A. A. Nazarov, Optimum Queue Formation in Multichannel Queueing Systems with Indirect Observations,
Probl. Peredachi Inf., 1977, Volume 13, Issue 1, 104–108

n	M								
	$r=1$	$r=2$	$r=3$	$r=4$	$r=5$	$r=6$	$r=7$	$r=8$	$r=9$
7	28	12	7	4	3	2			
8	51	21	12	8	4	3	2		
9	93	35	20	13	8	4	3	2	
10	170	60	33	22	14	8	4	3	2
11	315	102	53	36	24	15	8	4	3
12	585	177	87	58	41	27	15	8	5
13	1092	309	142	92	68	46	28	16	8
14	2048	542	233	145	110	80	51	30	16
15	3855	959	387	228	173	132	90	55	31
16	7281	1708	649	360	268	214	155	100	58
17	13797	3059	1098	574	413	339	260	176	107

n	M						
	$r=10$	$r=11$	$r=12$	$r=13$	$r=14$	$r=15$	$r=16$
11	2						
12	3	2					
13	5	3	2				
14	8	5	3	2			
15	16	8	5	3	2		
16	31	16	8	5	3	2	
17	60	32	16	9	5	3	2

При других значениях r, как это следует из сравнения таблицы с работой [1], во всех просчитанных точках найденная оценка лучше оценки Варшамова.

Оценка (1) практически во всех просчитанных точках хуже, чем полученная в [1], но зато представлена в более удобной для подсчета форме.

Основным преимуществом оценки (1) по сравнению с [3, 4], по-видимому, является то, что ею можно пользоваться при больших значениях r (соответственно $>n/2$ и $>n/4$), которые несомненно представляют интерес, поскольку могут быть реализованы в кодах соответствующего класса.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольдбаум И. Я.* Об оценке числа сигналов в кодах с коррекцией несимметрических ошибок. Автоматика и телемеханика, 1971, 32, *11*, 94–97.
2. *Гольштейн Е. Г.* Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения. М., «Наука», 1971.
3. *Варшамов Р. Р.* Оценка числа сигналов в кодах с коррекцией несимметрических ошибок. Автоматика и телемеханика, 1964, 25, *11*, 1628–1629.
4. *Бассальго Л. А.* Новые верхние границы для кодов, исправляющих ошибки. Проблемы передачи информации, 1965, 1, *4*, 41–44.

Поступила в редакцию
10 декабря 1974 г.

УДК 519.211:621.395.3

ОПТИМАЛЬНОЕ ФОРМИРОВАНИЕ ОЧЕРЕДЕЙ В МНОГОКАНАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ ПРИ КОСВЕННЫХ НАБЛЮДЕНИЯХ

А. А. Назаров

Рассмотрена двулинейная система обслуживания с одним входящим потоком и распределительным устройством, режим работы которого определяется косвенными наблюдениями за состояниями системы и задачей которого является распределение оптимальным образом заявок между обслуживающими приборами.

§ 1. Введение

Одной из важных задач теории связи является изучение управляемых систем передачи информации, интерпретируемых как системы массового обслуживания (СМО). Подобные задачи уже рассматривались ранее (например, в [1]). Как правило, рассматриваются СМО без обратной связи, т. е. случай, когда управление не зависит от состояния системы [2]. Ниже будет рассмотрена задача управления СМО при наличии обратной связи, причем в каждый момент управления известно не точное состояние системы, а приближенное. Примером такой системы может служить вычислительный комплекс, состоящий из нескольких ЭВМ и диспетчера, функцией которого является распределение поступающих программ между машинами. Вообще говоря, диспетчеру неизвестно точное состояние системы, например потому, что информация о состоянии системы поступает с некоторым запозданием, и поэтому в его распоряжении находится приближенная, косвенная информация, учитывая которую диспетчер должен оптимально строить свою работу.

Таким образом, задачу оптимального управления СМО с обратной связью, осуществляемой со случайной погрешностью, назовем задачей оптимального при косвенных наблюдениях управления системой массового обслуживания. Приступим к более строгой постановке задачи.

§ 2. Постановка задачи

Рассмотрим СМО с ограниченным числом мест для ожидания, состоящую из простейшего входящего потока интенсивности λ, двух обслуживающих приборов, время обслуживания которыми распределено экспоненциально с заданными параметрами μ_1 для первого прибора и μ_2 — для второго, и распределительного устройства, которое каждое появившееся требование посылает для обслуживания либо первым, либо вторым прибором. Если соответствующий прибор занят, то требование либо становится в очередь к этому прибору (если длина очереди $i(t)-1$ меньше числа мест для ожидания n_1), либо покидает систему (если заняты все места для ожидания). Поведение системы естественно описывать марковским процессом $\{i(t),\ j(t)\}$, где $i(t)$ и $j(t)$ — число требований в первой и второй подсистеме соответственно. Очевидно, $0\leqslant i(t)\leqslant n_1+1$, $0\leqslant j(t)\leqslant n_2+1$. Если бы в каждый момент времени было известно состояние системы $\{i(t),\ j(t)\}$, то режим работы распределительного устройства, зависящий от состояния системы, определялся бы величинами $\delta(i,\ j)$, которые являются условными вероятностями того, что поступившее требование посылается к первому прибору при условии, что система находится в состоянии $\{i,\ j\}$. Однако длины очередей (число требований в подсистемах) наблюдению не доступны, а наблюдается, вообще говоря, многомерная дискретная величина a с конечным множеством значений, о которой известно условное распределение вероятностей $g(a|i,\ j)$. Поэтому режим работы распределительного устройства определяется величинами $\delta(a)$, $0\leqslant\delta(a)\leqslant 1$, которые являются условными вероятностями того, что поступившее требование посылается к первому прибору при условии, что наблюдаемая величина приняла значение a.

Примером управления при косвенных наблюдениях может служить управление с запаздыванием. В этом случае величиной a является состояние системы $\{k,\ m\}$, которое наблюдалось в некоторый период перед моментом управления, например в предыдущий момент управления так, что управление происходит с запаздыванием, равным интервалу между моментами появления требований. При этом для $0<i\leqslant k$, $0<j\leqslant m$ распределение $g(k,\ m|i,\ j)$ имеет вид

$$g(k,m|i,j)=\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}\frac{(\mu_1 t)^{k-i}}{(k-i)!}e^{-\mu_1 t}\frac{(\mu_2 t)^{m-j}}{(m-j)!}e^{-\mu_2 t}\,dt=$$

$$=C_{k-i+m-j}^{k-i}\left(1-\frac{\mu_1}{\lambda+\mu_1+\mu_2}-\frac{\mu_2}{\lambda+\mu_1+\mu_2}\right)\left(\frac{\mu_1}{\lambda+\mu_1+\mu_2}\right)^{k-i}\left(\frac{\mu_2}{\lambda+\mu_1+\mu_2}\right)^{m-j}.$$

Вероятности $g(k,\ m|i,\ j)$ для остальных значений i, j нетрудно найти аналогично.

Учитывая формулу полной вероятности, ясно, что

$$\delta(i,j)=\sum_a \delta(a)g(a|i,j). \tag{2.1}$$

Нашей задачей является нахождение оптимального при косвенных наблюдениях режима работы распределительного устройства, т. е. такого управления $\delta(a)$, которое доставляет минимум величине

$$L=\mathbf{M}F(i(t),j(t))=\sum_{i,j}F(i,j)P(i,j), \tag{2.2}$$

где $F(i,\ j)$ — некоторая функция потерь, характеризующая величину штрафа за пребывание в подсистемах i и j требований в течение единицы времени. Математическое ожидание берется по стационарному распределению, т. е. $P(i,\ j)$ — финальные вероятности состояний $\{i,\ j\}$. Финальное распределение, естественно, зависит от управления $\delta(a)$ и при заданных $\delta(a)$ единственным образом определяется системой линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{ij} P(i,j)=1,$$

$$(2.3)\qquad \begin{aligned}&(\lambda+\mu_1+\mu_2)P(i,j)=\lambda[\delta(i-1,j)\times\\ &\times P(i-1,j)-\delta(i,j-1)P(i,j-1)]+\lambda P(i,j-1)+\\ &+\mu_1 P(i+1,j)+\mu_2 P(i,j+1)\end{aligned}$$

для $0<i<n_1+1$, $0<j<n_2+1$ и соответствующих уравнений для граничных состояний $(0, 0)$, $(0, j)$ и т. д.

Получающаяся задача является частным случаем задачи нелинейного программирования, так как в ограничения (2.3) входят произведения $\delta(a)P(i, j)$ (из-за членов $\delta(i, j)P(i, j)$). В случае, когда длины очередей (число требований в подсистемах) доступны наблюдениям, соответствующая задача может быть сведена к задаче линейного программирования аналогично работе [3], либо решена методом динамического программирования, как это сделано в [4]. В данном же случае воспользоваться линейным программированием не удается из-за требований, чтобы оптимальный режим работы распределительного устройства $\delta(a)$ зависел лишь от a. Поэтому для нахождения оптимального при косвенных наблюдениях управления системой массового обслуживания используется метод динамического программирования.

§ 3. Оптимальный при косвенных наблюдениях режим работы распределительного устройства

Прежде чем приступить к нахождению оптимального при косвенных наблюдениях управления рассматриваемой СМО, сформулируем следующее утверждение.

Теорема 1. *При заданном управлении $\delta(a)$ величина L определяется системой уравнений*

$$(3.1)\qquad \begin{aligned}&(\lambda+\mu_1+\mu_2)l(i,j)+L=\\ &=F(i,j)+\lambda\delta(i,j)[l(i+1,j)-l(i,j+1)]+\\ &+\lambda l(i,j+1)+\mu_1 l(i-1,j)+\mu_2 l(i,j-1)\end{aligned}$$

для $0<i<n_1+1$, $0<j<n_2+1$ *и аналогичных уравнений для граничных состояний* $(0, 0)$, $(0, j), \ldots,$ *где* δ (i, j) *определяется соотношениями* (2.1).

Доказательство этой теоремы приведено в Приложении, вывод уравнения (3.1) можно также найти в [4].

Для того чтобы воспользоваться динамическим программированием для нахождения оптимального при косвенных наблюдениях управления, каждое уравнение системы (3.1) умножим на $P(i, j)$ (где $P(i, j)$ определяется системой (2.3) при тех же δ, что и в системе (3.1)) и просуммируем все уравнения. Учитывая принцип Беллмана, оптимальное при косвенных наблюдениях управление $\delta(a)$ найдем как совокупность таких величин $0\leqslant\delta(a)\leqslant 1$, которые доставляют минимум выражению

$$(3.2)\qquad \lambda\sum_{ij}\delta(i,j)[l(i+1,j)-l(i,j+1)]P(i,j).$$

Если учесть соотношение (2.1), то выражение (3.2) можно записать следующим образом:

$$\sum_a \delta(a)\lambda\sum_{ij} g(a|i,j)[l(i+1,j)-l(i,j+1)]P(i,j).$$

Отсюда оптимальное при косвенных наблюдениях управление $\delta(a)$ получается в виде

$$(3.3)\qquad \delta(a)=\begin{cases}1, & \text{если } \sum\limits_{ij} g(a|i,j)[l(i+1,j)-l(i,j+1)]P(i,j)<0,\\[2ex] 0, & \text{если } \sum\limits_{ij} g(a|i,j)[l(i+1,j)-l(i,j+1)]P(i,j)>0.\end{cases}$$

Тем самым доказано следующее утверждение.

Теорема 2. *Оптимальное (в смысле критерия 2.2) при косвенных наблюдениях управление $\delta(a)$ принадлежит классу детерминированных управлений, т. е. $\delta(a)$ равно либо 0, либо 1.*

Рассмотрим частный случай

$$g(a\,|\,i,j)=\begin{cases}1, & \text{если} \quad a=(i,j),\\ 0, & \text{если} \quad a\neq(i,j),\end{cases}$$

т. е. случай полной информации о состояниях СМО. В этом смысле оптимальное управление $\delta(i, j)$ будет иметь вид

$$\delta(i,j)=\begin{cases}1, & \text{если} \quad l(i+1,j)<l(i,j+1),\\ 0, & \text{если} \quad l(i+1,j)>l(i,j+1),\end{cases}$$

который совпадает с видом оптимального управления, полученного в [4].

§ 4. Итеративный алгоритм нахождения оптимального при косвенных наблюдениях режима работы распределительного устройства

Для нахождения оптимального при косвенных наблюдениях управления (3.3) естественно воспользоваться методом последовательных приближений в пространстве стратегий [5], который в случае косвенных наблюдений будет выглядеть следующим образом. Пусть имеется k-я итерация в пространстве управлений при косвенных наблюдениях $\delta^{(k)}(a)$. Тогда из (2.1) находится $\delta^{(k)}(i, j)$. Зная $\delta^{(k)}(i, j)$, из (2.3) находится $P^{(k)}(i, j)$ и из (3.1) находится значение критерия $L^{(k)}$, соответствующего управлению $\delta^{(k)}(a)$ и значение разностей $l^{(k)}(i+1, j)-l^{(k)}(i, j+1)$. Используя формулу (3.3), найдем $(k+1)$-ю итерацию в пространстве стратегий при косвенных наблюдениях в виде

$$\delta^{(k+1)}(a)=\begin{cases}1, & \text{если} \quad \sum\limits_{ij} g(a\,|\,i,j)\,[l^{(k)}(i+1,j)-l^{(k)}(i,j+1)]P^{(k)}(i,j)<0,\\[2ex] 0, & \text{если} \quad \sum\limits_{ij} g(a\,|\,i,j)\,[l^{(k)}(i+1,j)-l^{(k)}(i,j+1)]P^{(k)}(i,j)>0\end{cases} \tag{4.1}$$

При вычислении итерации (4.1) необходимо знать решение систем (2.3) и (3.1), размерность которых равна $(n_1+2)(n_2+2)$. В работе [4] показано, как можно понизить размерность этих систем до величины $\min(n_1, n_2)+2$.

Численная реализация на машине М-220 позволяет решать задачи с n_1, n_2 порядка 30. В просчитанных примерах алгоритм сходился достаточно быстро – решение получалось за 6—8 итераций. Для некоторых СМО выигрыш от использования оптимального при косвенных наблюдениях управления по сравнению с использованием оптимальных статических управлений [2] достигал 20%.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Рассмотрим функцию

$$L(i,j,\alpha)=\alpha\int\limits_t^\infty e^{-\alpha(\tau-t)}\,\mathbf{M}[F(i(\tau),j(\tau))\,|\,i(t)=i,\ j(t)=j]\,d\tau,$$

для которой нетрудно показать, что

$$L(i,j,\alpha)\to L \quad \text{при} \quad \alpha\to 0.$$

Для функции $L(i, j, \alpha)$ выпишем обратное уравнение Колмогорова

$$\begin{aligned}(\lambda+\mu_1+\mu_2+\alpha)L(i,j,\alpha)&=\alpha F(i,j)+\\ &+\lambda\delta(i,j)[L(i+1,j,\alpha)-L(i,j+1,\alpha)]+\\ &+\lambda L(i,j+1,\alpha)+\mu_1 L(i-1,j,\alpha)+\mu_2 L(i,j-1,\alpha).\end{aligned} \tag{П.1}$$

Так как нас интересует лишь предельное поведение $L(i, j, \alpha)$ при $\alpha\to0$, представим $L(i, j, \alpha)$ в виде

$$L(i,j,\alpha)=L+\alpha l(i,j)+o(\alpha)$$

(можно доказать, что такое разложение существует). Тогда уравнение (П.1) примет вид

$$(\lambda+\mu_1+\mu_2)l(i,j)+L=F(i,j)+\lambda\delta(i,j)[l(i+1,j)-l(i,j+1)]+$$
$$+\lambda l(i,j+1)+\mu_1 l(i-1,j)+\mu_2 l(i,j-1).$$

Заметим, что в этой системе число уравнений на единицу меньше числа неизвестных (которыми являются L, $l(i, j)$). Однако поскольку эта система определяет $l(i, j)$ лишь с точностью до произвольного постоянного слагаемого, то одно из неизвестных $l(i, j)$ можно зафиксировать. Тогда число неизвестных и число уравнений будет совпадать, что позволяет определить L.

ЛИТЕРАТУРА

1. Системы распределения информации. М., «Наука», 1972.
2. *Небеев А. В., Ревельс В. П.* Исследование многоканальных систем передачи информации методом оптимизации стратегии распределительного устройства. Проблемы передачи информации. 1970, 6, *3*, 96–99.
3. *Мова В. В., Пономаренко Л. А.* Оптимальное назначение приоритетов, зависящих от состояния системы с ограниченным числом мест для ожидания. Изв. АН СССР, Техническая кибернетика. 1974, *5*, 74–81.
4. *Назаров А. А.* Оптимальное формирование очередей в многоканальных системах массового обслуживания. Автоматика и телемеханика. 1975, *8*, 36–39.
5. *Беллман Р.* Динамическое программирование. М., Изд-во иностр. лит-ры, 1960.

Поступила в редакцию
29 января 1975 г.
После переработки
1 марта 1976 г.

ПИСЬМО В РЕДАКЦИЮ

В моей статье «Передача информации по дискретному каналу с обратной связью. Случайное время передачи», опубликованной в журнале ППИ (1976, 12, *4*, 10–30), одним из основных результатов является неравенство (3.9)

$$\mathbf{M}(\ln H_n-\ln H_{n+1}|\mathcal{F}_n)\leqslant C_1,$$

доказанное для $H_n\leqslant H^*(\mathcal{P})$. В действительности это неравенство справедливо для всех H_n. Для доказательства преобразуем сначала выражение в правой части неравенства (П.12), а затем воспользуемся оценками $1-1/x\leqslant\ln x\leqslant x-1$. Тогда выражение в фигурных скобках из (П.12) не превосходит

$$\sum_{l=1}^{L} p(l)\left\{\ln\frac{p(l)}{p_{kl}}-\ln\left[1+\frac{\ln(p_{kl}/p(l))}{\ln(1/f)}\right]\right\}\leqslant\sum_{l=1}^{L}p(l)\ln\frac{p(l)}{p_{kl}p_{jl}}.$$

Последнее выражение $\cup$ выпукло относительно f и чтобы ограничить его сверху, достаточно рассмотреть случаи $f\to 0$ и $f\to 1$, что и сделано в дальнейшем в работе.

Отметим также, что теперь упрощается доказательство теоремы 1 и наводящие соображения (4.9) – (4.10) становятся строгими.

23 ноября 1976 г. *М. В. Бурнашев*