В. О. Кузнецов, К задаче о произведении конформных радиусов неналегающих областей, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 1994, том 212, 114–128

https://www.mathnet.ru/znsl5900

**В. О. Кузнецов**

# К ЗАДАЧЕ О ПРОИЗВЕДЕНИИ КОНФОРМНЫХ РАДИУСОВ НЕНАЛЕГАЮЩИХ ОБЛАСТЕЙ

## § 1. Введение. Формулировка результатов

$1^0$. Одним из классических объектов исследования геометрической теории функций является задача о максимуме произведения конформных радиусов неналегающих областей. Эту задачу можно сформулировать следующим образом. Конформный радиус односвязной области $D$ относительно точки $a$ обозначаем, как обычно, через $R(D,a)$.

**Задача А.** Пусть $a_1,\dots,a_n$ и $b_1,\dots,b_m$ – различные точки $\overline{\mathbb{C}}\,(n\geqslant 2, m+n\geqslant 3$, точки $b_k$ могут отсутствовать: $m\geqslant 0)$, $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ – фиксированные положительные числа. Найти максимум произведения

$$\prod_{k=1}^{n}{}' R_k(D_k,a_k)^{\alpha_k^2} \tag{1}$$

в семействе всех систем $\{D_1,\dots,D_n\}$ неналегающих односвязных областей на $\overline{\mathbb{C}}\setminus\{b_1,\dots,b_m\}$ таких, что $a_k\in D_k$, $k=1,\dots,n$ (штрих у произведения означает, что в случае, когда $a_k=\infty$, под показателем степени в соответствующем сомножителе следует понимать $-\alpha_k^2$).

Задача А исследовалась с начала 30-х гг. и до настоящего времени многими авторами и различными методами. Первые результаты в этой задаче были получены М. А. Лаврентьевым в 1934 г., Г. М. Голузиным в 1947 г., Л. И. Колбиной в 1952 и 1955 гг., Дж. Дженкинсом в 1954 г. (см., например, монографии [1, 2, 3]). В указанных работах было получено решение задачи А в случаях $n=2, m=1$ и $n=3, m=0$. В этих случаях искомый максимум выражается в элементарных функциях. Позднее законченная геометрическая характеристика экстремального семейства областей задачи А в терминах ассоциированного квадратичного дифференциала и описание метрических условий, определяющих искомый максимум при любых $m$ и $n$, были получены как следствие общих результатов метода экстремальных метрик (см. [2, 3]). Решение задачи А в указанных выше случаях получается из упомянутых результатов вполне элементарно.

При $n = 4$, $m = 0$, задача А в случае $\alpha_1 = \ldots = \alpha_4$ была решена в 1980 г. Г. В. Кузьминой [4] (см. также работы С. И. Федорова [5, 6]). Нахождение искомого максимума в явном виде при $n + m > 3$ в тех случаях, когда в расположении точек $a_1, \ldots, a_n$ и $b_1, \ldots, b_m$ нет надлежащей симметрии, значительно усложняется тем обстоятельством, что приходится иметь дело с эллиптическими и гиперэллиптическими интегралами. В связи с этим рассматривались различные варианты задачи А, в которых a priori предполагалась та или иная симметрия в расположении отмеченных точек (см., например, обзор В. Н. Дубинина [7]).

В настоящей работе рассматривается задача А при $n = 3, m = 1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$. Эту задачу будем называть **задачей 1**. Задачу А при $n = 3$, $m = 0$ будем называть **задачей $1^0$**. Максимум произведения (1) в задачах 1 и $1^0$ далее обозначаем соответственно через $I(a_1, a_2, a_3, b)$ и $I(a_1, a_2, a_3)$. При помощи надлежащего дробно-линейного преобразования римановой сферы $\overline{\mathbb{C}}$ на себя решение задач 1 и $1^0$ сводится к решению этих же задач для случая, когда точками $a_1, a_2, a_3$ служат точки $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, где $\omega_k = \omega^{k-1}$, $k = 1, 2, 3$, $\omega = \exp(2\pi i/3)$. В дальнейшем для упрощения формулировок мы ограничимся этим случаем. Пусть при $k = 1, 2, 3$

$$S_k = \{z : |\arg z - \arg \omega_k| < \pi/3\},$$
$$l_k^+ = \{z = t\omega_k\},\ t > 0,\ l_k^- = \{z : -z \in l_k^+\}$$
$$l_k = l_k^+ \cup \overline{l_k^-},\ L^+ = \cup_{k=1}^3 l_k^+,\ L^- = \cup_{k=1}^3 \overline{l_k^-},\ L = L^+ \cup L^-,$$
$$T = \{|z| = 1\}, \quad U = \{|z| < 1\}.$$

Значение $I(1, \omega, \omega^2) = 64/27$, найденное Г. М. Голузиным [1], достигается только для областей $S_k$, являющихся круговыми для квадратичного дифференциала

$$Q_0(z)dz^2 = -\frac{9z}{4\pi^2(z^3-1)^2}\,dz^2. \tag{2}$$

Лучи $l_k^-$ и $l_k^+$ являются соответственно критическими траекториями и критическими ортогональными траекториями этого дифференциала, а окружность $T$ – объединением замыканий трех его ортогональных траекторий. При отображении $w = z^{3/2}$ регулярные траектории дифференциала (2) переходят в окружности $|(w-1)/(w+1)| = t$, где $t \neq 1$, а регулярные ортогональные траектории – в дуги окружностей с концами в точках $+1$ и $-1$.

Очевидно,

$$I(a_1, a_2, a_3, b) \leqslant I(a_1, a_2, a_3).$$

Г. М. Голузин [1] и позднее Л. И. Колбина [8] указали все четверки точек $a_1, a_2, a_3, b$, для которых в этом неравенстве имеет место равенство (см. также утверждения 1) в формулируемых ниже теоремах 1 и 2). Однако при произвольном расположении отмеченных точек значение $I(a_1, a_2, a_3, b)$ до настоящего времени найдено не было.

Упомянутые выше результаты метода экстремальных метрик для задачи 1 в случае $a_k = \omega_k$, $k = 1,2,3$, $b \neq \infty$, могут быть сформулированы следующим образом [2,3].

**Теорема A.** *Экстремальной системой областей задачи 1 для точек* $1, \omega, \omega^2, b$, *где* $b \neq \infty$, *является только система* $\{D_1^*, D_2^*, D_3^*\}$ *круговых областей квадратичного дифференциала*

$$Q(z)dz^2 = -\frac{P(z)}{4\pi^2(z^3-1)^2(z-b)}dz^2, \tag{3}$$

*где* $P(z)$ *– многочлен степени* $\leqslant 3$, *определяемый единственным образом из условий:*

$$P(\omega_k) = (\omega_k - b)\prod_{j\neq k}(\omega_k - \omega_j)^2, \quad k = 1,2,3; \tag{4}$$

$$\bar{D}_1^* \cup \bar{D}_2^* \cup \bar{D}_3^* = \bar{\mathbb{C}}. \tag{5}$$

**Замечание.** Из единственности решения задачи 1 и нормирующих условий (4) вытекает, что дифференциал (3) теоремы A можно представить также в виде:

$$Q(z)dz^2 = \frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{-9z}{(z^3-1)^2} + \frac{q}{(z^3-1)(z-b)}\right)dz^2, \tag{3'}$$

где $q$ – некоторая постоянная.

$2^0$. Переходим к изложению результатов данной работы. При исследовании задачи 1 существенную роль играет следующая теорема, описывающая геометрические свойства экстремальной системы областей в этой задаче.

**Теорема 1.** *Пусть* $b \in \bar{S}_k$. *Тогда справедливы следующие утверждения.*

1) *если* $b \in L^-$, *то дифференциалы* (2) *и* (3) *совпадают,* $D_k^* = S_k$, $k = 1,2,3$.

2) *Если* $b \notin L^-$, *то дифференциал* (3) *имеет простой полюс* $b$ *и три нуля* $c_1, c_2, c_3$ *(два из которых могут совпадать), причем* $c_1, c_2, c_3, b \in \bar{D}_k \subset S_k$. *Пусть* $\Gamma_b$ *– критическая траектория дифференциала* (3), *выходящая из точки* $b$, *и пусть* $c_1$ *– тот из нулей дифференциала* (3), *в котором оканчивается эта траектория. Пусть*

*$\mathcal{D}_b \subset S_k$ – область, ограниченная траекторией $\gamma_b$ дифференциала (2), проходящей через точку $b$. Тогда $\bar{\Gamma}_b \subset (S_k \setminus \bar{\mathcal{D}}_b) \cup \{b\}$, один из нулей $c_2, c_3$ лежит внутри окружности $T$, другой вне нее.*

3) *Если $b \in l_k^+$, то экстремальная система областей симметрична относительно прямой $l_k$, $c_1 = c_2 = c$ – двойной нуль дифференциала (3), $\Gamma_b \cup \{c\} \subset l_k^+$, все критические траектории дифференциала (3), выходящие из его простого нуля $c_3$, оканчиваются в точке $c$.*

4) *Если $b \notin L$, то все нули дифференциала (3) простые. Три критические траектории, выходящие из точки $c_1$, оканчиваются в точках $b, c_2, c_3$. Пусть $S_b$ – содержащий точку $b$ сектор, отсекаемый лучом $l_k^+$ от сектора $S_k$, $S_b' = S_k \setminus \bar{S}_b$, $-b \in S_n$. Тогда $c_1 \in S_b$, $c_2, c_3 \in S_b'$, $\bar{D}_n^* \subset S_n \cup \bar{S}_b' \setminus l_k$.*

5) *Если $b \in T \setminus L$, то экстремальная система областей симметрична относительно окружности $T$, $\Gamma_b \cup \{c_1\} \subset T$, $c_3 = \bar{c}_2^{-1}$.*

6) *Если $b \notin L \cup T$, то пусть $G_b$ – область, ограниченная ортогональной траекторией $\gamma_b^0$ дифференциала (2), проходящей через точку $b$, и окружностью $T$, и не содержащая точек 0 и $\infty$. Тогда $\bar{\Gamma}_b \subset G_b \cup \{b\}$.*

Так как при $b \notin L$ дифференциал (3) по теореме 1 имеет три простых нуля, то решение задачи 1 выражается в элементарных функциях только, если $b \in L$. Верна следующая теорема.

**Теорема 2.** 1) *Если $b \in L^-$, то* [1]

$$I(1, \omega, \omega^2, b) = I(1, \omega, \omega^2) = 64/27.$$

2) *Если $b \in L^+$, то*

$$I(1, \omega, \omega^2, b) = \left(\frac{4|1 - c^3|}{3(1 + c^3)}\right)^3, \tag{6}$$

*где $c$ – двойной нуль дифференциала (3′), определяемый единственным образом из условия*

$$b/c = (c^3 + 2)/(2c^3 + 1) > 0. \tag{7}$$

*Экстремальная система областей состоит из круговых областей дифференциала (3′), где*

$$q = 9c^2/(2c^3 + 1).$$

Как было сообщено автору, решение задачи 1 в случае $b \in L^+$ было получено ранее в несколько другой форме Е. Г. Емельяновым. Однако этот результат не был опубликован и автор не имел возможности с ним ознакомиться.

Приведем метрические условия, определяющие экстремальную систему областей при $b \notin L$. Достаточно ограничиться случаем $b \in \bar{U}$, для которого теорема 1 позволяет в качестве соответствующих путей интегрирования рассматривать прямолинейные отрезки.

**Теорема 3.** 1) *Если $b \in U \setminus L$, то экстремальная система областей задачи 1 состоит из круговых областей дифференциала $(3')$, где $q$ однозначно определяется из условий*

$$\operatorname{Im} \int\limits_{[b,c_k]} \sqrt{Q(z)}\,dz = 0, \quad k = 1,2, \tag{8}$$

*где $c_1, c_2 \in U$ – нули дифференциала $(3')$.*

2) *Если $b \in T \setminus L$, то экстремальная система областей задачи 1 состоит из круговых областей дифференциала $(3')$, где $q$ однозначно определяется следующими условиями:*

$$2\arg q = \arg b, \quad \operatorname{Re} q^3 > 0; \tag{9}$$

*дифференциал $(3')$ имеет нуль $c \in U$ такой, что*

$$\operatorname{Im} \int\limits_{[b,c]} \sqrt{Q(z)}dz = 0. \tag{10}$$

В силу теоремы 3 значение величины $I(1, \omega, \omega^2, b)$ при $b \notin L$ может быть выражено в терминах эллиптических функций. Однако получающиеся при этом выражения довольно громоздки и непосредственно из них трудно получить информацию о характере изменения величины $I(1, \omega, \omega^2, b)$ при изменении точки $b$. Следующая теорема несосредственно вытекает из теоремы 1 и теоремы о градиенте модуля экстремально-метрической проблемы для семейств кривых (см. работы А. Ю. Солынина [9] и Е. Г. Емельянова [10]).

**Теорема 4.** *Величина $I(1, \omega, \omega^2, b)$ монотонно возрастает при движении точки $b$ вдоль ортогональной траектории дифференциала (2) от его двойного полюса к множеству $L^-$ и монотонно убывает при движении точки $b$ вдоль траектории дифференциала (2) от окружности $T$ к множеству $L^+$.*

$3^0$. Полагая в задаче 1 $b = \infty$, получаем задачу о максимуме произведения $|f_1'(0)f_2'(0)f_3'(0)|$ в семействе регулярных конформных отображений $z = f_k(\zeta)$ круга $|\zeta| < 1$ на неналегающие друг на друга области, $f_k(0) = a_k$, $k = 1,2,3$. Положим

$$J(a_1, a_2, a_3, b) = \frac{I(a_1, a_2, a_3, b)}{|(a_1 - a_2)(a_3 - a_1)(a_2 - a_3)|},$$

где, как обычно, если $a_k = \infty$, то под соответствующими сомножителями в знаменателе понимается 1. В силу результата Г. М. Голузина [1],

$$J(a_1, a_2, a_3, \infty) \leqslant 64/81\sqrt{3},$$

причем в [1] дано описание всех случаев, при которых в этом неравенстве имеет место равенство. Так как величина $J(a_1, a_2, a_3, \infty)$ инвариантна при линейных отображениях, то задача нахождения $J(a_1, a_2, a_3, \infty)$ для произвольного набора точек $a_k$ сводится к той же задаче для точек $1, -1, a$, где $a = (2a_3 - a_1 - a_2)/(a_1 - a_2)$. Пусть $w = w(z)$ – дробно-линейное преобразование, переводящее точки $1, \omega, \omega^2$ в точки $1, -1, \infty$. Производя в (2) замену переменной, приходим к дифференциалу

$$Q_1(w)dw^2 = -\frac{w^2+3}{4\pi^2(w^2-1)^2}\,dw^2. \tag{11}$$

Пусть $L_w^+$ и $L_w^-$ – образы соответственно множеств $L^+$ и $L^-$ при отображении $w = w(z)$. Следующая теорема дополняет результат Г. М. Голузина.

**Теорема 5.** 1) *Если* $a \in L_w^-$, *то* [1]

$$J(1, -1, a, \infty) = 64/81\sqrt{3}.$$

2) *Если* $a \in L_w^+$, *то*

$$J(1, -1, a, \infty) = \frac{64}{81\sqrt{3}}\left(\frac{|1-c^3|}{1+c^3}\right)^3,$$

*где*

$$c = |(a - i\sqrt{3})/(a + i\sqrt{3})|.$$

3) *Величина* $J(1, -1, a, \infty)$ *монотонно возрастает при движении точки* $a$ *вдоль ортогональной траектории дифференциала* (11)*от его двойного полюса к множеству* $L_w^-$ *и монотонно убывает при движении точки* $a$ *вдоль траектории дифференциала* (11) *от вещественной оси к множеству* $L_w^+$.

## § 2. Вспомогательные утверждения

$1^0$. Этот параграф посвящен доказательству лемм 1–4, используемых при доказательстве теорем 1–3.

**Лемма 1.** *В выражении (3′) для квадратичного дифференциала теоремы A равенство $q = 0$ имеет место тогда и только тогда, когда $b \in L^-$. Если $b \notin L^-$, то параметр $q$ однозначно определяется условиями*

$$\operatorname{Im} \int\limits_{\gamma(c'_k)} \sqrt{Q(z)}\, dz = 0, \quad k = 1, 2, \tag{12}$$

*где $c'_1, c'_2$ – два любых нуля дифференциала (3′), $\gamma(c'_k)$ – произвольный путь на $\bar{\mathbb{C}} \setminus \{1, \omega, \omega^2\}$, соединяющий точки $b$ и $c'_k$.*

**Доказательство.** Пусть $b \in L^-$. Тогда из теоремы A и упомянутого выше результата Г. М. Голузина в задаче $1^0$ вытекает, что дифференциалы (2) и (3′) совпадают, откуда $q = 0$. Обратно, если $q = 0$, то дифференциалы (2) и (3′) совпадают, $S_1, S_2, S_3$ – круговые области дифференциала (3′), и из условия (5) получаем $b \in L^-$.

Пусть $b \notin L^-$. Покажем, что для дифференциала (3′) условия (5) и (12) равносильны. Необходимость условий (12) очевидна. Покажем, что они являются и достаточными. Пусть $D_k$, $k = 1, 2, 3$, – круговые области дифференциала (3′), удовлетворяющего условиям (12). По основной структурной теореме Дж. Дженкинса [3], граница каждой из этих областей состоит из замыканий конечного числа траекторий дифференциала (3′) и содержит по крайней мере один нуль этого дифференциала. Пусть $\Gamma$ – критическая ортогональная траектория, выходящая из нуля дифференциала (3′), лежащего на границе области $D_k$, в область $\bar{\mathbb{C}} \setminus \bar{D}_k$. Повторяя рассуждения работы [5], относящиеся к доказательству аналогичного факта, показываем, что $\Gamma \subset D_j$, где $j \neq k$. Отсюда вытекает, что множество $D^0 = \bar{D}_1 \cup \bar{D}_2 \cup \bar{D}_3$ связно. Остается доказать, что $D^0 = \bar{\mathbb{C}}$. В противном случае пусть $G$ – компонента связности множества $\bar{\mathbb{C}} \setminus D^0$, $\Gamma'$ – критическая ортогональная траектория, выходящая из нуля дифференциала (3′), лежащего на границе области $G$, в область $G$. Повторяя еще раз упомянутые выше рассуждения работы [5], получаем, что $\Gamma' \subset D_l$ при некотором $l$, что невозможно. Полученное противоречие доказывает лемму.

$2^0$. **Лемма 2.** *Каждая критическая траектория дифференциала (3′) имеет своими концами различные точки $\bar{\mathbb{C}}$.*

**Доказательство.** Предположим, что концы какой-либо критической траектории совпадают. Тогда замыкание этой критической траектории является границей одной из круговых областей $D^*_k$ дифференциала (3′). Пусть $D^*_j$ – круговая область этого дифференциала, граничащая с $D^*_k$. Так как $\partial D^*_k \subset \partial D^*_j$, то при надлежащем выборе ветви корня

$$\int_{\partial D_k^*} \sqrt{Q(z)}\,dz < \int_{\partial D_j^*} \sqrt{Q(z)}\,dz.$$

Пришли к противоречию, так как из теоремы А вытекает, что

$$\int_{\partial D_k^*} \sqrt{Q(z)}\,dz = 2\pi, \quad k = 1, 2, 3.$$

Всюду в дальнейшем используем обозначения пунктов 2), 4) и 6) теоремы 1. В частности, нуль $c_1$ и критическая траектория $\Gamma_b$ дифференциала (3′) определены в пункте 2) теоремы 1.

**Лемма 3.** *Дифференциал (3′) не имеет нулей третьего порядка. Если $c_1$ – простой нуль дифференциала (3′), то $c_2$ и $c_3$ – простые нули, каждый из которых соединяется с $c_1$ критической тректорией. Если $c_1$ – двойной нуль дифференциала (3′), то все критические траектории, выходящие из простого нуля дифференциала (3′), оканчиваются в $c_1$.*

**Доказательство.** Если $c_1$ – нуль третьего порядка, то всякая критическая траектория, выходящая из $c_1$ и отличная от $\Gamma_b$, должна оканчиваться в $c_1$, что невозможно по лемме 2. Пусть $c_1$ – простой нуль и пусть две критические траектории $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$, выходящие из точки $c_1$, оканчиваются в одном и том же нуле $c_2$. Тогда существует критическая траектория $\Gamma_3$, соединяющая точку $c_2$ с нулем $c_3$, причем, по лемме 2, $c_3 \neq c_2$. В этом случае вторым концом критической траектории, выходящей из точки $c_3$ и отличной от $\Gamma_3$, может быть только та же точка $c_3$, что противоречит лемме 2. Если $c_1$ – нуль второго порядка, то критическая траектория, выходящая из $c_1$, по лемме 2 не может оканчиваться в $c_1$. Следовательно, все три критические траектории, выходящие из простого нуля, оканчиваются в $c_1$.

$3^0$. Пусть $\bar{\Phi} = \bar{\mathbb{C}} \setminus (D_1^* \cup D_2^* \cup D_3^*)$. В силу теоремы А, множество $\bar{\Phi}$ связно и является объединением замыканий критических траекторий дифференциала (3′).

**Лемма 4.** *Если $b \notin l_k^+ \cup L^-$, то на прямой $l_k$ существует только одна точка касания с траекториями дифференциала (3′) и нет нулей этого дифференциала, прямая $l_k$ пересекает множество $\bar{\Phi}$ только в двух точках, $l_k \cap \bar{\Gamma}_b = \varnothing$.*

**Доказательство.** Из леммы 2 и 3 вытекает, что любые две из областей $D_1^*, D_2^*, D_3^*$ имеют общий участок границы. Поэтому $l_k \cap \bar{\Phi}$

состоит не менее чем из двух точек. Следовательно, на прямой $l_k$ должна существовать по крайней мере одна точка касания с траекториями дифференциала $(3')$. Пусть, для определенности, $k = 1$. Условия $t \in l_1$, $\operatorname{Im} Q(t) = 0$ приводят к уравнению

$$\operatorname{Im}\{q/(t-b)\} = 0. \tag{13}$$

Так как $\operatorname{Im} b \neq 0$ и $q \neq 0$, то это уравнение имеет только один корень. Следовательно, на прямой $l_k$ существует только одна точка касания с траекториями дифференциала $(3')$ и нет нулей дифференциала $(3')$. Прямая $l_k$ пересекает множество $\bar{\Phi}$ только в двух точках и, в частности, не пересекает дугу $\bar{\Gamma}_b$, так как в противном случае на прямой $l_k$ существовало бы не менее двух точек касания с траекториями дифференциала $(3')$.

**Следствие 1.** *Если $b \in S_k$, то $\Gamma_b \cup \{c_1\} \subset S_k$, если $b \notin L$, то $\Gamma_b \cup \{c_1\} \subset S_b$.*

Известно (см., например, [9]), что дифференциал $(3')$ непрерывно зависит от параметра $b$. Поэтому из леммы 4 вытекает:

**Следствие 2.** *Число нулей (с учетом их кратности) дифференциала $(3')$, лежащих в секторах $S_k$ и $S_b$, не зависит от положения точки $b$ внутри каждого из этих секторов.*

## § 3. Доказательство теоремы 1

$1^0$. Утверждение 1) теоремы 1 вытекает из леммы 1. Из леммы 1 получаем также, что при $b \notin L^-$ дифференциал $(3')$ имеет простой полюс и три нуля (с учетом их кратности).

Докажем 3). Пусть $b \in l_1^+$. Из единственности решения задачи 1 и симметрии в расположении точек $1, \omega, \omega^2, b$ вытекает, что экстремальная система областей симметрична относительно прямой $l_1$. Поэтому из следствия 1 получаем, что $\Gamma_b \cup \{c_1\} \subset l_1^+$. Предположим, что $c_1$ – простой нуль дифференциала $(3')$. Тогда, по лемме 3, критические траектории $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$ соединяют нуль $c_1$ с двумя различными простыми нулями дифференциала $c_2$ и $c_3$, симметричными относительно прямой $l_1$. Пусть $\Gamma_3$ – критическая траектория, выходящая из точки $c_2$ и отличная от $\Gamma_1$. По лемме 3, вторым концом $\Gamma_3$ является точка $c_3$. Аналогичное утверждение справедливо и для третьей критической траектории $\Gamma_4$, выходящей из точки $c_2$ и отличной от $\Gamma_1$ и $\Gamma_3$. Тогда все круговые области дифференциала $(3')$ имели бы осью симметрии прямую $l_1$, что невозможно, так как точки $\omega$ и $\omega^2$ симметричны относительно прямой $l_1$. Полученное противоречие и лемма 3 показывают, что $c_1$ – двойной нуль.

**Следствие 3.** *Если $b \in S_k$, то в $S_k$ лежит не менее двух нулей (с учетом их кратности) дифференциала* (3′).

$2^0$. Докажем утверждение 5) теоремы 1. Так как решение задачи 1 единственно и точки $1, \omega, \omega^2, b$ лежат на окружности $T$, то экстремальная система областей симметрична относительно $T$. Поэтому из следствия 1 вытекает, что $\Gamma_b \cup \{c_1\} \subset T \cap S_b$. Предположим, что $c_1$ – двойной нуль дифференциала (3′). Тогда, по лемме 3, критические траектории, выходящие из нуля $c_1$, ограничивают все три круговые области дифференциала (3′). В этом случае, однако, две из трех круговых областей дифференциала (3′) были бы взаимно симметричны относительно окружности $T$, что невозможно, так как точки $1, \omega, \omega^2$ лежат на $T$. Полученное противоречие и лемма 3 показывают, что $c_1, c_2$ и $c_3$ – простые нули. Так как экстремальная система областей симметрична относительно окружности $T$, то $c_3 = \bar{c}_2^{-1}$ и, по следствию 3, $c_2, c_3 \in S_1$. Утверждение 5) доказано.

Из (3′) получаем, что

$$c_1 c_2 c_3 = 1, \tag{14}$$

и, так как $c_1 \in S_b$, то $c_2, c_3 \in S'_b$. Так как дифференциал (3′) непрерывно зависит от $b$, то из следствия 2 вытекает, что $c_2, c_3 \in S'_b$ при любом $b \notin L$. Применяя лемму 4, заключаем, что при $b \notin L$ две критические траектории, соединяющие точки $c_2$ и $c_3$, не пересекают прямую $l_k$. Поэтому для круговой области $D_n^*$ дифференциала (3′), ограниченной замыканиями этих критических траекторий, имеем $\bar{D}_n^* \subset (S_n \cup \bar{S}'_b) \setminus l_k$. Этим доказано утверждение 4).

$3^0$. Этот и следующие три пункта этого параграфа посвящены доказательству утверждений 2) и 6) теоремы 1.

Пусть $b \in S_1$. Из (3′) получаем:

$$9/q = c_1 + c_2 + c_3, \quad 9b/q = c_1^{-1} + c_2^{-1} + c_3^{-1}. \tag{15}$$

Так как $c_1, c_2, c_3 \in S_1$, то

$$|\arg q| < \pi/3, \quad |\arg\{q/b\}| < \pi/3. \tag{16}$$

Пусть $t_n$ – угол наклона внешней нормали к области $\mathcal{D}_b$ в точке $b$. Тогда

$$t_n = \arg\{(b^3 - 1)/\sqrt{b}\}.$$

Здесь и в дальнейшем выбираем главную ветвь корня. Пусть $t_k$ – угол наклона наклона касательной к траектории $\Gamma_b$ в точке $b$. Из (3′) находим

$$t_k = \arg\{(b^3 - 1)/q\}.$$

Следовательно,

$$t_k - t_n = \arg\{\sqrt{b}/q\}. \tag{17}$$

Из (16) вытекает, что

$$|t_k - t_n| < \pi/3. \tag{18}$$

Пусть $b \in T \cap S_1 \cup l_1^+$. Тогда, так как $\Gamma_b \subset \gamma_b^0$, то из (18) получаем, что

$$t_k = t_n, \quad 2\arg q = \arg b. \tag{19}$$

Следовательно, $\bar{\Gamma}_b \subset \partial D_1$ и $\bar{\Gamma}_b \subset (S_1 \setminus \bar{\mathcal{D}}_b) \cup \{b\}$. Из непрерывной зависимости дифференциала (3′) от $b$ и леммы 1 вытекает, что $\bar{\Gamma}_b \subset \partial D_k$ при любом $b \in S_k$.

$4^0$. Пусть $S_1^0 = S_1 \cap U \cap \{\operatorname{Im} z > 0\}$, $b \in S_1^0$, $G^0 = G_b \cap S_1 \setminus \bar{\mathcal{D}}_b$, $\delta_0 = \partial G^0 \cap \gamma_b^0$. Так как $\bar{D}_1^* \subset S_1$, то $\delta_0 \cap \bar{\Phi} \setminus \{b\} \neq \varnothing$. Следовательно, на дуге $\delta_0 \cap S_1$ должна быть точка $z_0$ касания с траекториями дифференциала (3′), что приводит к условию

$$q(z_0^3 - 1)/[z_0(z_0 - b)] > 0. \tag{20}$$

Пусть $B, w_0$ и $\delta_0'$ – образы соответственно точек $b, z_0$ и дуги $\delta_0$ при отображении $w = z^{3/2}$, $v = w_0/B$. Тогда $\delta_0'$ – дуга окружности $T_1$, проходящей через точки 1 и $-1$, $\delta_0' \subset \{|w| < 1\}$, $0 < \operatorname{Im} w_0 < \operatorname{Im} B$, $0 < \arg v < \pi/2$ и $|v| < 1$. Из (20) получаем:

$$\arg\{\sqrt{b}/q\} = \arg\{(w_0 - w_0^{-1})/(v^{1/3} - v^{-1/3})\}. \tag{21}$$

Имеем:

$$-\pi/2 < \arg\{(v - v^{-1})/(v^{1/3} - v^{-1/3})\} = \arg\{v^{2/3} + 1 + v^{-2/3}\} < 0. \tag{22}$$

Так как $1, B, w_0, -\bar{w}_0^{-1} \in T_1$, то

$$\frac{(1 + \bar{w}_0^{-1})(B - w_0)}{(1 - w_0)(B + \bar{w}_0^{-1})} > 0.$$

Следовательно,

$$-\frac{\pi}{2} < \arg \frac{w_0 - w_0^{-1}}{v - v^{-1}} = \arg \frac{w_0 + \bar{B}^{-1}}{w_0 + B} < 0. \tag{23}$$

Из (17), (18) и (21)–(23) получаем

$$-\pi/3 < t_k - t_n = \arg\{\sqrt{b}/q\} < 0. \tag{24}$$

Пусть $T^0 = T \cap \bar{S}_1^0$, $z \in T^0$. Тогда $1 = |z| > |b|$, $|\arg(z/b)| < \pi/3$, $|\arg((z/b)^{1/2} - (b/z)^{-1/2})| < \pi/2$, и из (24) получаем

$$0 < \arg \frac{q(z^3-1)}{z(z-b)} = \arg \left\{ \frac{q}{\sqrt{b}}(z^{3/2} - z^{-3/2}) \left( \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{z}} \right) \right\} < 4\pi/3.$$

Поэтому из (20) вытекает, что на дуге $T^0$ нет нулей дифференциала (3′) и точек касания с его траекториями. Следовательно, $\bar{\Gamma}_b \cap T^0 = \varnothing$ и так как $\bar{\Gamma}_b \subset S_b$, то $\bar{\Gamma}_b \subset S_1^0$. Далее, если $b \in (0,1)$, то из (14) и (19) получаем $c_1 = c_2 < 1 < c_3 = c_1^{-2}$; если $b \in T \cap S_1$, то $c_3 = \bar{c}_2^{-1}$, $c_3 \neq c_2$. Следовательно, при $b \in l_1^+ \cup T_1$ один из нулей $c_2, c_3$ лежит внутри окружности $T$, другой вне нее. Так как дифференциал (3′) непрерывно зависит от $b$, то это справедливо при любом $b \notin L^-$.

$5^0$. Пусть $b \in S_1^0$. Предположим, что $\delta_0 \cap \bar{\Gamma}_b \neq \{b\}$. Тогда на $\delta_0$ существует либо не менее двух точек касания с траекториями дифференциала (3′), либо точка касания и нуль этого дифференциала. В обоих случаях для двух различных точек дуги $\delta_0'$ должно выполняться равенство (21). Чтобы показать, что это невозможно, достаточно доказать монотонность оцениваемых в (22) и (23) величин при движении точки $w_0$ по $\delta_0'$. Пусть $h(w) = \arg\{(w + \bar{B}^{-1})/(w + B)\}$, $w \in \delta_0'$, $h(w) = h(w_0)$. Тогда точки $-B$, $-\bar{B}^{-1}, w, w_0$ лежат на окружности $T_1$, что невозможно. Так как $h(B) = 0$, то из (23) вытекает, что $h(w)$ монотонно убывает при движении точки $w$ от точки $B$ по дуге $\delta_0'$. Далее,

$$\begin{aligned} \arg d(\log(v^{2/3} + 1 + v^{-2/3})) &= \arg \left\{ \frac{v^{2/3} - v^{-2/3}}{v^{2/3} + 1 + v^{-2/3}} \frac{dw}{w} \right\} = \\ &= \arg \frac{(w - w^{-1})(v^{2/3} - v^{-2/3})}{v^{2/3} + 1 + v^{-2/3}}. \end{aligned} \tag{25}$$

Имеем:

$$\pi/2 < \arg\{w - w^{-1}\} < \pi,$$
$$0 < -\arg\{v^{2/3} + 1 + v^{-2/3}\} < (2 \arg v)/3,$$
$$\pi/2 < \arg\{v^{2/3} - v^{-2/3}\} < \pi - (2 \arg v)/3.$$

Складывая почленно эти неравенства и учитывая (25), получаем

$$\pi < h_1(w) = \arg\{d(\log(v^{2/3} + 1 + v^{-2/3}))\} < 2\pi.$$

Поэтому $h_1(w)$ также монотонно убывает при движении точки $w$ от точки $B$ по дуге $\delta_0'$. Следовательно, $\delta_0 \cap \bar{\Gamma}_b = \{b\}$.

$6^0$. Пусть $b \notin T \cup L$, $\delta = \partial G^0 \cap \gamma_b, \delta \cap \bar{\Gamma}_b \neq \{b\}$. Тогда на дуге $\delta$ существует точка касания $z_0$ с траекториями дифференциала ($3'$). Пусть $B$, $w_0$ и $\delta'$ – образы соответственно точек $b, z_0$ и дуги $\delta$ при отображении $w = z^{3/2}$, $v = w_0/B$. Тогда $\delta'$ – дуга окружности $T_2$, $0 < \arg v < \pi/2$ и $|v| > 1$. Пусть

$$H = q(w_0 - w_0^{-1})/(\sqrt{b}(v^{1/3} - v^{-1/3})).$$

Из ($3'$) получаем

$$\operatorname{Im} H = \operatorname{Im}\{q(z_0^3 - 1)/[z_0(z_0 - b)]\} = 0. \tag{26}$$

Так как $w_0, w_0^{-1}, B, B^{-1} \in T_2$, то

$$\operatorname{Im} \frac{(w_0 - B)(B^{-1} - w_0^{-1})}{(w_0 - w_0^{-1})(B^{-1} - B)} = \operatorname{Im} \frac{B(v^{1/2} - v^{-1/2})^2}{(w_0 - w_0^{-1})(1 - B^2)} = 0.$$

Поэтому

$$H = \frac{qB(v^{1/2} - v^{-1/2})^2}{\sqrt{b}(v^{1/3} - v^{-1/3})(1 - B^2)} = \frac{q(w_0 - B)(v^{1/3} + 1 + v^{-1/3})}{\sqrt{bv}(1 - B^2)(v^{1/6} + v^{-1/6})}.$$

Имеем:

$$0 < \arg\{v^{1/6} + v^{-1/6}\} < \arg \frac{v^{1/3} + 1 + v^{-1/3}}{v^{1/6} + v^{-1/6}} < \frac{1}{6} \arg v < \frac{\pi}{12},$$
$$\pi/4 < \arg\{(w_0 - B)/(1 - B^2)\} < \pi/2.$$

Складывая почленно эти неравенства и учитывая (24), получаем

$$0 < \arg H < 11\pi/12,$$

что противоречит (26). Поэтому $\delta \cap \bar{\Gamma}_b = \{b\}$. Ранее доказано, что $\bar{\Gamma}_b \cap (L \cup T) = \varnothing$ и $\bar{\Gamma}_b \cap \delta_0 = \{b\}$. Следовательно, $\bar{\Gamma}_b \cap \partial G^0 = \{b\}$ и из (24) получаем $\bar{\Gamma}_b \subset G^0 \cup \{b\}$, что завершает доказательство утверждений 2) и 6). Этим теорема 1 доказана.

## § 4. Доказательство теорем 2, 3 и 5

$1^0$. **Доказательство теоремы 2.** Утверждение 1) теоремы 2 содержится в результате Г. М. Голузина [1].

Докажем 2). Пусть, для определенности, $0 < b < 1$. По теореме 1, $c_1 = c_2 = c$, $0 < c < b$. Из (14) и (15) получаем

$$c_3 = c^{-2},\ b = c(c^3 + 2)/(2c^3 + 1),\ q = 9c^2/(2c^3 + 1).$$

Так как функция $f(x) = x(x^3+2)/(2x^3+1)$ возрастает на интервале $(0, +\infty)$, то значение $c$ однозначно определяется условием (7). Рассмотрим суперпозицию $w = w(z)$ дробно-линейного отображения $u = (c^4 - z)/[c(c^2 z - 1)]$, переводящего точки $c, b, c^{-2}$ соответственно в $1, 2, \infty$, и функции, обратной к функции Жуковского $u = w + w^{-1}$. Производя в (3′) замену переменной, получаем дифференциал

$$Q_2(w)dw^2 = -\frac{w(w^3+1)^2}{4\pi^2(w^3-c^3)^2(w^3c^3-1)^2}\,dw^2.$$

Шесть круговых областей этого дифференциала получаются при разбиении $w$-плоскости лучами $\arg w = 2\pi n/3$, $n = 0, 1, 2$ и окружностью $|w| = 1$. Подсчитывая произведение конформных радиусов для тех трех из этих областей, которые лежат в круге $|w| < 1$, и учитывая искажение конформных радиусов при отображении $w = w(z)$, приходим к формуле (6).

$2^0$. **Доказательство теоремы 3.** Из теоремы Коши и теоремы 1 вытекает, что при $b \in U \setminus L$ условия (8) для дифференциала (3′) эквивалентны условиям (12). Поэтому справедливость утверждения 1) теоремы 3 вытекает из леммы 1.

Пусть $b \in T \setminus L$. Необходимость условий (9) и (10) вытекает из (19) и теоремы 1. Покажем достаточность этих условий. Действительно, из (9) вытекает, что окружность $T$ является объединением замыканий траекторий и ортогональных траекторий дифференциала (3′). Поэтому $c_1 \in T$, что означает выполнение условий (12) для двух различных нулей дифференциала (3′). Применяя лемму 1, получаем требуемое утверждение.

**Доказательство теоремы 5.** Пусть $w \to V_a(w)$ – дробно-линейное преобразование, переводящее точки $1, -1, a$ соответственно в $-1, 1, \infty$. Так как величина $J(a_1, a_2, a_3, b)$ инвариантна при дробно-линейных преобразованиях и $V_a(\infty) = a$, то

$$J(1, -1, a, \infty) = J(-1, 1, \infty, V_a(\infty)) = I(1, -1, \infty, a)/2.$$

Из этого равенства и теоремы 2 получаем все утверждения теоремы 5.

## Литература


1. Голузин Г. М. *Геометрическая теория функций комплексного переменного.* 2-ое изд., М., 1966.
2. Дженкинс Дж. *Однолистные функции и конформные отображения.* М., 1962.

3. Кузьмина Г. В. *Модули семейств кривых и квадратичные дифференциалы.* — Тр. Матем. ин-та АН СССР **139** (1980), 1–240.
4. Кузьмина Г. В. *К задаче о максимуме произведения конформных радиусов неналегающих областей.* — В кн.: Аналитическая теория чисел и теория функций. 3. Зап. научн. семин. ЛОМИ **100** (1980), 131–145.
5. Федоров С. И. *О максимуме произведения конформных радиусов четырех неналегающих областей.* — В кн.: Аналитическая теория чисел и теория функций. 3. Зап. научн. семин. ЛОМИ **100** (1980), 146–165.
6. Федоров С. И. *О максимуме одного конформного инварианта в задаче о неналегающих областях.* — В кн.: Аналитическая теория чисел и теория функций. 4. Зап. научн. семин. ЛОМИ **112** (1981), 172–183.
7. Дубинин В. Н. *Симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного.* — Успехи мат. наук **49**, вып. **1(295)** (1994), 3–76.
8. Колбина Л. И. *Конформное отображение единичного круга на неналегающие друг на друга области.* — Вестн. ЛГУ, **No. 5**, сер. мат., физ., хим., вып. **2** (1955), 37–43.
9. Солынин А. Ю. *Зависимость проблемы модуля для семейства нескольких классов кривых от параметров.* — В кн.: Аналитическая теория чисел и теория функций. 6. Зап. научн. семин. ЛОМИ **144** (1985), 136–145.
10. Емельянов Е. Г. *Некоторые свойства модулей семейств кривых.* — В кн.: Аналитическая теория чисел и теория функций. 6. Зап. научн. семин. ЛОМИ **144** (1985), 72–82.

С.-Петербургский
государственный университет
водных коммуникаций

Поступило 21 марта 1994 г.