Доклады Академии наук
1992. Том 326, № 4

УДК 621.371:537.312.62 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

© В.Ф. КРАВЧЕНКО, А.Ф. ЧАПЛИН

ВОЗБУЖДЕНИЕ СВЕРХПРОВОДЯЩЕГО КРУГОВОГО И ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРОВ

(Представлено академиком Ю.А. Митропольским 21 V 1992)

1. Используя результаты, полученные в [1–5], рассмотрим задачу о возбуждении сверхпроводящего кругового и эллиптического цилиндров.

При решении задачи возбуждения сверхпроводящего кругового цилиндра исследуем отдельно формирование поля в поперечной (азимутальной) и в продольной плоскостях. В том и другом случаях ограничимся волнами, у которых вектор напряженности электрического поля лежит в плоскости формирования.

2. Рассмотрим двумерную задачу о возбуждении сверхпроводящего импедансного цилиндра, считая, что распределения полей не зависят от координаты z и имеют структуру магнитных волн по отношению к оси z. Тогда с помощью разложения функции Грина в цилиндрической системе координат [6] можно записать выражения для составляющих электромагнитного поля в виде сумм падающего (первичного) и отраженного (вторичного) полей при $r < r'$, где r – радиус-вектор точки наблюдения, а r' – радиус-вектор точки истока:

$$(1)\qquad H_z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{F_{1n}^M J_n(kr) + A_n H_n^{(2)}(kr)\} e^{-in\varphi},$$

$$(2)\qquad E_\varphi = \frac{i}{\omega\epsilon} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{F_{1n}^M J_n'(kr) + A_n H_n^{(2)'}(kr)\} e^{-in\varphi},$$

$$(3)\qquad E_r = -\frac{1}{\omega\epsilon r} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{F_{1n}^M J_n(kr) + A_n H_n^{(2)}(kr)\} e^{-in\varphi},$$

где A_n – парциальные коэффициенты отражения пространственных гармоник.

На поверхности цилиндра $r = a$ выполняется сверхпроводящее импедансное граничное условие, имеющее тот же физический смысл, что и в [1–5]:

$$(4)\qquad \hat{Z} = -\frac{E_\varphi}{H_z}\bigg|_{r=a} = \frac{1}{i\omega\epsilon} \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \{F_{1n}^M J_n'(ka) + A_n H_n^{(2)'}(ka)\} e^{-in\varphi}}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \{F_{1n}^M J_n(ka) + A_n H_n^{(2)}(ka)\} e^{-in\varphi}}.$$

Тогда неизвестные коэффициенты отражения находятся как

$$(5)\qquad A_n = F_{1n}^M \frac{J_n'(ka) - i\omega\epsilon\hat{Z} J_n(ka)}{H_n^{(2)'}(ka) - i\omega\epsilon\hat{Z} H_n^{(2)}(ka)},$$

что и решает поставленную задачу.

Интересно отметить, что при значении сверхпроводящего импеданса, равном

$$(6)\qquad \hat{Z} = \frac{-i}{\omega\epsilon}\,\frac{H_n^{(2)'}(ka)}{H_n^{(2)}(ka)},$$

возникает резонанс n-й гармоники поля.

3. Теперь рассмотрим двумерную задачу о возбуждении поля в продольной плоскости сверхпроводящего импедансного цилиндра, когда распределения полей не зависят от координаты φ. Тогда для структуры поля в виде электрических волн по отношению к оси z можно представить тангенциальные составляющие электрического и магнитного полей в виде суммы падающего (первичного) и отраженного (вторичного) полей на основе спектрального разложения функции Грина в интеграл Фурье в цилиндрической системе координат [6]. Подставляя выражения для полей в импедансное граничное условие, получим

$$(7)\qquad \hat{Z} = -\frac{1}{\omega\epsilon}\,\frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty}[F(h)J_0(\nu a) + f(h)H_0^{(2)}(\nu a)]\,e^{-ihz}dh}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}[F(h)J_1(\nu a) + f(h)H_1^{(2)}(\nu a)]\,\dfrac{e^{-ihz}}{\sqrt{h^2-k^2}}\,dh},$$

где $F(h)$ – спектральная плотность падающего поля, $f(h)$ – неизвестная спектральная плотность отраженного поля, $\nu = -i\sqrt{h^2-k^2}$.

С помощью формулы обращения преобразования Фурье находим

$$f(h) = F(h)\,\frac{\sqrt{h^2-k^2}\,J_0(\nu a) - \omega\epsilon\hat{Z}J_1(\nu a)}{\sqrt{h^2-k^2}\,H_0^{(2)}(\nu a) - \omega\epsilon\hat{Z}H_1^{(2)}(\nu a)}.$$

Случай магнитных волн может быть рассмотрен аналогично с помощью исходных выражений [6].

4. Здесь раздельно изучим случаи формирования поля в продольной и поперечной плоскостях эллиптического сверхпроводящего цилиндра, причем остановимся на ситуации, когда вектор напряженности электрического поля лежит в плоскости формирования. Это соответствует случаю электрических волн в продольной плоскости и случаю магнитных волн в поперечной плоскости. Выражения для полей, полученные на основе разложения функции Грина в системе координат эллиптического цилиндра, могут быть использованы из [6, 7]. Тогда, представляя полное поле электрических волн, не зависящее от поперечной координаты u, в виде суммы падающего (первичного) и отраженного (вторичного) поля в продольной плоскости цилиндра при $n = 0$, запишем сверхпроводящее импедансное граничное условие в виде

$$(8)\qquad \hat{Z} = \frac{id\Delta}{\omega\epsilon}\,\frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} S_{e,o_0}(\nu d,\cos v)\,[J_{e,o_0}(\nu d,\operatorname{ch}u_0)F^{э}_{e,o_1} + H_{e,o_0}(\nu d,\operatorname{ch}u_0)\,b^{э}_{e,o_0}(h)]\,e^{-ihz}dh}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{S_{e,o_0}(\nu d,\cos v)}{k^2-h^2}[J'_{e,o_0}(\nu d,\operatorname{ch}u_0)F^{э}_{e,o_1} + H'_{e,o_0}(\nu d,\operatorname{ch}u_0)\,b^{э}_{e,o_0}(h)]\,e^{-ihz}dh},$$

где d – половина расстояния между фокусами эллипса,

$$\Delta = \sqrt{\operatorname{ch}^2 u - \cos^2 v}, \qquad \nu = -i\sqrt{h^2-k^2},$$

$S_{e,o_0}(\nu d,\cos v)$ – угловая функция Матье нулевого порядка, $J_{e,o_0}(\nu d,\operatorname{ch}u)$ и $H_{e,o_0}(\nu d,\operatorname{ch}u)$ – радиальные функции Матье нулевого порядка, $F^{э}_{e,o_1}$ – спектральная плотность разложения падающего поля электрических волн, $b^{э}_{e,o_0}(h)$ – неизвестная спектральная плотность отраженного поля, штрих у радиальных функций Матье означает производную по переменной u.

Используя формулу обращения преобразования Фурье, найдем неизвестную спектральную плотность отраженного поля

$$(9)\quad b^{\text{э}}_{e,o_0}(h)= = -F^{\text{э}}_{e,o_1}\frac{i\omega\epsilon\hat{Z}J'_{e,o_0}(\nu d,\operatorname{ch}u_0)+d\Delta(k^2-h^2)J_{e,o_0}(\nu d,\operatorname{ch}u_0)}{i\omega\epsilon\hat{Z}H'_{e,o_0}(\nu d,\operatorname{ch}u_0)+d\Delta(k^2-h^2)H_{e,o_0}(\nu d,\operatorname{ch}u_0)}.$$

5. Рассмотрим формирование поля в поперечной плоскости эллиптического цилиндра при поляризации вектора напряженности электрического поля в той же плоскости, т.е. случай магнитных волн. При $h=0$ структура поля магнитных волн при отсутствии зависимости от z сохраняется и сверхпроводящее импедансное граничное условие запишется в виде

$$(10)\quad \hat{Z}_{sv}(v)=-\frac{E_v}{H_z}\bigg|_{u=u_0}=$$

$$=\frac{1}{i\omega\epsilon d\Delta}\,\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}S_{e,o_n}(kd,\cos v)\,[F^{\text{м}}_{e,o_1}J'_{e,o_n}(kd,\operatorname{ch}u_0)+b^{\text{м}}_{e,o_n}H'_{e,o_n}(kd,\operatorname{ch}u_0)}{\sum\limits_{n=0}^{\infty}S_{e,o_n}(kd,\cos v)\,[F^{\text{м}}_{e,o_1}J_{e,o_n}(kd,\operatorname{ch}u_0)+b^{\text{м}}_{e,o_n}H_{e,o_n}(kd,\operatorname{ch}u_0)}.$$

Неизвестные парциальные коэффициенты отражения $b^{\text{м}}_{e,o_n}$ могут быть найдены методом разделения переменных лишь в случае, когда сверхпроводящий импеданс зависит от координаты v по закону

$$(11)\quad \hat{Z}_v(v)=\frac{\hat{Z}}{\sqrt{\operatorname{ch}^2u_0-\cos^2v}}.$$

В этом случае

$$(12)\quad b^{\text{м}}_{e,o_n}=-F^{\text{м}}_{e,o_1}\frac{d\hat{Z}i\omega\epsilon J_{e,o_n}(kd,\operatorname{ch}u_0)-J'_{e,o_n}(kd,\operatorname{ch}u_0)}{d\hat{Z}i\omega\epsilon H_{e,o_n}(kd,\operatorname{ch}u_0)-H'_{e,o_n}(kd,\operatorname{ch}u_0)}.$$

Интересно отметить, что при

$$(13)\quad \hat{Z}=\frac{1}{i\omega\epsilon d}\,\frac{H'_{e,o_n}(kd,\operatorname{ch}u_0)}{H_{e,o_n}(kd,\operatorname{ch}u_0)}$$

возникает резонанс n-й гармоники отраженного поля. При определенных параметрах сверхпроводника, а также при заданной геометрии эллиптического цилиндра возможно резонансное возбуждение некоторой гармоники поля при фиксированной рабочей частоте.

Таким образом, в данной работе предложен и обоснован новый подход к решению широкого класса краевых задач о возбуждении сверхпроводящих структур.

Научно-исследовательский институт
точных приборов
Научно-производственное объединение "Астра"
Москва

Поступило
15 VI 1992

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кравченко В.Ф.* – Докл. АН УССР. Сер. А., 1982, № 1, с. 63–66. 2. *Кравченко В.Ф.* – ДАН, 1989, т. 309, № 3, с. 594–598. 3. *Кравченко В.Ф., Рвачев В.Л., Талдыкин И.В.* – ДАН, 1988, т. 302, № 1, с. 72. 4. *Богомолов А.С., Кравченко В.Ф.* – Измерительная техника, 1992, № 2, с. 49–50. 5. *Шенберг Д.* Сверхпроводимость. М.: ИЛ, 1955. 288 с. 6. *Марков Г.Т., Чаплин А.Ф.* Возбуждение электромагнитных волн. М.: Радио и связь, 1983. 291 с. 6. *Чаплин А.Ф.* – Изв. вузов. Радиоэлектроника, 1974, т. 17, № 5, с. 80–85.