А. В. Плюснин, Моделирование параметров наддува свободного пространства контейнера при газодинамическом выбросе летательного аппарата с учетом свойств реального газа,
Мат. моделир. и числ. методы, 2016, выпуск 11, 53–78

https://www.mathnet.ru/mmcm78

УДК 629.762

Моделирование параметров наддува свободного пространства контейнера при газодинамическом выбросе летательного аппарата с учетом свойств реального газа

© А.В. Плюснин

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Рассмотрен процесс наддува свободного пространства контейнера из баллона высокого давления, предшествующий газодинамическому выбросу летательного аппарата. Выполнены сравнительные расчеты этого процесса в квазистационарном приближении с использованием уравнений состояния идеального и реального газа. Показана необходимость учета отклонений термодинамических свойств рабочей среды от идеально-газового поведения для правильного определения запаса газа в баллоне и изменения температуры в наддуваемых объемах.

Ключевые слова: *контейнер, кольцевое пространство, наддув, идеальный газ, реальный газ.*

Постановка задачи. Подводный газодинамический выброс летательного аппарата (ЛА) из контейнера по минометной схеме [1] сопровождается комплексом сложных физических явлений [2]. Математическое моделирование этих явлений позволяет точнее определять нагрузки на корпус ЛА, контейнер и платформу, с которой осуществляется газодинамический выброс, и оптимизировать на этой основе проектные параметры соответствующих технических систем.

Ввиду сложности и взаимосвязанности явлений, процесс их математического моделирования имеет несколько уровней — от наглядных инженерных оценок до применения современных методов расчета нестационарных пространственных газопарожидкостных течений. При этом побудительным мотивом для разработки усложненных математических моделей является степень несоответствия результатов, которые дают более простые подходы, экспериментальным данным [1, 2]. Можно говорить о своеобразной реализации стратегии математического моделирования, описанной в работе [3].

Ряду аспектов определения параметров силовых воздействий при подводном газодинамическом выбросе посвящены работы [4–7], относящиеся к движению ЛА в свободной воде, работа [8], относящаяся к расчету силовых воздействий, сопровождающих выход ЛА из контейнера, работы [9–11], относящиеся к участку движения ЛА в контейнере.

Тематика настоящей статьи примыкает к вопросам математического моделирования физических явлений, сопровождающих движение ЛА в контейнере при подводном газодинамическом выбросе.

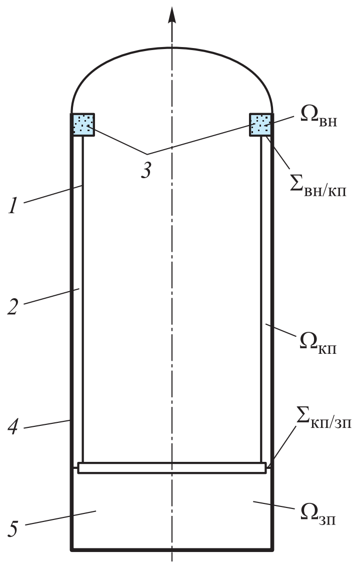

Рис. 1. Схематизированная геометрия задачи:
1 — корпус ЛА; *2* — кольцевое пространство; *3* — кольцевой баллон наддува; *4* — контейнер; *5* — задонное пространство

Подводный газодинамический выброс ЛА из контейнера по минометной схеме [1] может сопровождаться интенсивным втеканием воды в кольцевое пространство (КП) между корпусом ЛА и внутренней стенкой контейнера, повышением там давления среды и разрушением корпуса ЛА [2]. Это явление можно предупредить, выполнив заранее наддув свободного пространства контейнера до уровня наружного гидростатического давления [2, 12]. Предполагается, что до наддува свободное пространство контейнера заполнено азотом при давлении $p_0 = 1$ бар и что наддув производится также азотом из баллона высокого давления, что позволяет избежать вторичного догорания в задонном пространстве (ЗП) контейнера продуктов сгорания энергоустройств газодинамического выброса [1, 2, 9, 12].

В данной статье процесс предварительного наддува свободного пространства контейнера был смоделирован в рамках квазистационарного приближения с использованием уравнений состояния идеального и реального газа. Схематизированная геометрия задачи показана на рис. 1, числовые значения исходных данных приведены в табл. 1. Все числовые значения в тексте, в таблице и на графиках выражены в стандартных единицах системы измерений (СИ), за исключением значений давления, которые выражены в барах. В формулах использованы только стандартные единицы СИ (давление выражено в паскалях, температура — в кельвинах).

Таблица 1

Исходные данные задачи

Параметр	Значение, м^2
$\Omega_{\text{бн}}$	$6\cdot10^{-3}$
$\Omega_{\text{кп}}$	$3\cdot10^{-1}$
$\Omega_{\text{зп}}$	$1\cdot10^{-1}$
$\Sigma_{\text{бн/кп}}$	$1\cdot10^{-4}$
$\Sigma_{\text{кп/зп}}$	$1\cdot10^{-3}$

Процесс опорожнения баллона наддува (БН) неправомерно рассчитывать в рамках модели идеального газа. Под идеальным здесь понимаем газ, молекулы которого между собой не взаимодействуют [13, 14]. При условиях, реализующихся в процессе наддува в КП и ЗП, нет необходимости учитывать свойства реального газа, но при этом отсчеты энтальпии и энтропии необходимо согласовывать с используемыми зависимостями для реального газа. Представляется удобным проводить расчет по единым зависимостям для реального газа. При этом данные по термодинамическим свойствам азота приняты согласно работе [15]. Результаты расчета в рамках модели идеального газа приведены для сравнения.

Инженерная методика расчета. Простейший способ расчета состоит в том, что массы газа $m_{\text{бн}}^{(0)}$, заправляемой в баллон системы наддува, должно быть достаточно для обеспечения в объемах КП и ЗП заданного давления $p_{\text{надд}}$ при заданной начальной температуре среды $T_{\text{нач}}$. Зафиксируем значения $T_{\text{нач}} = 290$ К и $p_{\text{надд}} = 7$ бар для дальнейших вычислений. Значение газовой постоянной азота $R_{N_2} = 296{,}8$ Дж/(кг · К) принимается, как в работах [15, 16]. Величины удельных теплоемкостей $C_\upsilon = 743$ Дж/(кг · К), $C_p = 1041$ Дж/(кг · К) выбраны в соответствии с нормальными условиями [15] (это данные для реального газа, поэтому формула Майера $C_p - C_\upsilon = R_{N_2}$ не обязана выполняться точно), что дает показатель изоэнтропы $\gamma = C_p / C_\upsilon = 1{,}399$. Для данных табл. 1 получаем:

$$m_{\text{бн}}^{(0)} = \frac{p_{\text{надд}}\left(\Omega_{\text{кп}} + \Omega_{\text{зп}} + \Omega_{\text{бн}}\right) - p_0\left(\Omega_{\text{кп}} + \Omega_{\text{зп}}\right)}{R_{N_2} T_{\text{нач}}} \approx 2{,}837 \text{ кг}. \qquad (1)$$

Свойства реального газа в рассматриваемом подходе учитываем лишь при определении через коэффициент сжимаемости $Z = \dfrac{p_{\text{бн}}^{(0)} \Omega_{\text{бн}} / m_{\text{бн}}^{(0)}}{R_{N_2} T_{\text{нач}}}$ давления в БН $p_{\text{бн}}^{(0)}$, обеспечивающего при заданной температуре $T_{\text{нач}}$ необходимую массу заправки $m_{\text{бн}}^{(0)}$. Если считать газ идеальным $(Z = 1)$, то для начального давления в БН получим значение $p_{\text{бн}}^{(0)} = \dfrac{m_{\text{бн}}^{(0)} R_{N_2} T_{\text{нач}}}{\Omega_{\text{бн}}} \approx 407$ бар.

Формула (1) никак не учитывает динамику процесса истечения и соответствует предельно медленному изотермическому процессу. Для того чтобы ввести в нее фактор времени, можно воспользоваться соотношением баланса механической энергии (уравнение «живых» сил) для одномерного стационарного течения газа [17, 18]:

$$d\left(v^2/2\right)+\upsilon\,dp=0. \tag{2}$$

Здесь v — скорость газа; υ — удельный объем. Пусть задан термодинамический процесс, сопровождающий движение материальной частицы от состояния I к состоянию II. Тогда из дифференциального соотношения (2) получаем интеграл Бернулли:

$$0,5\left(v_{II}^2-v_I^2\right)+\int\limits_{p_{\mathrm{I}}}^{p_{\mathrm{II}}}\upsilon\,dp=0. \tag{3}$$

Интеграл $\int\limits_{p_{\mathrm{I}}}^{p_{\mathrm{II}}}\upsilon\,dp$ однозначно определен уравнением состояния и заданным термодинамическим процессом.

Поскольку теплопроводность газа мала, материальные частицы в процессе истечения из БН находятся в условиях, близких к адиабатическим. Учитывая возможность звукового и дозвукового режимов истечения, получаем следующую обобщенную зависимость для расчета массового расхода газа между двумя объемами с давлениями и температурами p_j, T_j $(j=1,2)$, проходное сечение между которыми имеет площадь Σ_{12}:

$$G\left(\{p_1,T_1\},\{p_2,T_2\},\Sigma_{12}\right)=\frac{p_h\Sigma_{12}}{\sqrt{RT_h}}\begin{cases}0,\ p_h=p_l\,,\\ B_2\Phi\left(p_l/p_h\right),\ p_l<p_h<Kp_l\,,\\ B_1,\ p_h\ge Kp_l\,,\end{cases} \tag{4}$$

где $h=\begin{cases}1,\ p_1\ge p_2,\\ 2,\ p_1<p_2;\end{cases}$ $l=3-h;$ $B_2=\sqrt{\dfrac{2\gamma}{\gamma-1}};$ $\Phi(\xi)=\sqrt{\xi^{2/\gamma}-\xi^{(\gamma+1)/\gamma}};$ $K=\left(\dfrac{\gamma+1}{2}\right)^{\gamma/(\gamma-1)};$ $B_1=\left(\dfrac{2}{\gamma+1}\right)^{(\gamma+1)/(2(\gamma-1))}\sqrt{\gamma}$. В частности, расход из БН в КП есть величина $G_{\text{бн}}=G\left(\{p_{\text{бн}},T_{\text{бн}}\},\{p_{\text{кп}},T_{\text{кп}}\},\Sigma_{\text{бн/кп}}\right)$, а расход из КП в ЗП есть величина $G_{\text{кп/зп}}=G\left(\{p_{\text{кп}},T_{\text{кп}}\},\{p_{\text{зп}},T_{\text{зп}}\},\Sigma_{\text{кп/зп}}\right)$. Уравнения баланса массы газа в объемах БН, КП и ЗП описывают простыми соотношениями:

$$\frac{dm_{\text{бн}}}{dt}=-G_{\text{бн}}(t),\ \frac{dm_{\text{кп}}}{dt}=G_{\text{бн}}(t)-G_{\text{кп/зп}}(t),\ \frac{dm_{\text{зп}}}{dt}=G_{\text{кп/зп}}(t). \tag{5}$$

Давление вычисляют по уравнению состояния идеального газа. Имеем:

$$p_{\text{бн}} = \frac{m_{\text{бн}} R_{N_2} T_{\text{бн}}}{\Omega_{\text{бн}}}, \quad p_{\text{кп}} = \frac{m_{\text{кп}} R_{N_2} T_{\text{кп}}}{\Omega_{\text{кп}}}, \quad p_{\text{зп}} = \frac{m_{\text{зп}} R_{N_2} T_{\text{зп}}}{\Omega_{\text{зп}}}. \tag{6}$$

Уравнение баланса энергии при адиабатическом втекании/вытекании газа в объем с массовым расходом G_{in}/G_{out} имеет вид:

$$\frac{d}{dt}(mU) = C_p \left(G_{in} T_{in} - G_{out} T \right),$$

где m — масса; $U = C_v T$ — удельная внутренняя энергия в объеме; T_{in} — температура торможения втекающего газа; T — средняя температура. Отсюда находим:

$$\dot{T}_{\text{бн}} = -\frac{(\gamma - 1) G_{\text{бн}} T_{\text{бн}}}{m_{\text{бн}}}, \quad \dot{T}_{\text{кп}} = \frac{G_{\text{бн}} \left(\gamma T_{\text{бн}} - T_{\text{кп}} \right) - (\gamma - 1) G_{\text{кп/зп}} T_{\text{кп}}}{m_{\text{кп}}},$$

$$\dot{T}_{\text{зп}} = \frac{G_{\text{кп/зп}} \left(\gamma T_{\text{кп}} - T_{\text{зп}} \right)}{m_{\text{зп}}}. \tag{7}$$

Из первого соотношения получаем адиабатический закон [14, 17] изменения температуры торможения внутри БН:

$$T_{\text{бн}} = T_{\text{нач}} \left(\frac{m_{\text{бн}}}{m_{\text{бн}}^{(0)}} \right)^{\gamma - 1}. \tag{8}$$

Результаты расчета по формулам (4)–(8) приведены на рис. 2–3 как расчет 1.

Расчет предсказывает сильное охлаждение газа внутри баллона (температура торможения опускается ниже критической температуры азота $T_{crit} = 126{,}2$ К [15]). Пониженную температуру предсказывают также в промежуточном объеме (КП). Зато в конечном объеме (ЗП) температура возрастает заметно выше начальной $T_{\text{нач}}$. С качественной точки зрения это понятно, ведь работа проталкивания, отобранная в БН, реализуется в конечном объеме в виде избыточной энергии. Ввиду развитых в КП и ЗП поверхностей стенок, на указанные результаты может существенно повлиять процесс теплообмена. Ясно, что результаты, полученные в рамках адиабатического идеально-газового приближения, не вполне удовлетворительны. Для их коррекции целесообразно проанализировать влияние трех факторов: уравнения состояния (УС) реального газа, пространственного характера газодинамического течения, теплообмена на стенках и в газе. Ниже рассмотрим только влияние первого из этих факторов.

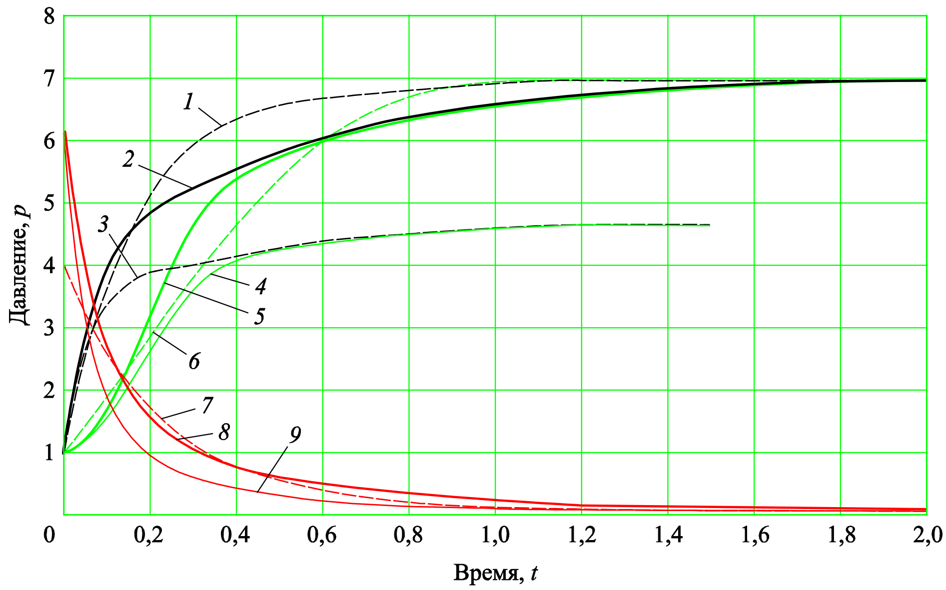

Рис. 2. Давление среды:
1–3 — КП; *4–6* — ЗП; *7–9* — БН·10^2; штриховая линия — расчет 1; сплошная тонкая линия — расчет 2; сплошная толстая линия — расчет 3

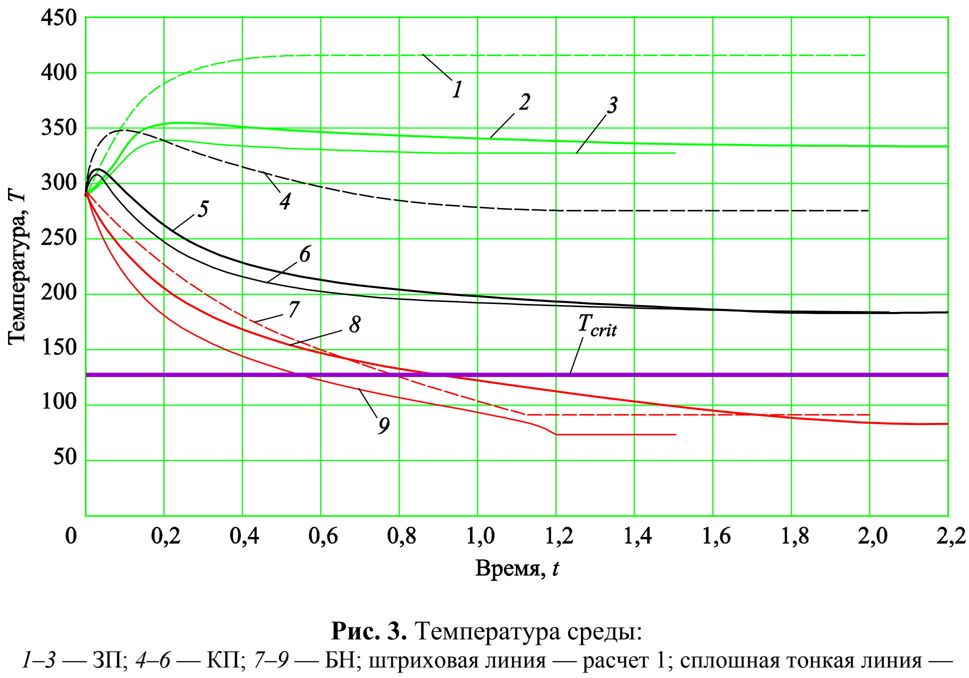

Рис. 3. Температура среды:
1–3 — ЗП; *4–6* — КП; *7–9* — БН; штриховая линия — расчет 1; сплошная тонкая линия — расчет 2; сплошная толстая линия — расчет 3

Описание термодинамических свойств реального газа. Газы и жидкости обычно рассматривают в термодинамике как двухпараметрические среды [14, 17]. Состояние таких сред определяется либо заданием калорического $U = U(\upsilon, T)$ и термического $p = p(\upsilon, T)$ уравнений состояния, либо заданием любого из термодинамических потенциалов (ТДП) [14, 17].

Например, уравнение состояния воды и водяного пара [19] определяется в нескольких характерных областях заданием энергии Гельмгольца $F = U - TS$ в переменных υ, T (изохорно-изотермический потенциал) и энергии Гиббса $G = H - TS$ в переменных p, T (изобарно-изотермический потенциал), где $H = U + p\upsilon$ — энтальпия (параметры F, G, H, S отнесены к единице массы вещества); S — энтропия.

Для идеального газа, если его теплоемкость считать постоянной, при всем удобстве калорического УС $U(T) = C_\upsilon (T - T_0) + U(T_0)$, внутренняя энергия полностью определяет термодинамические свойства только при задании ее как изохорно-изоэнтропийного потенциала выражением $U(\upsilon, S) = C_\upsilon T_0 \left[e^{(S - S_0)/C_\upsilon} \left(\frac{\upsilon_0}{\upsilon} \right)^{\gamma - 1} - 1 \right] + U(\upsilon_0, S_0)$ [14]. Характерные свойства ТДП, в частности существенность выбора их аргументов, определяются видом основного тождества термодинамики [14, 18]:

$$TdS = dU + p\,d\upsilon. \tag{9}$$

и математическими свойствами полных дифференциалов функций. Соотношение (9) «сопрягает» переменные T, S и p, υ как обобщенные силы и координаты, и эти пары не могут являться аргументами какого-либо ТДП.

Достоверное знание термического УС и параметров вещества в идеально-газовом состоянии позволяет получить полное УС двухпараметрической среды [13]. Будем считать, что при опорном значении давления $p^\circ = 1{,}01325$ бар известны идеально-газовые зависимости энтальпии $H^\circ(T)$ и энтропии $S^\circ(T)$ от температуры. При этом энтальпия идеального газа, как и внутренняя энергия, значением температуры определяется однозначно: $H_{ИГ}(p, T) \equiv H^\circ(T)$.

Для энтропии идеально-газовые изотермические изменения имеют вид универсальной зависимости от давления (или удельного объема). Действительно, согласно соотношению (9) и УС Клапейрона — Менделеева, получаем:

$$TdS = 0 + pd\left(R_{N_2} T / p \right) = -R_{N_2} T\, dp / p,$$

откуда:

$$S_{\text{ИГ}}(p,T)=S^{\circ}(T)-R_{N_2}\ln\left(p/p^{\circ}\right). \tag{10}$$

Опорному значению давления p° и данному значению температуры T соответствует значение:

$$\upsilon^{\circ}=R_{N_2}T\big/p^{\circ} \tag{11}$$

удельного объема.

Поскольку переменные p, υ термического УС сопряжены, есть две возможности: вычислять $F=F(\upsilon,T)$ либо $G=G(p,T)$. Пусть, например, необходимо вычислить значение $F(\upsilon,T)$ энергии Гельмгольца реального газа. Из определения энергии Гельмгольца и из формулы (9) легко получить тождество:

$$dF=-p\,d\upsilon-S\,dT. \tag{12}$$

Отсюда видно, что приращение F в изотермическом процессе противоположно по знаку работе, совершенной системой (в нашем случае — малым материальным объемом среды). По этой причине зависимости $p=p(\upsilon,T)$ достаточно для вычисления приращения F в изотермическом процессе. Получив УС в виде $F=F(\upsilon,T)$, можно затем вычислить энтропию как:

$$S=-(\partial F/\partial T)_{\upsilon}. \tag{13}$$

В пределе $\upsilon=\infty$ $(p=0)$ исчезает взаимодействие между молекулами реального газа, и его свойства становятся тождественными свойствам идеального газа. Учитывая это, интегрируем (12) при постоянном значении T сначала по изотерме идеального газа от $\upsilon=\upsilon^{\circ}$ до $\upsilon=\infty$, затем по изотерме реального газа от $\upsilon=\infty$ до заданного значения υ [13]:

$$F(\upsilon,\ T)-F_{\text{ИГ}}\left(\upsilon^{\circ},T\right)=-\left(\int_{\infty}^{\upsilon}p_{\text{РГ}}(\upsilon,T)\,d\upsilon-\int_{\upsilon^{\circ}}^{\infty}p_{\text{ИГ}}(\upsilon,T)\,d\upsilon\right)=$$

$$=-\int_{\infty}^{\upsilon}\left(p_{\text{РГ}}(\upsilon,T)-R_{N_2}T/\upsilon\right)d\upsilon-\int_{\upsilon^{\circ}}^{\upsilon}R_{N_2}T/\upsilon\,d\upsilon=$$

$$=-\int_{\infty}^{\upsilon}\left(p_{\text{РГ}}(\upsilon,T)-R_{N_2}T/\upsilon\right)d\upsilon-R_{N_2}T\ln\left(\upsilon/\upsilon^{\circ}\right).$$

Положим

$$\omega = \frac{\rho}{\rho_{crit}} = \frac{1}{\upsilon\rho_{crit}}, \;\; \omega_0 = \frac{p^\circ}{\rho_{crit} R_{N_2} T},$$

где $\rho = \upsilon^{-1}$, ρ_{crit} — плотность среды и ее значение в критической точке. В таком случае:

$$\ln\left(\upsilon/\upsilon^\circ\right) = -\ln\left(\frac{\rho}{\rho_{crit}} \frac{\rho_{crit} R_{N_2} T}{p^\circ}\right) = -\ln\left(\omega/\omega_0\right). \qquad (14)$$

В результате для реального газа имеем следующую формулу:

$$F_{\text{РГ}}(\upsilon, T) = F_{\text{ИГ}}\left(\upsilon^\circ, T\right) - \int_\infty^\upsilon \left(p_{\text{РГ}}(\upsilon, T) - R_{N_2} T/\upsilon\right) d\upsilon + R_{N_2} T \ln\left(\omega/\omega_0\right). \quad (15)$$

В работе [15] предложено единое уравнение для жидкого и газообразного состояний азота вида $\left(\rho_{crit} = 313{,}1 \text{ кг/м}^2\right)$:

$$p_{\text{РГ}}(\upsilon, T) = \frac{R_{N_2} T}{\upsilon}\left(1 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{m_i} b_{i\,j}\, \omega^i/\tau^j\right), \qquad (16)$$

где $b_{i\,j}$ — числовые коэффициенты, $\tau = T/T_{crit}$. Для данной зависимости интеграл в правой части формулы (15) равен:

$$\int_\infty^\upsilon \left(p_{\text{РГ}}(\upsilon, T) - R_{N_2} T/\upsilon\right) d\upsilon = R_{N_2} T \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{m_i} b_{i\,j} \int_\infty^\upsilon \omega^i/\tau^j \, d\upsilon/\upsilon =$$

$$= R_{N_2} T \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{m_i} b_{i\,j}/\rho_{crit}^i \tau^j \int_\infty^\upsilon d\upsilon/\upsilon^{i+1} = -R_{N_2} T \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{m_i} b_{i\,j} \omega^i \Big/ \left(i\,\tau^j\right).$$

Для идеального газа по формулам (10), (11), (13) получаем:

$$\left(\partial F_{ИГ}/\partial T\right)_{\upsilon^\circ} = -S_{ИГ}\left(R_{N_2} T/\upsilon^\circ, T\right) = -S^\circ(T) + R_{N_2} \ln\left(p^\circ/p^\circ\right) = -S^\circ(T).$$

Тогда по формулам (13)–(15) находим

$$S_{РГ}(\upsilon, T) = -\left(\partial F_{РГ}/\partial T\right)_\upsilon = S^\circ(T) - R_{N_2} \ln\left(\omega/\omega_0\right) -$$

$$- R_{N_2} T_{crit} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{m_i} i^{-1} b_{i\,j} \omega^i \frac{d}{dT}\left(\tau^{-j+1}\right) =$$

$$= S^\circ(T) - R_{N_2} \ln\left(\omega/\omega_0\right) + R_{N_2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{m_i} \frac{(j-1)}{i} b_{i\,j}\, \omega^i/\tau^j. \qquad (17)$$

Отметим, что в соответствующей формуле (2.28) работы [15] имеется опечатка в знаке перед логарифмом.

Для того чтобы получить для энтальпии представление вида (16), (17), находим далее:

$$F_{\text{ИГ}}\left(\upsilon^{\circ},T\right)=\left(H_{\text{ИГ}}\left(\upsilon^{\circ},T\right)-p^{\circ}\upsilon^{\circ}\right)-TS_{\text{ИГ}}\left(p^{\circ},T\right)=H^{\circ}(T)-R_{N_2}T-TS^{\circ}(T),$$

$$H_{\text{РГ}}(\upsilon,T)=F_{\text{РГ}}(\upsilon,T)+p_{\text{РГ}}(\upsilon,T)\upsilon+TS_{\text{РГ}}(\upsilon,T)=F_{\text{ИГ}}\left(\upsilon^{\circ},T\right)+$$

$$+R_{N_2}T\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{m_i}b_{ij}\omega^i\Big/\left(i\tau^j\right)+R_{N_2}T\ln\left(\omega/\omega_0\right)+R_{N_2}T\left(1+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{m_i}b_{ij}\,\omega^i/\tau^j\right)+$$

$$+TS^{\circ}(T)-R_{N_2}T\ln\left(\omega/\omega_0\right)+R_{N_2}T\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{m_i}\frac{(j-1)}{i}b_{ij}\,\omega^i/\tau^j.$$

В результате упрощений приходим к формуле [15]:

$$H_{\text{РГ}}(\upsilon,T)=H^{\circ}(T)+R_{N_2}T\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{m_i}\frac{i+j}{i}b_{ij}\,\omega^i/\tau^j. \tag{18}$$

Для дальнейших расчетов потребуется выражение для скорости звука. По общему определению [14] эту величину находят по формуле $a=\sqrt{\left(\partial p/\partial\rho\right)_S}$. Зависимость $a_{\text{РГ}}(\upsilon,T)$ вида (16)–(18) для азота приведена в работе [15] без вывода, как и зависимости для других термодинамических свойств. Основываясь на структуре приведенной зависимости, можно полагать, что исходным для ее получения явилось соотношение типа [20]:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial\upsilon}\right)_S=\frac{C_p}{C_\upsilon}\left(\frac{\partial p}{\partial\upsilon}\right)_T. \tag{19}$$

Поскольку $\partial p/\partial\upsilon=-\upsilon^{-2}\left(\partial p/\partial\rho\right)$, то в формуле (19) можно увидеть соотношение между лапласовой (адиабатической) и ньютоновой (изотермической) скоростями звука [21]. Тем не менее в приложениях к инженерным расчетам это и множество других функциональных соотношений термодинамики не кажутся очевидными. В работах [22, 23] соотношения, основанные на тождествах типа (9), определениях энергетических функций и общих функциональных связях между частными производными термодинамических параметров, представлены систематически, что облегчает их получение и проверку. Сравнительно прозрачный вывод формулы (19) получается следующим образом. Из изоэнтропийных условий, записанных в виде:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T dp+\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p dT=0,\ \left(\frac{\partial S}{\partial \upsilon}\right)_T d\upsilon+\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_\upsilon dT=0$$

выразим отношение дифференциалов $dp/d\upsilon|_S \equiv (\partial p/\partial\upsilon)_S$, что дает:

$$(\partial p/\partial\upsilon)_S=\frac{(\partial S/\partial\upsilon)_T}{(\partial S/\partial p)_T}\frac{(\partial S/\partial T)_p}{(\partial S/\partial T)_\upsilon}.$$

Первую дробь в правой части можно переписать как:

$$\frac{(\partial S/\partial\upsilon)_T}{(\partial S/\partial p)_T}=\left.\frac{dS/d\upsilon}{dS/dp}\right|_T=dp/d\upsilon|_T=(\partial p/\partial\upsilon)_T.$$

Вторая дробь преобразуется с использованием соотношения $\delta Q=TdS$, определяющего структуру элементарного количества теплоты в балансе $\delta Q=dU+pd\upsilon$, устанавливаемом первым началом термодинамики [14, 24], и определения теплоемкостей:

$$\frac{(\partial S/\partial T)_p}{(\partial S/\partial T)_\upsilon}=\frac{T^{-1}(\delta Q/\partial T)_p}{T^{-1}(\delta Q/\partial T)_\upsilon}=\frac{C_p}{C_\upsilon}.$$

В итоге получаем соотношение (19). Производную $(\partial p/\partial\rho)_T$ легко вычислить из формулы (16), тогда для скорости звука получим выражение [15]

$$a_{\text{РГ}}(\upsilon,T)=a_{\text{РГ}}^{(0)}\sqrt{1+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{m_i}(i+1)b_{ij}\,\omega^i/\tau^j}, \tag{20}$$

где $a_{\text{РГ}}^{(0)}=R_{N_2}TC_p/C_\upsilon$. Как видно, требуются еще выражения для C_p и C_υ.

По определению $C_\upsilon=(\delta Q/\partial T)_\upsilon=(\partial U/\partial T)_\upsilon=(\partial H/\partial T)_\upsilon-\upsilon(\partial p/\partial T)_\upsilon$ [14]. В результате подстановки выражений (16) и (18) имеем [15]:

$$C_\upsilon=dH^\circ/dT+R_{N_2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{m_i}b_{ij}\,\omega^i/\tau^j\left[(i+j)/i+(i+j)j/i-1+j\right]-R_{N_2}=$$

$$=C_\upsilon^\circ-R_{N_2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{m_i}\frac{j(j-1)}{i}b_{ij}\,\omega^i/\tau^j. \tag{21}$$

Величины $C_\upsilon^\circ=\left(\partial U^\circ/\partial T\right)_\upsilon=dU^\circ/dT$ и $C_p^\circ=dH^\circ/dT=C_\upsilon^\circ+R_{N_2}$ — идеально-газовые теплоемкости, связанные формулой Майера.

Для энтальпии, аналогично тождествам (9) и (12), имеем:

$$TdS = dH - \upsilon dp. \tag{22}$$

Отсюда из определения энтальпии и теплоемкостей находим:

$$C_p = \left(\delta Q/\partial T\right)_p = \left(\partial H/\partial T\right)_p = \left(\partial\left(U + p\upsilon\right)/\partial T\right)_\upsilon + \left(\partial H/\partial\upsilon\right)_T \left(\partial\upsilon/\partial T\right)_p =$$

$$= C_\upsilon + \left(\partial p/\partial T\right)_\upsilon \left(\upsilon - \frac{\left(\partial H/\partial\upsilon\right)_T}{\left(\partial p/\partial\upsilon\right)_T}\right).$$

Здесь дополнительно использовано общее тождество между частными производными от трех параметров, функционально связанных между собой [14]. Применительно к параметрам p, υ, T ему можно придать вид:

$$\left(\partial\upsilon/\partial T\right)_p = -\frac{\left(\partial p/\partial T\right)_\upsilon}{\left(\partial p/\partial\upsilon\right)_T}.$$

Подставляя выражения (16), (18), получаем формулу [15]:

$$C_p = C_\upsilon + \frac{R_{N_2}}{\upsilon}\left(1 - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{m_i}\left(j-1\right)b_{ij}\,\omega^i/\tau^j\right) \times$$

$$\times \left(\upsilon - \frac{-\upsilon^{-1}R_{N_2}T}{-\upsilon^{-2}R_{N_2}T} \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{m_i}\left(i+j\right)b_{ij}\,\omega^i/\tau^j}{1 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{m_i}\left(1+i\right)b_{ij}\,\omega^i/\tau^j}\right) =$$

$$= C_\upsilon + R_{N_2}\frac{\left(1 - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{m_i}\left(j-1\right)b_{ij}\,\omega^i/\tau^j\right)^2}{1 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{m_i}\left(1+i\right)b_{ij}\,\omega^i/\tau^j}. \tag{23}$$

Формулы (16)–(18), (20), (21), (23) относятся как к газообразному, так и к жидкому состояниям азота [15].

В формулы (17), (18), (21) входят зависимости от температуры энтальпии и энтропии азота как идеального газа. Результаты расчета величин $H^\circ\left(T\right) - H^\circ\left(0\right)$, $S^\circ\left(T\right) - S^\circ\left(0\right)$ по аналитическим уравнениям [15] сопоставлены на рис. 4 с данными [16], рассчитанными с шагом $\delta T = 100$ K. На рисунке аналитические зависимости обозначены сплошными линиями, а данные работы [16] — квадратами.

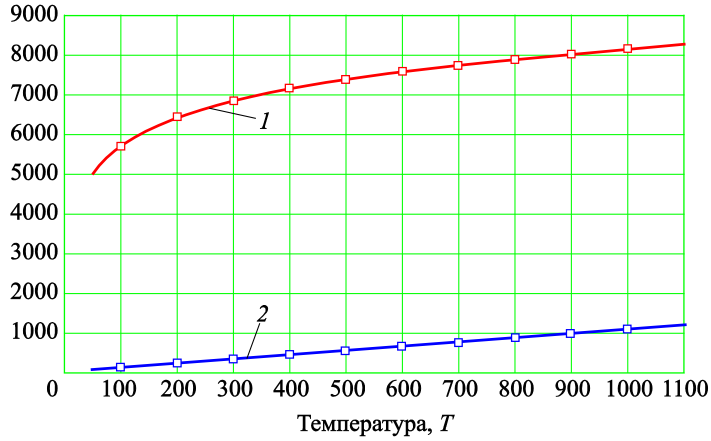

Рис. 4. Идеально-газовые энтальпия и энтропия азота:

1 — изменение энтропии $S^{\circ}(T) - S^{\circ}(0)$; *2* — изменение энтальпии

$(H^{\circ}(T) - H^{\circ}(0)) \cdot 10^{-3}$

Расчет с использованием свойств реального газа. При учете свойств реального газа соотношения баланса массы (5) остаются в силе, а соотношения баланса энергии (7) заменяем более общими [9]:

$$\frac{d\left(m_{\text{кп}}U_{\text{кп}}\right)}{dt} = G_{\text{бн}}H_{\text{бн}} - G_{\text{кп/зп}}H_{\text{кп}}, \quad \frac{d\left(m_{\text{зп}}U_{\text{зп}}\right)}{dt} = G_{\text{кп/зп}}H_{\text{кп}}. \tag{24}$$

Истечение из БН описывается в соответствии с изоэнтропой реального газа. По исходным данным задачи получаем следующие начальные значения параметров в БН: плотность $\rho_{\text{бн}}^{(0)} = 472,8$ кг/м^3; давление $p_{\text{бн}}^{(0)} = 616,49$ бар; удельная внутренняя энергия $U_{\text{бн}}^{(0)} = 3,804 \cdot 10^5$ Дж/кг; удельная энтропия $S_{\text{бн}}^{(0)} = 4699,8$ Дж/(кг $\cdot$ К). Для сравнения начальные значения последних двух параметров в контейнере составляют $U_{\text{кп, зп}}^{(0)} = 4,623 \cdot 10^5$ Дж/кг и $S_{\text{кп, зп}}^{(0)} = 6809$ Дж/(кг $\cdot$ К), соответственно. На рис. 5 изоэнтропа азота $S = 4699,8$ Дж/(кг $\cdot$ К) приведена в переменных p, T.

По текущему значению массы газа в БН находим его плотность $\rho_{\text{бн}} = m_{\text{бн}}/\Omega_{\text{бн}}$, а затем по зависимостям $p_{\text{бн}} = p_{\text{РГ}}\left(\rho_{\text{бн}}, S_{\text{бн}}^{(0)}\right)$, $T_{\text{бн}} = T_{\text{РГ}}\left(\rho_{\text{бн}}, S_{\text{бн}}^{(0)}\right)$, $H_{\text{бн}} = H_{\text{РГ}}\left(\rho_{\text{бн}}, S_{\text{бн}}^{(0)}\right)$, полученным при помощи уравнений состояния (16)–(18), вычисляем текущие значения давления, температуры и энтальпии торможения. Вдоль изоэнтропы (рис. 5) изменяются не только значения этих параметров (во времени), но и состояния частиц, движущихся вдоль линий тока к выходному сечению БН. Это движение подчиняется интегралу Бернулли (3), в котором выражение $\int \upsilon dp$ должно вычисляться по УС реального газа. В адиабатическом процессе, согласно (22), имеем $dH = \upsilon dp$. Тогда интеграл (3) принимает вид:

$$0,5\, v_{\text{бн/кп}}^2 + H_{\text{бн/кп}} = H_{\text{бн}}, \tag{25}$$

где $H_{\text{бн/кп}}$, $v_{\text{бн/кп}}$ — энтальпия и скорость газа на выходе из баллона.

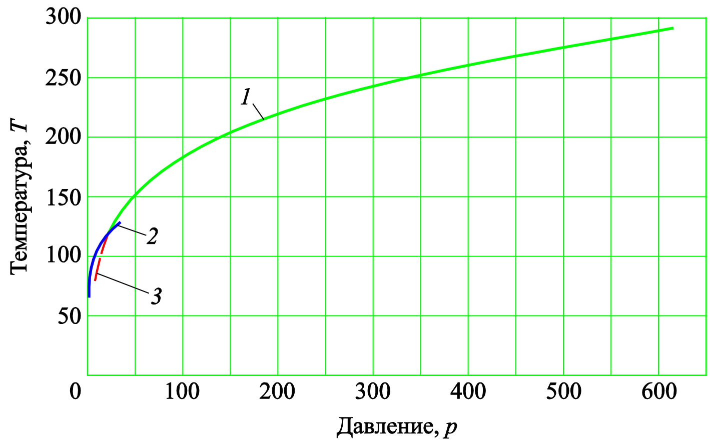

Рис. 5. Изоэнтропа азота для $S_{\text{бн}}^{(0)} = 4699,8$ (*1*), линия насыщения азота (в переменных P, T) (*2*) и метастабильный участок (*3*)

Способ определения параметров в выходном сечении БН показан на рис. 6. Если, двигаясь от значения $p_{\text{бн}}$ к значению $p_{\text{кп}}$ (текущее давление в КП), скорость частиц газа $v = \sqrt{2\left[H_{\text{бн}} - H_{\text{РГ}}\left(p, S_{\text{бн}}^{(0)}\right)\right]}$ достигает местной скорости звука $a = a_{\text{РГ}}\left(p, S_{\text{бн}}^{(0)}\right)$, имеем случай звукового истечения. Это однозначно определяет местное давление $p_{\text{бн/кп}}$, скорость $v_{\text{бн/кп}} = a_{\text{бн/кп}}$ и плотность $\rho_{\text{бн/кп}} = \rho_{\text{РГ}}\left(p_{\text{бн/кп}}, S_{\text{бн}}^{(0)}\right)$ газа, а также расход БН:

$$G_{\text{бн}} = \rho_{\text{бн/кп}} v_{\text{бн/кп}} \Sigma_{\text{бн/кп}}. \tag{26}$$

На этой стадии параметры течения в БН изменяются автономно от процессов в КП и ЗП. В противном случае имеем дозвуковое истечение, а параметры в выходном сечении БН определяются условием

$p_{\text{бн/кп}} = p_{\text{кп}}$: $H_{\text{бн/кп}} = H_{\text{РГ}}\left(p_{\text{кп}}, S_{\text{бн}}^{(0)}\right)$, $v_{\text{бн/кп}} = \sqrt{2\left(H_{\text{бн}} - H_{\text{бн/кп}}\right)}$, $\rho_{\text{бн/кп}} = \rho_{\text{РГ}}\left(p_{\text{кп}}, S_{\text{бн}}^{(0)}\right)$.

Массовый расход из баллона вычисляем по формуле (26).

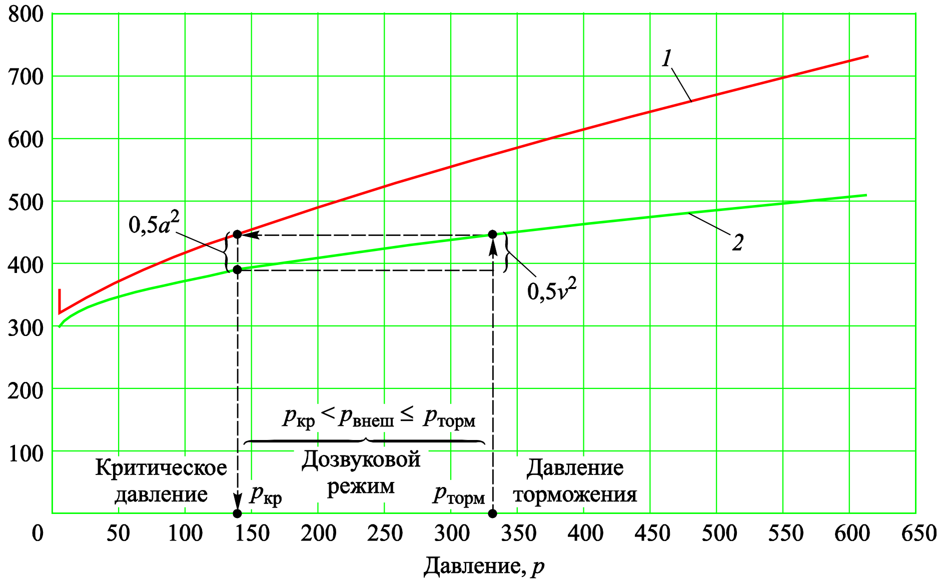

Рис. 6. К определению параметров в выходном сечении БН:
1 — линия $0,5a_{\text{рг}}^2(p) + H_{\text{рг}}(p)\cdot 10^{-3}\big|_{S=\text{const}}$; *2* — изоэнтропа $H = H_{\text{рг}}(p)\cdot 10^{-3}\big|_{S=\text{const}}$

Подобным же образом рассчитывают параметры в КП и ЗП. По текущим значениям массы и полной энергии газа вычисляют плотность ρ и удельную внутреннюю энергию U. Затем по этим значениям и зависимостям для реального газа находят другие параметры торможения: температуру, давление, энтальпию и энтропию. Для того чтобы рассчитать перетекание из КП в ЗП, на каждом шаге интегрирования соотношений (5) и (24) определяют свою изоэнтропу $S_{\text{кп}}(t)$ реального газа. После этого параметры $p_{\text{кп/зп}}$, $H_{\text{кп/зп}} = H_{\text{РГ}}\left(p_{\text{кп/зп}}, S_{\text{кп}}\right)$, $v_{\text{кп/зп}} = \sqrt{2\left(H_{\text{кп}} - H_{\text{кп/зп}}\right)}$, $\rho_{\text{кп/зп}} = \rho_{\text{РГ}}\left(p_{\text{кп/зп}}, S_{\text{кп}}\right)$ вычисляют (см. рис. 6). Массовый расход вычисляют по формуле:

$$G_{\text{кп/зп}} = \rho_{\text{кп/зп}} v_{\text{кп/зп}} \Sigma_{\text{кп/зп}}. \tag{27}$$

При принятых исходных данных расчет по уравнениям (5), (24)–(27) удается провести примерно до момента времени 0,42 с, когда в выходном сечении БН достигается условие начала конденсации (изоэнтропа $S_{\text{бн}}^{(0)} = 4699,8$ Дж/(кг·К) выходит на линию насыщения, см. рис. 5). Соответствующие значения давления и температуры торможения в БН равны $p_{бн} \approx 39,3$ бар и $T_{бн} \approx 147$ К. К этому моменту баллон опорожняется более чем на две трети по массе.

Двухфазная изоэнтропа. Если считать, что при наступлении конденсации материальные частицы будут сохранять целостность (гомогенное течение [25, 26]), то условие адиабатичности (при внутреннем фазовом превращении) позволяет однозначно определить массовые доли g', g'' жидкой и газовой фаз: $S_{бн}^{(0)} = g'S' + g''S''$, $g' + g'' = 1$, где S', S'' — удельные энтропии жидкого и газообразного азота на линии насыщения (ЛН). На рис. 7 построены зависимости плотности, энтальпии и массовой доли конденсата (в процентах) вдоль такой изоэнтропы.

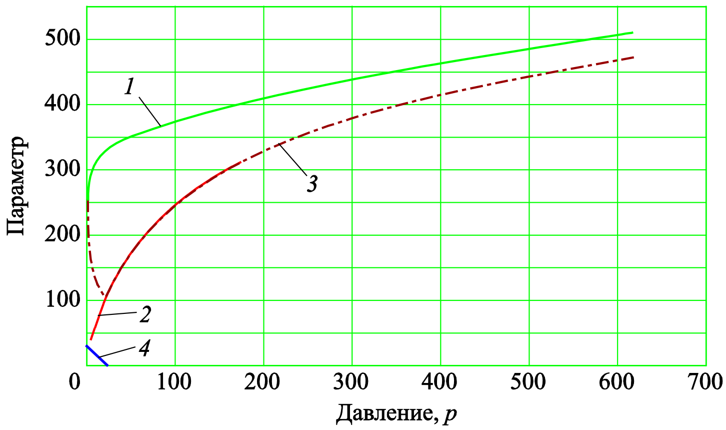

Рис. 7. Зависимость плотности, энтальпии, массовой концентрации конденсата вдоль изоэнтропы в газовой фазе и на ЛН:

1 — энтальпия среды $\cdot 10^{-3}$; *2* — плотность (метастабильный участок); *3* — плотность среды; *4* — процент конденсата (по массе)

Распространить прежний подход на данный случай, по всей видимости, невозможно. Вычисление скорости звука вдоль двухфазной изоэнтропы как $a = \sqrt{(\partial p/\partial \rho)_S}$ приводит к комплексному значению, поскольку на этом участке $(\partial p/\partial \rho)_S < 0$ (см. рис. 7). Однако условия термической и механической устойчивости [22] требуют, чтобы $C_\upsilon > 0$, $C_p > 0$, $(\partial p/\partial \rho)_T > 0$. Из соотношения (19) тогда вытекает неравенство $(\partial p/\partial \rho)_S > 0$, т. е. участок двухфазной изоэнтропы является термодинамически неустойчивым.

Таким образом, от гомогенной модели двухфазного изоэнтропического течения приходится отказаться. Для того чтобы довести расчет до конца, сохранив простоту расчетной схемы, воспользуемся другим подходом, основанным на рассмотрении метастабильных зависимостей. Примером служит учет при расчетах истечения продуктов сгорания из сопел двигателей задержки конденсации водяного пара, наблюдаемой на практике [27].

Метастабильная изоэнтропа. Как известно [14], уравнение Ван-дер-Ваальса качественно описывает не только эффект фазового перехода «газ — жидкость», но и возможность существования метастабильных состояний вещества. Метастабильный участок изоэнтропы $S_{\text{бн}}^{(0)} = 4699{,}8$ Дж/(кг · К) оценивался по УС работы [15], сходные значения дает и известное УС Редлиха — Квонга [13]. В этом случае полностью остается в силе расчет по соотношениям (5), (24)–(27), и процесс расчета наддува КП и ЗП можно завершить. График метастабильной изоэнтропы в переменных p, T, p, H и p, ρ показан на рис. 5–7. Результаты приведены на рис. 2, 3 как расчет 2.

Анализ результатов. Уточненная формула для определения потребной массы газа для наддува свободного пространства контейнера. Как видно из результатов расчетов, ожидания, что учет свойств реального газа приведет к более высоким значениям температуры в БН, не оправдались. Более того, расчет предсказывает значительно более низкую температуру в КП. Наконец, неожиданным оказывается и низкое конечное значение давления в свободном пространстве контейнера. Между тем достижение требуемого давления наддува $p_{\text{надд}} = 7$ бар в расчете по идеальному газу (см. рис. 2) является, с математической точки зрения, точным результатом. В самом деле, пусть $m_{\text{бн}}^{(0)}$, $m_{\text{кп}}^{(0)}$, $m_{\text{зп}}^{(0)}$ — массы газа в соответствующих объемах при температуре $T_{\text{нач}}$ в начальном состоянии системы, причем для суммарной массы m_{Σ} и объема Ω_{Σ} газа имеем, согласно условию (1), соотношение $p_{\text{надд}} = \dfrac{m_{\Sigma} R_{N_2} T_{\text{нач}}}{\Omega_{\Sigma}}$.

Величина $E_{\Sigma} = m_{\Sigma} C_v T_{\text{нач}}$ есть полная энергия газа. По завершении процесса наддува имеем в объемах БН, КП, ЗП массы газа $m_{\text{бн}}^{(\text{к})}$, $m_{\text{кп}}^{(\text{к})}$, $m_{\text{зп}}^{(\text{к})}$ и температуры $T_{\text{бн}}^{(\text{к})}$, $T_{\text{кп}}^{(\text{к})}$, $T_{\text{зп}}^{(\text{к})}$. Давление при этом всюду одинаковое:

$$p^{(\text{к})} = \frac{m_{\text{бн}}^{(\text{к})} R_{N_2} T_{\text{бн}}^{(\text{к})}}{\Omega_{\text{бн}}} = \frac{m_{\text{кп}}^{(\text{к})} R_{N_2} T_{\text{кп}}^{(\text{к})}}{\Omega_{\text{кп}}} = \frac{m_{\text{зп}}^{(\text{к})} R_{N_2} T_{\text{зп}}^{(\text{к})}}{\Omega_{\text{зп}}}.$$

Отсюда непосредственно следует соотношение:

$$\frac{C_v p^{(\text{к})}}{R_{N_2}} = \frac{m_{\text{бн}}^{(\text{к})} C_v T_{\text{бн}}^{(\text{к})}}{\Omega_{\text{бн}}} = \frac{m_{\text{кп}}^{(\text{к})} C_v T_{\text{кп}}^{(\text{к})}}{\Omega_{\text{кп}}} = \frac{m_{\text{зп}}^{(\text{к})} C_v T_{\text{зп}}^{(\text{к})}}{\Omega_{\text{зп}}} = \frac{E_{\text{бн}}^{(\text{к})}}{\Omega_{\text{бн}}} = \frac{E_{\text{кп}}^{(\text{к})}}{\Omega_{\text{кп}}} = \frac{E_{\text{зп}}^{(\text{к})}}{\Omega_{\text{зп}}}.$$

Ввиду сохранения полной энергии, получаем:

$$E_{\Sigma} = m_{\Sigma} C_v T_{\text{нач}} = E_{\text{бн}}^{(\text{к})} + E_{\text{кп}}^{(\text{к})} + E_{\text{зп}}^{(\text{к})} = \frac{C_v p^{(\text{к})}}{R_{N_2}} \Omega_{\Sigma},$$

т. е. $p^{(\text{к})} = \dfrac{m_{\Sigma} R_{N_2} T_{\text{нач}}}{\Omega_{\Sigma}} = p_{\text{надд}}$.

Данный результат не опирается на свойства энтропии. При этом в расчетах как по идеальному, так и по реальному газу, полная энтропия изолированной системы «БН+КП+ЗП» увеличивается вследствие необратимости процесса смешения масс газа с различной температурой. Поэтому объяснение низкого давления наддува при расчете по реальному газу связано с энергетическими причинами, а не с необратимостью процесса. Действительно, если рассмотреть удельную внутреннюю энергию газа как функцию температуры, то для реального газа эта функция будет существенно зависеть еще и от давления (плотности), а для идеального газа — нет. В случае реального газа ее начальное значение $U_{\text{бн}}^{(0)} = 3{,}804 \cdot 10^5$ Дж/кг в БН заметно меньше значения $U_{\text{кп, зп}}^{(0)} = 4{,}623 \cdot 10^5$ Дж/кг при начальных условиях в контейнере.

Для того чтобы скомпенсировать уменьшение полной энергии газа вследствие его сжатия (для заданной температуры $T_{\text{нач}}$), необходимо увеличить массу газа в БН. Для определения нового значения заправляемой в баллон массы газа можно, на первый взгляд, воспользоваться условием:

$$\tilde{m}_{\text{бн}}^{(0)} U_{\text{РГ}} \left(\tilde{m}_{\text{бн}}^{(0)} / \Omega_{\text{бн}}, T_{\text{нач}} \right) = m_{\text{бн}}^{(0)} U_{\text{кп,зп}}^{(0)} \approx 1{,}312 \cdot 10^6 \text{ Дж},$$

если не увеличивать внутренний объем БН, или условием:

$$\tilde{m}_{\text{бн}}^{(0)} U_{\text{бн}}^{(0)} = m_{\text{бн}}^{(0)} U_{\text{кп, зп}}^{(0)} \approx 1{,}312 \cdot 10^6 \text{ Дж}, \tag{28}$$

если сохранить начальную плотность зарядки БН, но изменить его внутренний объем. В первом случае потребная масса газа составляет $\tilde{m}_{\text{бн}}^{(0)} \approx 3{,}646$ кг, что на 28,5 % больше первоначальной оценки (1), при начальном давлении $\tilde{p}_{\text{бн}}^{(0)} \approx 1123$ бар. Условие (28) дает значение

$\tilde{m}_{\text{бн}}^{(0)} \approx 3,448$ кг, что выше оценки (1) на 21,5 %. Этому значению соответствует внутренний объем баллона $\tilde{\Omega}_{\text{бн}} \approx 7,292 \cdot 10^{-3}$ м^3. Подход (28) практичнее. Расчет наддува КП и ЗП в динамике при начальных значениях параметров, соответствующих условию (28), дает результирующее давление наддува $p^{(\text{к})} \approx 5,46$ бар, что существенно меньше запланированного значения $p_{\text{надд}} = 7$ бар.

Для получения правильного значения массы заправки БН в рамках подхода, принятого в данной работе, начнем с соотношения баланса полной энергии в системе «БН+КП+ЗП», используя также обозначения приведенной выше оценки для идеального газа. Имеем:

$$m_{\text{бн}}^{(0)} U_{\text{бн}}^{(0)} + m_{\text{кп}}^{(0)} U_{\text{кп, зп}}^{(0)} + m_{\text{зп}}^{(0)} U_{\text{кп, зп}}^{(0)} = m_{\text{бн}}^{(\text{к})} U_{\text{бн}}^{(\text{к})} + m_{\text{кп}}^{(\text{к})} U_{\text{кп}}^{(\text{к})} + m_{\text{зп}}^{(\text{к})} U_{\text{зп}}^{(\text{к})}. \quad (29)$$

Количества массы и полной энергии газа, поступающие в результате наддува из БН в КП и ЗП, обозначим как:

$$\Delta m_{\text{бн}} = m_{\text{бн}}^{(0)} - m_{\text{бн}}^{(\text{к})} = m_{\text{кп}}^{(\text{к})} + m_{\text{зп}}^{(\text{к})} - m_{\text{кп}}^{(0)} - m_{\text{зп}}^{(0)},$$

$$\Delta E_{\text{бн}} = m_{\text{бн}}^{(0)} U_{\text{бн}}^{(0)} - m_{\text{бн}}^{(\text{к})} U_{\text{бн}}^{(\text{к})}. \quad (30)$$

Для условий в контейнере отличия в свойствах реального и идеального газа невелики. В самом деле, коэффициент сжимаемости Z практически равен 1, а пренебрежение зависимостью внутренней энергии от объема и отклонением теплоемкости C_υ от принятого ранее значения $C_\upsilon = 743$ Дж/(кг·К) приводит к погрешностям в несколько процентов, что позволяет записать:

$$U_{\text{кп}}^{(\text{к})} - U_{\text{кп, зп}}^{(0)} \approx C_\upsilon \left(T_{\text{кп}}^{(\text{к})} - T_{\text{нач}} \right), \; U_{\text{зп}}^{(\text{к})} - U_{\text{кп, зп}}^{(0)} \approx C_\upsilon \left(T_{\text{зп}}^{(\text{к})} - T_{\text{нач}} \right). \quad (31)$$

Подстановка выражений (30), (31) в формулу (29) дает:

$$\Delta E_{\text{бн}} = m_{\text{кп}}^{(\text{к})} U_{\text{кп}}^{(\text{к})} + m_{\text{зп}}^{(\text{к})} U_{\text{зп}}^{(\text{к})} - m_{\text{кп}}^{(0)} U_{\text{кп, зп}}^{(0)} - m_{\text{зп}}^{(0)} U_{\text{кп, зп}}^{(0)} \approx$$

$$\approx m_{\text{кп}}^{(\text{к})} \left[C_\upsilon \left(T_{\text{кп}}^{(\text{к})} - T_{\text{нач}} \right) \right] + m_{\text{зп}}^{(\text{к})} \left[C_\upsilon \left(T_{\text{зп}}^{(\text{к})} - T_{\text{нач}} \right) \right] + \Delta m_{\text{бн}} U_{\text{кп, зп}}^{(0)} =$$

$$= C_\upsilon \left(m_{\text{кп}}^{(\text{к})} T_{\text{кп}}^{(\text{к})} + m_{\text{зп}}^{(\text{к})} T_{\text{зп}}^{(\text{к})} \right) - C_\upsilon T_{\text{нач}} \left(m_{\text{кп}}^{(0)} + m_{\text{зп}}^{(0)} \right) + \Delta m_{\text{бн}} \left(U_{\text{кп, зп}}^{(0)} - C_\upsilon T_{\text{нач}} \right).$$

Пусть $\Omega_{\text{кп+зп}} = \Omega_{\text{кп}} + \Omega_{\text{зп}}$, $\Delta p_{\text{надд}} = p^{(\text{к})} - p_0$. Учтем, что $m_{\text{бн}}^{(0)} = \Omega_{\text{бн}} \rho_{\text{бн}}^{(0)}$, $m_{\text{бн}}^{(\text{к})} = \Omega_{\text{бн}} \rho_{\text{бн}}^{(\text{к})}$, и УС идеального газа для объемов КП и ЗП. Тогда имеем:

$$p_0=\frac{m_{\text{кп}}^{(0)}R_{N_2}T_{\text{нач}}}{\Omega_{\text{кп}}}=\frac{m_{\text{зп}}^{(0)}R_{N_2}T_{\text{нач}}}{\Omega_{\text{зп}}},\quad p^{(\text{к})}\approx\frac{m_{\text{кп}}^{(\text{к})}R_{N_2}T_{\text{кп}}^{(\text{к})}}{\Omega_{\text{кп}}}\approx\frac{m_{\text{зп}}^{(\text{к})}R_{N_2}T_{\text{зп}}^{(\text{к})}}{\Omega_{\text{зп}}},$$

$$C_\upsilon\left(m_{\text{кп}}^{(\text{к})}T_{\text{кп}}^{(\text{к})}+m_{\text{зп}}^{(\text{к})}T_{\text{зп}}^{(\text{к})}\right)-C_\upsilon T_{\text{нач}}\left(m_{\text{кп}}^{(0)}+m_{\text{зп}}^{(0)}\right)=\frac{C_\upsilon\Omega_{\text{кп+зп}}}{R_{N_2}}\Delta p_{\text{надд}},$$

$$\Omega_{\text{бн}}\left(\rho_{\text{бн}}^{(0)}U_{\text{бн}}^{(0)}-\rho_{\text{бн}}^{(\text{к})}U_{\text{бн}}^{(\text{к})}\right)=\frac{C_\upsilon\Omega_{\text{кп + зп}}}{R_{N_2}}\Delta p_{\text{надд}}+$$

$$+\,\Omega_{\text{бн}}\left(\rho_{\text{бн}}^{(0)}-\rho_{\text{бн}}^{(\text{к})}\right)\left(U_{\text{кп, зп}}^{(0)}-C_\upsilon T_{\text{нач}}\right),$$

$$\frac{m_{\text{бн}}^{(0)}}{\rho_{\text{бн}}^{(0)}}=\Omega_{\text{бн}}=\frac{\left(C_\upsilon/R_{N_2}\right)\Omega_{\text{кп+зп}}\Delta p_{\text{надд}}}{\rho_{\text{бн}}^{(0)}U_{\text{бн}}^{(0)}-\rho_{\text{бн}}^{(\text{к})}U_{\text{бн}}^{(\text{к})}-\left(\rho_{\text{бн}}^{(0)}-\rho_{\text{бн}}^{(\text{к})}\right)\left(U_{\text{кп, зп}}^{(0)}-C_\upsilon T_{\text{нач}}\right)}. \tag{32}$$

Выражение (32) будем рассматривать как условие обеспечения заданного давления наддува (в нашем случае $\Delta p_{\text{надд}}=p_{\text{надд}}-p_0=6$ бар). Поскольку по завершении процесса наддува давление в БН также равно $p_{\text{надд}}$, то все параметры правой части формулы (32) известны. При той же плотности зарядки БН $\rho_{\text{бн}}^{(0)}=472{,}8$ кг/м^3, что и в расчете 2 (см. рис. 2, 3), имеем $\rho_{\text{бн}}^{(\text{к})}=\rho_{\text{РГ}}\left(p_{\text{надд}},S_{\text{бн}}^{(0)}\right)\approx45{,}27$ кг/м^3, $U_{\text{бн}}^{(\text{к})}=U_{\text{РГ}}\left(p_{\text{надд}},S_{\text{бн}}^{(0)}\right)\approx$ $\approx2{,}918\cdot10^5$ Дж/кг (при значении $S_{\text{бн}}^{(0)}==4699{,}8$ Дж/(кг$\cdot$К)). По формуле (32) вычисляем внутренний объем баллона $\Omega_{\text{бн}}\approx$ $\approx9{,}826\cdot10^{-3}$ м^3 и потребную массу $m_{\text{бн}}^{(0)}\approx4{,}646$ кг заправки газом. Это значение превышает первоначальную оценку (1) уже на 34,7 %. Результаты расчета динамики процесса наддува с этими данными представлены на рис. 2, 3 как расчет 3. На этот раз давление наддува $p_{\text{надд}}=7$ бар достигается.

В формуле (32) имеем $\rho_{\text{бн}}^{(\text{к})}\ll\rho_{\text{бн}}^{(0)}$, $\rho_{\text{бн}}^{(\text{к})}U_{\text{бн}}^{(\text{к})}\ll\rho_{\text{бн}}^{(0)}U_{\text{бн}}^{(0)}$, что означает пренебрежение остаточным количеством массы и полной энергии в баллоне на момент окончания процесса наддува. Тогда формулу (32) можно преобразовать следующим образом:

$$\Omega_{\text{бн}}\approx\frac{\left(C_\upsilon/R_{N_2}\right)\Omega_{\text{кп+зп}}\Delta p_{\text{надд}}}{\rho_{\text{бн}}^{(0)}U_{\text{бн}}^{(0)}-\rho_{\text{бн}}^{(0)}\left(U_{\text{кп, зп}}^{(0)}-C_\upsilon T_{\text{нач}}\right)},$$

$$\Delta E^{(\text{ид})}\equiv\left(C_\upsilon/R_{N_2}\right)\Omega_{\text{кп+зп}}\Delta p_{\text{надд}}\approx m_{\text{бн}}^{(0)}\left(C_\upsilon T_{\text{нач}}+U_{\text{бн}}^{(0)}-U_{\text{кп, зп}}^{(0)}\right),$$

$$\Delta p_{\text{надд}} \approx \frac{m_{\text{бн}}^{(0)} \left(C_\upsilon T_{\text{нач}} - \left(U_{\text{кп, зп}}^{(0)} - U_{\text{бн}}^{(0)} \right) \right)}{\left(C_\upsilon / R_{N_2} \right) \Omega_{\text{кп+зп}}}, \tag{33}$$

$$m_{\text{бн}}^{(0)} \approx \frac{\Delta E^{(\text{ид})}}{C_\upsilon T_{\text{нач}} - \left(U_{\text{кп, зп}}^{(0)} - U_{\text{бн}}^{(0)} \right)}. \tag{34}$$

Величина $\Delta E^{(\text{ид})}$ есть количество энергии идеального газа, которое требуется добавить в КП и ЗП, чтобы получить избыточное давление $\Delta p_{\text{надд}}$ (отсчет этой энергии соответствует расчету 1 (рис. 2, 3), но не идеально-газовой зависимости $H^\circ(T) = U^\circ(T) + R_{N_2} T$, используемой при расчете свойств реального газа [15]).

Согласно формуле (1), расчету 2 (см. рис. 2, 3) соответствует значение $m_{\text{бн}}^{(0)} \approx \dfrac{\Delta p_{\text{надд}} \Omega_{\text{кп+зп}}}{R_{N_2} T_{\text{нач}}}$ начальной массы газа в БН. По формуле (33) для расчета 2 получаем:

$$p_{\text{надд}} \approx 1 + \frac{\Delta p_{\text{надд}} \Omega_{\text{кп+зп}} / \left(R_{N_2} T_{\text{нач}} \right) \left(C_\upsilon T_{\text{нач}} - \left(U_{\text{кп, зп}}^{(0)} - U_{\text{бн}}^{(0)} \right) \right)}{\left(C_\upsilon / R_{N_2} \right) \Omega_{\text{кп+зп}}} =$$

$$= p_{\text{надд}} - \frac{\Delta p_{\text{надд}}}{C_\upsilon T_{\text{нач}}} \left(U_{\text{кп, зп}}^{(0)} - U_{\text{бн}}^{(0)} \right) \approx 7 - \frac{6(4,623 - 3,804) \cdot 10^5}{743 \cdot 290} \approx 4,719 \text{ бар}$$

(примерно 1 % отличия от результатов расчета 2). Для расчета 3 имеем $m_{\text{бн}}^{(0)} \approx 4,498$ кг, что по формуле (33) дает значение:

$$p_{\text{надд}} \approx 1 + \frac{4,498 \left(743 \cdot 290 - (4,623 - 3,804) \cdot 10^5 \right)}{(743/296,8) \cdot 0,4} \cdot 10^{-5} \approx 7,000 \text{ бар.}$$

Для расчета по соотношению (28)

$$p_{\text{надд}} \approx 1 + \frac{3,448 \left(743 \cdot 290 - (4,623 - 3,804) \cdot 10^5 \right)}{(743/296,8) \cdot 0,4} \cdot 10^{-5} \approx 5,600 \text{ бар}$$

имеем около 3 % отличия от результатов расчета динамики процесса. Условие (28) оказалось неудачным, поскольку «правильные» формулы (33) и (34) построены по закону обратной пропорциональности. Запишем формулу (34) так:

$$\frac{1}{m_{\text{бн}}^{(0)}} \approx \frac{C_{\upsilon} T_{\text{нач}}}{\Delta E^{(\text{ид})}} - \frac{U_{\text{кп, зп}}^{(0)} - U_{\text{бн}}^{(0)}}{\Delta E^{(\text{ид})}} = \frac{R_{N_2} T_{\text{нач}}}{\Omega_{\text{кп+зп}} \Delta p_{\text{надд}}} - \frac{U_{\text{кп, зп}}^{(0)} - U_{\text{бн}}^{(0)}}{\Delta E^{(\text{ид})}}.$$

Здесь первое слагаемое обратно пропорционально оценке (1), а второе — поправка на различие $U_{\text{бн}}^{(0)}$ и $U_{\text{кп, зп}}^{(0)}$, но это нелегко предугадать, и «точная» формула (32) устроена несколько сложнее.

Заключение. Полученные результаты показывают, что в инженерных расчетах следует внимательно относиться к тепловому и энергетическому аспектам быстрого наддува контейнера с ЛА (и полостей самого ЛА) сжатым газом. В частности, для достижения заданного давления наддува свободного пространства контейнера следует увеличивать массу газа, закачиваемого в баллон системы наддува так, чтобы скомпенсировать уменьшение удельной внутренней энергии в состоянии высокого давления. Для определения необходимого количества газа в данной статье была получена несложная расчетная формула (32), использующая параметры реального газа.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ефремов Г.А., Страхов А.Н., Минасбеков Д.А., Горлашкин А.А., Плюснин А.В., Соколов П.М., Бондаренко Л.А., Говоров В.В. Отработка газодинамики подводного старта на наземном газодинамическом стенде предприятия. *Ракетные комплексы и ракетно-космические системы — проектирование, экспериментальная отработка, летные испытания, эксплуатация. Труды секции 22 им. акад. В.Н. Челомея XXXVIII Академических чтений по космонавтике*. Реутов, 2014, с. 65–74.

[2] Плюснин А.В., Бондаренко Л.А., Сабиров Ю.Р. Анализ газогидродинамических процессов и методов их расчета на основе опыта предприятия в отработке подводного минометного старта. *Ракетные комплексы и ракетно-космические системы — проектирование, экспериментальная отработка, летные испытания, эксплуатация: Труды секции 22 им. акад. В.Н. Челомея XXXIX Академических чтений по космонавтике*, Реутов, 2015, с. 74–83.

[3] Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Особенности математического моделирования технических устройств. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 1, с. 5–17.

[4] Дегтярь В.Г., Пегов В.И. Гидродинамика подводного старта ракет. Москва, Машиностроение, 2009, 448 с.

[5] Щеглов Г.А. Модификация метода вихревых элементов для расчета гидродинамических характеристик гладких тел. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение*, 2009. № 2, с. 26–35.

[6] Плюснин А.В. Расчет коэффициентов внутреннего и внешнего нестационарного взаимодействия корпуса ЛА с жидкостью методом граничных элементов. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 2, с. 77–100.

[7] Плюснин А.В., Доденко И.А. Исследование точности метода распределенной присоединенной массы при расчете нестационарной поперечной

нагрузки на деформируемый корпус ЛА при подводном выбросе. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, № 7 (19). DOI: 10.18698/2308-6033-2013-7-841
[8] Плюснин А.В. Расчет нестационарной гидродинамической нагрузки на крышку пускового устройства при подводном выбросе ЛА избыточным давлением газа. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, № 7 (19). DOI: 10.18698/2308-6033-2013-7-847
[9] Плюснин А.В. Учет эффекта вторичного догорания при расчетах систем газодинамического выброса летательного аппарата. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 3, с. 55–73.
[10] Плюснин А.В. Восстановление параметров движения летательного аппарата по данным их дискретной регистрации. Ч. 1. Способы, не использующие регуляризацию. *Математическое моделирование и численные методы*, 2016, № 1 (9), с. 68–88.
[11] Плюснин А.В. Восстановление параметров движения летательного аппарата по данным их дискретной регистрации. Ч. 2. Способы, использующие регуляризацию. *Математическое моделирование и численные методы*, 2016, № 2 (10), с. 39–54.
[12] Дергачев А.А., Бондаренко Л.А., Сабиров Ю.Р., Лобзов Н.Н., Плюснин А.В. *Способ старта ракет с подводной лодки, надводных кораблей и наземных носителей из незатопленной пусковой установки и пусковая установка для его реализации.* Пат. Российская Федерация № 2536961, бюл. № 36.
[13] Reid R.C., Prausnitz J.M., Sherwood T.K. *The Properties of Gases and Liquids.* New York, McGraw-Hill, 1977, 688 p.
[14] Базаров И.П. *Термодинамика.* Москва, Высшая школа, 1991, 376 с.
[15] Сычев В.В., Вассерман А.А., Козлов А.Д., Спиридонов Г.А., Цымарный В.А. *Термодинамические свойства азота.* Москва, Изд-во стандартов, 1977, 352 с.
[16] Глушко В.П., ред. *Термодинамические свойства индивидуальных веществ.* Т. I. Кн. 1, 2. Москва, Наука, 1978.
[17] Седов Л.И. *Механика сплошной среды.* Т. 2. Санкт-Петербург, Лань, 2004, 560 с.
[18] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. Т. 2. Универсальные законы механики и электродинамики сплошных сред.* Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011, 559 с.
[19] Ривкин С.Л., Александров А.А. *Теплофизические свойства воды и водяного пара.* Москва, Энергия, 1980, 424 с.
[20] Шехтман А.М. *Газодинамические функции реальных газов: справочник.* Москва, Энергоатомиздат, 1988, 175 с.
[21] Исакович М.А. *Общая акустика.* Москва, Наука, 1973, 496 с.
[22] Prigogine I., Defay R. *Chemical Thermodynamics.* London, Longman, 1967, 502 p.
[23] Kondepudi D., Progogine I. *Modern Thermodynamics.* New York, John Wiley & Sons, 1999, 462 p.
[24] Воскресенский В.Ю. *Об основаниях энтропии.* Москва, Красанд, 2016, 104 с.
[25] Нигматулин Р.И. *Механика сплошной среды. Кинематика. Динамика. Термодинамика. Статистическая динамика.* Москва, ГЭОТАР-Медиа, 2014, 640 с.
[26] Уоллис Г. *Одномерные двухфазные течения.* Москва, Мир, 1972, 436 с.
[27] Пирумов У.Г., Росляков Г.С. *Газовая динамика сопел.* Москва, Наука, 1990, 368 с.

Статья поступила в редакцию 09.09.2016

Ссылку на статью просим оформлять следующим образом:

Плюснин А.В. Моделирование параметров наддува свободного пространства контейнера при газодинамическом выбросе летательного аппарата с учетом свойств реального газа. *Математическое моделирование и численные методы*, 2016, № 3 (11), с. 53–78.

Плюснин Андрей Владимирович окончил Днепропетровский государственный университет по специальности «Гидроаэродинамика», аспирантуру кафедры «Газовая и волновая динамика» МГУ им. М.В. Ломоносова. Канд. физ.-мат наук, доцент-совместитель кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, зам. начальника отдела АО «ВПК "НПО машиностроения"». Автор ряда работ по нестационарным задачам гидрогазодинамики и теории упругости. e-mail: andrey.plusnin@gmail.com

Pressurization parameters simulation of container empty space during aircraft gas dynamic ejection considering real gas properties

© A.V. Plyusnin

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The article considers the pressurization process of a container empty space with the help of a high-pressure cylinder, which antecedes the gas dynamic ejection of an aircraft. Comparative calculations of this process were done in the quasi-stationary approximation using equations of state for both ideal and real gases. The article shows the necessity of accounting deviations in thermodynamic properties of the operating medium from the ideal-gas behavior in order to estimate correctly both gas reserves in the cylinder and temperature variations in the pressurized volumes.

Key words: *container, annular space, pressurization, ideal gas, real gas.*

REFERENCES

[1] Efremov G.A., Strakhov A.N., Minasbekov D.A., Gorlashkin A.A., Plyusnin A.V., Sokolov P.M., Bondarenko L.A., Govorov V.V. Otrabotka gazodinamiki podvodnogo starta na nazemnom gazodinamicheskom stende predpriyatiya [Underwater launch gas dynamic tests on the ground gas dynamics ground test bench of the enterprise]. *Raketnye kompleksy i raketno-kosmicheskie sistemy — proektirovanie, eksperimentalnaya otrabotka, letnye ispytaniya, ekspluatatsiya. Trudy sektsii 22 im. akad. V.N. Chelomeya XXXVIII Akademicheskikh chteniy po kosmonavtike* [Rocket and space-rocket systems — designing, experimental tests, flight tests, exploitation. Proc. of the 22nd section named after acad. V.N. Chelomei of the XXXVIII Academic Space Technology Readings]. Reutov, 2014, pp. 65–74.

[2] Plyusnin A.V., Bondarenko L.A., Sabirov Y.R. Analiz gazogidrodinamicheskikh processov i metodov ikh rascheta na osnove opyta predpriyatiya v otrabotke podvodnogo minometnogo starta [Analysis of gas and hydro dynamic processes and their calculating methods on the basis of the enterprise experiments in underwater mortar launch tests]. *Raketnye kompleksy i raketno-kosmicheskie sistemy — proektirovanie, eksperimentalnaya otrabotka, letnye ispytaniya, ekspluatatsiya. Trudy sektsii 22 im. akad. V.N. Chelomeya XXXVIII*

Akademicheskikh chteniy po kosmonavtike [Rocket and space-rocket systems — designing, experimental tests, flight tests, exploitation. Proc. of the 22nd section named after acad. V.N. Chelomei of the XXXVIII Academic Space Technology Readings]. Reutov, 2015, pp. 74–83.

[3] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2014, no. 1, pp. 5–17.

[4] Degtyar V.G., Pegov V.I. *Gidrodinamika podvodnogo starta raket* [Hydrodynamics of underwater launch rockets]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 2009, 448 p.

[5] Scheglov G.A. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Mashinostroenie — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Mechanical Engineering*, 2009, no. 2, pp. 26–35.

[6] Plyusnin A.V. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2014, no. 2, pp. 77–100.

[7] Plyusnin A.V., Dodenko I.A. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovations*, 2013, no. 7 (19). DOI: 10.18698/2308-6033-2013-7-841

[8] Plyusnin A.V. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2013, no. 7 (19). DOI: 10.18698/2308-6033-2013-7-847

[9] Plyusnin A.V. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2014, no. 3, pp. 55–73.

[10] Plyusnin A.V. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2016, no. 1 (9), pp. 68–88.

[11] Plyusnin A.V. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2016, no. 2 (10), pp. 39–54.

[12] Dergachev A.A., Bondarenko L.A., Sabirov Y.R., Lobzov N.N., Plyusnin A.V. *Sposob starta raket s podvodnoy lodki, nadvodnykh korabley i nazemnykh nositeley iz nezatoplennoy puskovoy ustanovki i puskovaya ustanovka dlya ego realizatsii* [Method of launch missiles from submarine, surface ships and land based facilities of unflooded launcher and launcher for its implementation]. Patent RF, no. 2536961, no. 36.

[13] Reid R.C., Prausnitz J.M., Sherwood T.K. *The Properties of Gases and Liquids*. New York, McGraw-Hill, 1977, 688 p.

[14] Bazarov I.P. *Termodinamika* [Thermodynamics]. Moscow, Vysshaya shkola, 1991, 376 p.

[15] Sychev V.V., Vasserman A.A., Kozlov A.D., Spiridonov G.A., Zimarnyy V.A. *Termodinamicheskie svoystva azota* [Thermodynamic properties of nitrogen]. Moscow, Publ. of Standarts, 1977, 352 p.

[16] *Glushko V.P., ed. Termodinamicheskie svoystva individualnykh veschestv. Spravochnoe izdanie.* [Thermodynamic properties of individual substances. A reference edition.]. Vol. I, books 1, 2, Moscow, Nauka Publ., 1978.

[17] Sedov L.I. *Mekhanika sploshnoy sredy* [Mechanics of Continua]. Vol. 2. St. Petersburg, Lan Publ., 2004, 560 p.

[18] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoy sredy T. 2. Universalnye zakony mekhaniki i elektrodinamiki sploshnykh sred* [Continuum Mechanics. Vol. 2. Universal Laws of Mechanics and Electrodynamics of Continuous Media]. Moscow, BMSTU Publ., 2011, 559 p.

[19] Rivkin S.L., Aleksandrov A.A. *Teplofizicheskie svoystva vody i vodyanogo para* [Thermophysical Properties of Water and Steam]. Moscow, Energiya Publ., 1980, 424 p.

[20] Shekhtman A.M. *Gazodinamicheskie funktsii realnykh gazov: spravochnik* [Gasdynamic Functions of Real Gases: Reference Book]. Moscow, Energoatomizdat Publ., 1988, 175 p.
[21] Isakovich M.A. *Obschaya akustika* [General Acoustics]. Moscow, Nauka Publ., 1973, 496 p.
[22] Prigogine I., Defay R. *Chemical Thermodynamics*. London, Longman, 1967, 502 p.
[23] Kondepudi D., Progogine I. *Modern Thermodynamics.* New York, John Wiley & Sons, 1999, 462 p.
[24] Voskresenskiy V.Yu. *Ob osnovaniyakh entropii* [On Grounds of Entropy]. Moscow, Krasand Publ., 2016, 104 p.
[25] Nigmatulin R.I. *Mekhanika sploshnoy sredy. Kinematika. Dinamika. Termodinamika. Statisticheskaya dinamika* [Continuum Mechanics. Kinematics. Dynamics. Thermodynamics. Statistical Dynamics]. Moscow, GEOTAR-Media Publ., 2014, 640 p.
[26] Wallis G. *Odnomernye dvukhfaznye techeniya* [Unidimensional Two-Phase Flow]. Moscow, Mir Publ., 1972, 436 p.
[27] Pirumov U.G., Roslyakov G.S. *Gazovaya dinamika sopel* [Gas Dynamics of Nozzles]. Moscow, Nauka Publ., 1990, 368 p.

Plyusnin A.V. graduated from Dnepropetrovsk State University, majoring in Aerohydrodynamics and obtained a degree in the Department of Wave and Gas Dynamics, Lomonosov Moscow State University. Cand. Sci. (Phys. & Math.), Assoc. Professor of the Computational Mathematics and Mathematical Physics Department at the Bauman Moscow State Technical University, Deputy Director of the Department in at JSC “MIC “Mashinostroyenia”. Author of several publications in the field of nonstationary problem of hydrodynamics and theory of elasticity. e-mail: andrey.plusnin@gmail.com