}{q}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(n + \frac{p}{q})^s}\,.$$

[1] *Уланский Евгений Александрович* — ассист. каф. теории чисел мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: ulanskiy@mail.ru.