



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Калинин, А. А. Тюхтина, Квазистационарные электромагнитные поля в неоднородных средах с непроводящими и слабопроводящими включениями, *Журнал СВМО*, 2016, том 18, номер 4, 119–133

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.80

15 марта 2025 г., 11:00:12



УДК 517.95

Квазистационарные электромагнитные поля в неоднородных средах с непроводящими и слабопроводящими включениями

© А. В. Калинин¹ А. А. Тюхтина²

Аннотация. Изучаются краевые задачи для периодических по времени решений системы уравнений Максвелла в квазистационарном магнитном приближении. Рассматривается случай неоднородных сред, содержащих проводящие, непроводящие и слабопроводящие включения. Исследуется асимптотическая связь решений задач с непроводящими и слабопроводящими включениями.

Ключевые слова: система уравнений Максвелла, квазистационарное магнитное приближение, периодические решения, неоднородные среды, граничные условия электрического и магнитного типа, непроводящие и слабопроводящие включения.

1. Введение

Широкий класс современных технологических проблем приводит к изучению математических задач для квазистационарных электромагнитных полей в физически неоднородных средах [1], [2]. Квазистационарное магнитное приближение для системы уравнений Максвелла используется при проектировании различных электромагнитных устройств [3]–[7] и при решении актуальных задач современной медицины [8].

Актуальность построения и обоснования эффективных численных алгоритмов для системы уравнений Максвелла в квазистационарном магнитном приближении обуславливает многообразие современных публикаций, посвященных, в частности, изучению вопросов корректности различных постановок задач (см. [2], [9], [10] и библиографию в них).

Доказательство теорем существования и единственности и исследование свойств поставленных краевых и начально-краевых задач опирается на неравенства, связывающие нормы вектор-функции, её ротора и дивергенции [11]–[14]. При рассмотрении неоднородных физических сред могут быть эффективно использованы оценки не для норм, а для скалярных произведений векторных полей. В настоящей работе рассматриваются неравенства для скалярных произведений векторных полей, обобщающие полученные в [11]–[15] оценки.

Типичной в прикладных задачах является ситуация, когда рассматриваемые области содержат проводящие и непроводящие материалы [2]. С целью преодоления при численном решении задач алгоритмических усложнений, связанных с различным описанием полей в проводящих и непроводящих областях [16], в [17], [18] был исследован подход, заключающийся в замене непроводящих областей слабопроводящими с последующим предельным переходом. В настоящей работе этот метод обосновывается для периодических по времени решений краевых задач для системы уравнений Максвелла в квазистационарном магнитном приближении в области, состоящей из проводника с непроводящими включениями, окруженного слоем изолятора.

¹ Доцент кафедры математической физики и оптимального управления, Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород; avk@mm.unn.ru

² Доцент кафедры математического моделирования экономических процессов, Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород; kalinmm@yandex.ru

2. Постановка задач и основные результаты

Для описания периодических по времени решений системы уравнений Максвелла в квазистационарном магнитном приближении используется следующая система уравнений [2]:

$$\operatorname{rot} \vec{H}(\vec{x}) = \vec{J}(\vec{x}), \quad (2.1)$$

$$\operatorname{div} \vec{B}(\vec{x}) = 0, \quad (2.2)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E}(\vec{x}) = -i\omega \vec{B}(\vec{x}), \quad (2.3)$$

$$\operatorname{div} \vec{D}(\vec{x}) = \rho(\vec{x}), \quad (2.4)$$

где $\vec{H}, \vec{B}, \vec{E}, \vec{D}, \vec{J}: \Omega \rightarrow \mathbb{C}^3$ и $\rho: \Omega \rightarrow \mathbb{C}^1$ – неизвестные функции, $\vec{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$. Реальные физические поля определяются в этом случае как $\operatorname{Re}[\vec{H}(\vec{x})e^{i\omega t}]$, $\operatorname{Re}[\vec{B}(\vec{x})e^{i\omega t}]$, $\operatorname{Re}[\vec{E}(\vec{x})e^{i\omega t}]$, $\operatorname{Re}[\vec{D}(\vec{x})e^{i\omega t}(\vec{x})]$, $\operatorname{Re}[\vec{J}(\vec{x})e^{i\omega t}]$, $\operatorname{Re}[\rho(\vec{x})e^{i\omega t}] = \operatorname{div}(\operatorname{Re}[\vec{D}e^{i\omega t}])$.

В работе предполагается, что $\omega \geq 0$. При $\omega = 0$ уравнения (2.1)–(2.4) образуют стационарную систему уравнений Максвелла, в которой $\vec{H}, \vec{B}, \vec{E}, \vec{D}, \vec{J}$ и ρ – действительные функции.

В линейных средах справедливы материальные соотношения

$$\vec{B} = \mu \vec{H}, \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad \vec{J} = \sigma \vec{E} + \vec{J}^{\text{ct}}, \quad (2.5)$$

где μ – тензор магнитной проницаемости среды, ϵ – тензор диэлектрической проницаемости, σ – тензор проводимости, \vec{J}^{ct} – плотность тока источников.

В работе предполагается, что Ω – открытая ограниченная область, гомеоморфная шару, с липшицевой границей Γ , $\vec{\nu}(\vec{x})$ – единичный вектор внешней нормали в точке $\vec{x} \in \partial\Omega$. Для функций $\vec{u}: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}^3$ через $\vec{u}_\nu, \vec{u}_\tau$ обозначаются соответственно нормальная и касательная компоненты функции на границе области.

Система (2.1)–(2.5) рассматривается при двух вариантах краевых условий – условиях магнитного типа

$$\vec{H}_\tau(\vec{x}) = \vec{0}, \quad \vec{x} \in \Gamma, \quad (2.6)$$

и условиях электрического типа

$$\vec{E}_\tau(\vec{x}) = \vec{0}, \quad \vec{B}_\nu(\vec{x}) = \vec{0}, \quad \vec{x} \in \Gamma. \quad (2.7)$$

Пусть $\Omega_1, \Omega_{0,j}, j = 1, \dots, k$ – гомеоморфные шару области с липшицевыми границами Γ_1 и $\Gamma_{0,j}$ соответственно, такие, что $\bar{\Omega}_1 \subset \Omega$, $\bar{\Omega}_{0,j} \subset \Omega_1$, $\bar{\Omega}_{0,j} \cap \bar{\Omega}_{0,s} = \emptyset$ при $j \neq s$. Обозначим $\Omega_0 = \cup_{j=1}^k \Omega_{0,j}$. Предполагается, что подобласть $\Omega_C = \Omega_1 \setminus \bar{\Omega}_0$ занята проводником, $\Omega \setminus \bar{\Omega}_1, \Omega_0$ – непроводящим материалом. Положим $\Omega_I = \Omega \setminus \bar{\Omega}_C = (\Omega \setminus \bar{\Omega}_1) \cup \Omega_0$. Через $\vec{\nu}_C(\vec{x}), \vec{\nu}_I(\vec{x})$ обозначаются единичные вектора внешней нормали в точке $\vec{x} \in \partial\Omega_C$ и $\vec{x} \in \partial\Omega_I$ соответственно, $\vec{\nu}_C(\vec{x}) + \vec{\nu}_I(\vec{x}) = \vec{0}$, $\vec{x} \in \Gamma_0 \cup \Gamma_1$. Для функций $\vec{u}: \Omega \rightarrow \mathbb{C}^3$, $u: \Omega \rightarrow \mathbb{C}^1$ через \vec{u}_C, u_C обозначаются их сужения на область Ω_C , через \vec{u}_I, u_I – сужения на Ω_I .

Предполагается, что $\vec{J}^{\text{ct}}: \Omega \rightarrow \mathbb{C}^3$ – заданная суммируемая с квадратом функция, μ, ϵ – самосопряженные непрерывные линейные операторы из $\{L_2(\Omega)\}^3$ в $\{L_2(\Omega)\}^3$, удовлетворяющие условиям

$$\epsilon_1 \|\vec{u}\|_{2,\Omega}^2 \leq (\epsilon \vec{u}, \vec{u})_{2,\Omega} \leq \epsilon_2 \|\vec{u}\|_{2,\Omega}^2, \quad \mu_1 \|\vec{u}\|_{2,\Omega}^2 \leq (\mu \vec{u}, \vec{u})_{2,\Omega} \leq \mu_2 \|\vec{u}\|_{2,\Omega}^2,$$

$\sigma = \sigma(\vec{x})$ – симметричная 3×3 матрица измеримых функций $\Omega \rightarrow \mathbb{R}^1$, удовлетворяющая условиям

$$\sigma_{ij}(\vec{x}) = 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad \text{при почти всех } \vec{x} \in \Omega_I,$$

$$\sigma_1 |\vec{\xi}|^2 \leq (\sigma(\vec{x})\vec{\xi}, \vec{\xi}) \leq \sigma_2 |\vec{\xi}|^2 \text{ при почти всех } \vec{x} \in \Omega_C \text{ и всех } \vec{\xi} \in \mathbb{R}^3,$$

где $\mu_i, \sigma_i, \varepsilon_i, (i = 1, 2)$ – заданные положительные числа, через $\|\cdot\|_{2,\Omega}$ и $(\cdot, \cdot)_{2,\Omega}$ обозначаются норма и скалярное произведение в $\{L_2(\Omega)\}^3$.

В работе рассматриваются обобщённые решения краевых задач, для которых все равенства должны выполняться в смысле теории распределений, а граничные условия – в смысле теории следов [14], [19].

Определяются следующие гильбертовы пространства вектор-функций с соответствующими скалярными произведениями [14], [19]:

$$H(\text{div}; \Omega) = \{\vec{u} \in \{L_2(\Omega)\}^3 : \text{div} \vec{u} \in L_2(\Omega)\}, \quad K(\text{div}; \Omega) = \{\vec{u} \in \{L_2(\Omega)\}^3 : \text{div} \vec{u} = 0\},$$

$$(\vec{u}, \vec{v})_{\text{div}, \Omega} = \int_{\Omega} (\vec{u} \cdot \vec{v}) d\vec{x} + \int_{\Omega} (\text{div} \vec{u} \text{div} \vec{v}) d\vec{x},$$

$$H(\text{rot}; \Omega) = \{\vec{u} \in \{L_2(\Omega)\}^3 : \text{rot} \vec{u} \in \{L_2(\Omega)\}^3\}, \quad K(\text{rot}; \Omega) = \{\vec{u} \in \{L_2(\Omega)\}^3 : \text{rot} \vec{u} = \vec{0}\},$$

$$(\vec{u}, \vec{v})_{\text{rot}, \Omega} = \int_{\Omega} (\vec{u} \cdot \vec{v}) d\vec{x} + \int_{\Omega} (\text{rot} \vec{u} \cdot \text{rot} \vec{v}) d\vec{x}.$$

Через $H_0(\text{rot}; \Omega)$, $H_0(\text{div}; \Omega)$ обозначается замыкание множества пробных вектор-функций $\{\mathcal{D}(\Omega)\}^3$ в $H(\text{rot}; \Omega)$ и $H(\text{div}; \Omega)$ соответственно, $K_0(\text{div}; \Omega) = K(\text{div}; \Omega) \cap H_0(\text{div}; \Omega)$, $K_0(\text{rot}; \Omega) = K(\text{rot}; \Omega) \cap H_0(\text{rot}; \Omega)$.

Обобщённая постановка краевых задач основана на следующих утверждениях [14].

Т е о р е м а 2.1. Пусть $G \subset \mathbb{R}^3$ – липшицева область. Отображение $\vec{u} \mapsto \vec{u} \cdot \vec{\nu}$, определенное на $\{\mathcal{D}(\bar{G})\}^3$, может быть продолжено до линейного непрерывного оператора $\gamma_{\nu} : H(\text{div}; G) \rightarrow H^{-1/2}(\partial G)$. Для всех $\vec{u} \in H(\text{div}; G)$ и $w \in H^1(G)$ верна следующая формула Грина:

$$\langle \gamma_{\nu} \vec{u}, w \rangle = \int_G (\vec{u} \cdot \text{grad} \bar{w}) d\vec{x} + \int_G w \text{div} \vec{u} d\vec{x}.$$

Ядро оператора γ_{ν} совпадает с $H_0(\text{div}; G)$, $\|\gamma_{\nu}\| = 1$.

Л е м м а 2.1. Пусть $G \subset \mathbb{R}^3$ – липшицева область. Функция $\vec{u} \in H(\text{rot}; G)$ лежит в классе $H_0(\text{rot}; G)$ тогда и только тогда, когда при всех $\vec{v} \in H(\text{rot}; G)$

$$\int_G (\text{rot} \vec{u} \cdot \vec{v}) d\vec{x} = \int_G (\text{rot} \vec{v} \cdot \vec{u}) d\vec{x}.$$

Решением задачи (2.1)–(2.6) называются удовлетворяющие равенствам (2.1), (2.3)–(2.5) функции $\vec{H} \in H_0(\text{rot}; \Omega)$, $\vec{B} \in K(\text{div}; \Omega)$, $\vec{J} \in K_0(\text{div}; \Omega)$, $\vec{E} \in H(\text{rot}; \Omega)$, $\vec{D} \in \{L_2(\Omega)\}^3$, $\rho \in H^{-1}(\Omega)$.

Решением задачи (2.1)–(2.5), (2.7) называются удовлетворяющие равенствам (2.1), (2.3) – (2.5) функции $\vec{H} \in H(\text{rot}; \Omega)$, $\vec{B} \in K_0(\text{div}; \Omega)$, $\vec{J} \in K(\text{div}; \Omega)$, $\vec{E} \in H_0(\text{rot}; \Omega)$, $\vec{D} \in \{L_2(\Omega)\}^3$, $\rho \in H^{-1}(\Omega)$.

Заметим, что при $\omega > 0$ условие $\vec{B}_{\nu}(\vec{x}) = \vec{0}$, $\vec{x} \in \Gamma$ в (2.7) вытекает из равенства (2.3) и условия $\vec{E}_{\tau}(\vec{x}) = \vec{0}$, $\vec{x} \in \Gamma$.

В работе используются также следующие гильбертовы пространства:

$$K(\text{div} \mu; \Omega) = \{\vec{u} \in \{L_2(\Omega)\}^3 : \mu \vec{u} \in K(\text{div}; \Omega)\},$$

$$K_0(\text{div} \mu; \Omega) = \{\vec{u} \in \{L_2(\Omega)\}^3 : \mu \vec{u} \in K_0(\text{div}; \Omega)\},$$

$$V^1(\mu; \Omega) = H_0(\text{rot}; \Omega) \cap K(\text{div} \mu; \Omega), \quad V^2(\mu; \Omega) = H(\text{rot}; \Omega) \cap K_0(\text{div} \mu; \Omega),$$

$$V_0^j(\mu; \Omega) = \{\vec{u} \in V^j(\mu; \Omega) : \text{rot} \vec{u}_I = \vec{0}\}, \quad j = 1, 2, \quad (\vec{u}, \vec{v})_V = (\vec{u}, \vec{v})_{\text{rot}, \Omega}.$$

Используя (2.2), (2.5), получаем задачу определения функций $\vec{H} \in V^1(\mu; \Omega)$, $\vec{E} \in H(\text{rot}; \Omega)$ или $\vec{H} \in V^2(\mu; \Omega)$, $\vec{E} \in H_0(\text{rot}; \Omega)$ таких, что

$$\text{rot} \vec{H} = \sigma \vec{E} + \vec{J}^{\text{ct}}, \quad \text{rot} \vec{E} = -i\omega \mu \vec{H}. \quad (2.8)$$

Предполагается, что функция \vec{J}^{ct} удовлетворяет в задаче (2.1)–(2.6) условиям

$$\text{div} \vec{J}_I^{\text{ct}} = 0, \quad \gamma_\nu(\vec{J}_I^{\text{ct}})(\vec{x}) = 0, \quad \vec{x} \in \Gamma, \quad (2.9)$$

а в случае задачи (2.1)–(2.5), (2.7) – условиям

$$\text{div} \vec{J}_I^{\text{ct}} = 0, \quad \langle \gamma_\nu(\vec{J}_I^{\text{ct}}), 1 \rangle_\Gamma = 0. \quad (2.10)$$

Используя лемму 2.1. получаем, что задачи (2.8) сводятся к задачам определения функций $\vec{H} \in V^j(\mu; \Omega)$ таких, что

$$\text{rot} \vec{H}_I = \vec{J}_I^{\text{ct}} \quad (2.11)$$

и для всех $\vec{v} \in V_0^j(\mu; \Omega)$ справедливо равенство

$$i\omega \int_\Omega (\mu \vec{H} \cdot \vec{v}) d\vec{x} + \int_{\Omega_C} (\sigma^{-1} \text{rot} \vec{H} \cdot \text{rot} \vec{v}) d\vec{x} = \int_{\Omega_C} (\sigma^{-1} \vec{J}_C^{\text{ct}} \cdot \text{rot} \vec{v}) d\vec{x}. \quad (2.12)$$

Пусть \vec{H} – решение задачи (2.11), (2.12). Для однозначного определения функции \vec{E} во всей области Ω предположим, что неизвестная функция \vec{E} должна удовлетворять в задаче (2.1)–(2.6) дополнительным условиям

$$\text{div}(\epsilon \vec{E})_I = \rho_0, \quad \gamma_\nu(\epsilon \vec{E})(\vec{x}) = 0, \quad \vec{x} \in \Gamma, \quad (2.13)$$

а в задаче (2.1)–(2.5), (2.7) – условиям

$$\text{div}(\epsilon \vec{E})_I = \rho_0, \quad \vec{E}_\tau(\vec{x}) = 0, \quad \vec{x} \in \Gamma, \quad \langle \gamma_\nu(\epsilon \vec{E}), 1 \rangle_{\Gamma_1} = Q, \quad (2.14)$$

где $\rho_0 \in L_2(\Omega_I)$ – заданная функция, например, $\rho_0 \equiv 0$ [2], Q – заданная константа.

Если $\omega = 0$, задача (2.1)–(2.6) может рассматриваться также при условиях (2.14).

В работе доказываются следующие утверждения:

Т е о р е м а 2.2. *Каждая из задач (2.11), (2.12) имеет единственное решение.*

Т е о р е м а 2.3. *Задачи (2.1)–(2.6), (2.13) и (2.1)–(2.5), (2.7), (2.14) имеют единственные решения. При $\omega = 0$ существует единственное решение задачи (2.1)–(2.6), (2.14).*

Пусть $\lambda > 0$. Определим тензор σ_λ соотношением

$$\sigma_\lambda(\vec{x}) = \begin{cases} \sigma(\vec{x}), & \vec{x} \in \Omega_C, \\ \lambda I, & \vec{x} \in \Omega_I, \end{cases}$$

где I – единичная матрица.

Рассмотрим задачи (2.8), в которых тензор σ заменён на σ_λ :

$$\text{rot} \vec{H}_\lambda = \sigma_\lambda \vec{E}_\lambda + \vec{J}^{\text{ct}}, \quad \text{rot} \vec{E}_\lambda = -i\omega \mu \vec{H}_\lambda. \quad (2.15)$$

Т е о р е м а 2.4. Система (2.15) имеет единственное решение $\vec{H}_\lambda \in V^1(\mu; \Omega)$, $\vec{E}_\lambda \in H(\text{rot}; \Omega)$ и единственное решение $\vec{H}_\lambda \in V^2(\mu; \Omega)$, $\vec{E}_\lambda \in H_0(\text{rot}; \Omega)$.

Т е о р е м а 2.5. При $\lambda \rightarrow 0$ решение $\vec{H}_\lambda \in V^j(\mu; \Omega)$, $\vec{E}_\lambda \in H(\text{rot}; \Omega)$ ($j = 1, 2$) системы (2.15) стремится к решению $\vec{H} \in V^j(\mu; \Omega)$, $\vec{E} \in H(\text{rot}; \Omega)$ системы (2.8) по норме пространства $H(\text{rot}; \Omega)$. При $\lambda < 1$ справедливы оценки

$$\|\vec{H}_\lambda - \vec{H}\|_{\text{rot}, \Omega} \leq C\sqrt{\lambda}\|\vec{J}^{cm}\|_{2, \Omega}, \quad \|\vec{E}_\lambda - \vec{E}\|_{\text{rot}} \leq C\sqrt{\lambda}\|\vec{J}^{cm}\|_{2, \Omega},$$

где постоянная $C > 0$ не зависит от λ .

3. Предварительные утверждения

Пусть $G \subset \mathbb{R}^3$ – открытая ограниченная односвязная область с липшицевой границей Γ , $\vec{\nu}(\vec{x})$ – единичный вектор внешней нормали в точке $\vec{x} \in \Gamma$. Справедливы следующие утверждения [14], [20].

Л е м м а 3.1. Для любой функции $\vec{u} \in K(\text{rot}; G)$ найдется функция $p \in H^1(G)$ такая, что $\vec{u} = \text{grad} p$. Если при этом $\vec{u} \in H_0(\text{rot}; G)$, то можно взять $p \in H_0^1(G)$.

Л е м м а 3.2. (неравенство Пуанкаре). Найдётся такая постоянная $T(G) > 0$, зависящая только от области G , что для всех $p \in H^1(G)$

$$\int_G p^2 d\vec{x} \leq T(G) \left(\int_G (\text{grad} p)^2 d\vec{x} + \left| \int_G p d\vec{x} \right|^2 \right).$$

Л е м м а 3.3. (неравенство Фридрикса) Пусть $\Gamma_1 \subset \Gamma$, $\text{mes}(\Gamma_1) > 0$. Найдётся такая постоянная $A(G, \Gamma_1) > 0$, зависящая только от G и Γ_1 , что для всех $p \in H^1(G)$

$$\int_G p^2 d\vec{x} \leq A(G, \Gamma_1) \left(\int_G (\text{grad} p)^2 d\vec{x} + \left| \int_{\Gamma_1} p d\gamma \right|^2 \right). \tag{3.1}$$

Л е м м а 3.4. Пусть $f \in H^{-1/2}(\Gamma)$ удовлетворяет условию $\langle f, 1 \rangle = 0$. Тогда найдётся функция $\vec{u} \in K(\text{div}; G)$ такая, что $\gamma_\nu \vec{u} = f$ и $\|\vec{u}\|_{2, G} \leq C_\nu \|f\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}$, где константа $C_\nu > 0$ зависит только от области G .

Пусть $B \subset R^3$ – некоторый открытый шар такой, что $\bar{G} \subset B$. Из доказанных в [15] оценок вытекают следующие неравенства.

Л е м м а 3.5. Существует такая постоянная $C_1(B) > 0$ зависящая только от области B , что для всех $\vec{u} \in H_0(\text{rot}; B)$, $\vec{v} \in H(\text{div}; B)$

$$|(\vec{u}, \vec{v})_{2, B}| \leq C_1(B) (\|\vec{u}\|_{2, B} \|\text{div} \vec{v}\|_{2, B} + \|\vec{v}\|_{2, B} \|\text{rot} \vec{u}\|_{2, B}), \tag{3.2}$$

для всех $\vec{u} \in H(\text{rot}; B)$, $\vec{v} \in H_0(\text{div}; B)$

$$|(\vec{u}, \vec{v})_{2, B}| \leq C_1(B) (\|\vec{u}\|_{2, B} \|\text{div} \vec{v}\|_{2, B} + \|\vec{v}\|_{2, B} \|\text{rot} \vec{u}\|_{2, B} + \|\text{rot} \vec{u}\|_{2, B} \|\text{div} \vec{v}\|_{2, B}). \tag{3.3}$$

Далее предполагается, что липшицева область G гомеоморфна шару. Справедливы следующие утверждения.

Л е м м а 3.6. *Существует линейный ограниченный оператор продолжения $E_{div} : H(\operatorname{div}; G) \rightarrow H(\operatorname{div}; B)$, удовлетворяющий условию*

$$\operatorname{div} E_{div}(\vec{u})(\vec{x}) = 0, \quad \vec{x} \in B \setminus \bar{G}, \quad \vec{u} \in H(\operatorname{div}; G).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\vec{u} \in H(\operatorname{div}; G)$. Согласно теореме 2.1. $\gamma_\nu \vec{u} \in H^{-1/2}(\Gamma)$, $\|\gamma_\nu \vec{u}\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq \|\vec{u}\|_{div, G}$. Через $\vec{\nu}_e$ обозначается вектор внешней по отношению к области $B \setminus \bar{G}$ нормали к границе $\Gamma \cup \partial B$, $\vec{\nu}_e(\vec{x}) = -\vec{\nu}(\vec{x})$ при $\vec{x} \in \Gamma$. Существует единственное решение $p \in H^1(B \setminus \bar{G})$ задачи Неймана

$$\Delta p(\vec{x}) = 0, \quad \vec{x} \in B \setminus \bar{G},$$

$$\frac{\partial p}{\partial \nu_e}(\vec{x}) = -\gamma_\nu \vec{u}(\vec{x}), \quad x \in \Gamma, \quad \frac{\partial p}{\partial \nu_e}(\vec{x}) = \operatorname{const} = \langle \gamma_\nu \vec{u}, \operatorname{mes}^{-1}(\partial B) \rangle, \quad \vec{x} \in \partial B,$$

удовлетворяющее условию $\int_{B \setminus \bar{G}} p(\vec{x}) d\vec{x} = 0$ [14]. При этом справедливо неравенство

$$\|\operatorname{grad} p\|_{2, B \setminus \bar{G}} \leq \|\gamma_0\| (T(B \setminus \bar{G}) + 1)^{1/2} \|\partial p / \partial \nu_e\|_{H^{-1/2}(\Gamma \cup \partial B)},$$

где $T(B \setminus \bar{G})$ – константа из неравенства Пуанкаре, $\gamma_0 : H^1(B \setminus \bar{G}) \rightarrow H^{1/2}(\partial B \cup \Gamma)$ – оператор следа. Таким образом, $\|\operatorname{grad} p\|_{2, B \setminus \bar{G}} \leq C \|\vec{u}\|_{div, G}$, где постоянная $C > 0$ зависит только от G и B . Положим

$$E_{div}(\vec{u})(\vec{x}) = \begin{cases} \vec{u}(\vec{x}), & \vec{x} \in G, \\ \operatorname{grad} p(\vec{x}), & \vec{x} \in B \setminus \bar{G}. \end{cases}$$

По построению $E_{div}(\vec{u}) \in H(\operatorname{div}; G)$,

$$\|E_{div}(\vec{u})\|_{2, B}^2 = \|\vec{u}\|_{2, G}^2 + \|\operatorname{grad} p\|_{2, B \setminus \bar{G}}^2 \leq (1 + C^2) \|\vec{u}\|_{div, G}^2.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Л е м м а 3.7. *Существует линейный ограниченный оператор продолжения $E_{rot} : H(\operatorname{rot}; G) \rightarrow H(\operatorname{rot}; B)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\vec{u} \in H(\operatorname{rot}; G)$. Тогда $\vec{F} = \operatorname{rot} \vec{u} \in K(\operatorname{div}; G)$. Применяя лемму 3.6., определяем функцию $E_{div}(\vec{F}) = \vec{F}^* \in K(\operatorname{div}; B)$, причём $\|\vec{F}^*\|_{2, B} \leq \|E_{div}\| \|\vec{F}\|_{2, G}$.

Согласно лемме Лакса-Мильграма найдётся единственная функция $\vec{u}^* \in H(\operatorname{rot}; B) \cap K_0(\operatorname{div}; B)$, при всех $\vec{v} \in H(\operatorname{rot}; B) \cap K_0(\operatorname{div}; B)$ удовлетворяющая равенству

$$\int_B (\operatorname{rot} \vec{u}^* \cdot \operatorname{rot} \vec{v}) d\vec{x} = \int_B (\vec{F}^* \cdot \operatorname{rot} \vec{v}) d\vec{x}.$$

Можно показать [15], что из этого равенства вытекает, что $\operatorname{rot} \vec{u}^* = \vec{F}^*$ и при этом, согласно оценке (3.3),

$$\|\vec{u}^*\|_{rot, B} \leq (1 + C_1^2(B))^{1/2} \|\vec{F}^*\|_{2, B}.$$

Таким образом, построен линейный ограниченный оператор, ставящий в соответствие функции $\vec{F} = \operatorname{rot} \vec{u} \in K(\operatorname{div}; G)$ функцию $\vec{u}^* \in H(\operatorname{rot}; B)$ такую, что

$$\operatorname{rot} \vec{u}^*(\vec{x}) = \vec{F}(\vec{x}), \quad \vec{x} \in G. \quad (3.4)$$

Обозначим построенный оператор через $E^* : K(\text{div}; G) \rightarrow H(\text{rot}; B)$. В соответствии с (3.4) можно записать

$$\text{rot}E^*(\text{rot}\vec{u})(\vec{x}) = \text{rot}\vec{u}(\vec{x}), \vec{x} \in G.$$

Очевидно, $\|E^*\| \leq (1 + C_1^2(B))^{1/2}\|E_{\text{div}}\|$. Из леммы 3.1. следует, что для некоторого $q \in H^1(G)$, удовлетворяющего условию $\int_G q(\vec{x})d\vec{x} = 0$, выполнено

$$\vec{u}(\vec{x}) - E^*(\text{rot}\vec{u})(\vec{x}) = \text{grad}q(\vec{x}), \vec{x} \in G.$$

Определим $q^* \in H^1(B)$ как

$$q^*(\vec{x}) = \begin{cases} q(\vec{x}), & \vec{x} \in G, \\ \tilde{q}(\vec{x}), & \vec{x} \in B \setminus G, \end{cases}$$

где \tilde{q} – решение задачи

$$\Delta\tilde{q}(\vec{x}) = 0, \vec{x} \in B \setminus \bar{G}, \tilde{q}(\vec{x}) = q(\vec{x}), \vec{x} \in \Gamma, \tilde{q}(\vec{x}) = 0, \vec{x} \in \partial B.$$

Тогда, согласно теореме 2.1.,

$$\begin{aligned} \|\text{grad}\tilde{q}\|_{2,B \setminus \bar{G}} &\leq \|\gamma_0\|(T(G) + 1)^{1/2}\|\text{grad}q\|_{2,G} \leq \|\gamma_0\|(T(G) + 1)^{1/2}(\|\vec{u}\|_{2,G} + \|E^*(\text{rot}\vec{u})\|_{2,G}) \leq \\ &\leq \|\gamma_0\|(T^2(G) + 1)^{1/2}(1 + (1 + C_1^2(B))^{1/2}\|E_{\text{div}}\|)\|\vec{u}\|_{\text{rot},G}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\|\text{grad}q^*\|_{2,G}^2 = \|\text{grad}q\|_{2,G}^2 + \|\text{grad}\tilde{q}\|_{2,B \setminus \bar{G}}^2 \leq C(G, B)\|\vec{u}\|_{\text{rot},G}^2,$$

где $C(G, B) = (1 + (1 + C_1^2(B))\|E_{\text{div}}\|^2)(1 + 2\|\gamma_0\|^2(T(G) + 1))$. Положив

$$E_{\text{rot}}(\vec{u}) = E^*(\text{rot}\vec{u}) + \text{grad}q^*(\vec{x}),$$

получим утверждение леммы, $\|E_{\text{rot}}\| \leq (1 + C_1^2(B))^{1/2}\|E_{\text{div}}\| + C^{1/2}(G, B)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Из лемм 3.5.–3.7. вытекает следующее утверждение.

Т е о р е м а 3.1. Пусть $G \subset \mathbb{R}^3$ – открытое ограниченное множество с липшицевой границей, гомеоморфное шару. Существует постоянная $C(G) > 0$, зависящая только от области G такая, что неравенство

$$|(\vec{u}, \vec{v})_{2,G}| \leq C(G) (\|\vec{u}\|_{2,G}\|\text{div}\vec{v}\|_{2,G} + \|\vec{v}\|_{2,G}\|\text{rot}\vec{u}\|_{2,G} + \|\text{rot}\vec{u}\|_{2,G}\|\text{div}\vec{v}\|_{2,G}) \quad (3.5)$$

выполняется для любых $\vec{u} \in H_0(\text{rot}; G)$, $\vec{v} \in H(\text{div}; G)$, а также для любых $\vec{u} \in H(\text{rot}; G)$, $\vec{v} \in H_0(\text{div}; G)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\vec{u} \in H_0(\text{rot}; G)$, $\vec{v} \in H(\text{div}; G)$. Функцию \vec{u} продолжаем нулём до функции из $H_0(\text{rot}; B)$. Положим $\vec{v}^* = E_{\text{div}}(\vec{v})$. Применяя неравенство (3.2), получим

$$|(\vec{u}, \vec{v}^*)_{2,B}| \leq C_1(B) (\|\vec{u}\|_{2,B}\|\text{div}\vec{v}^*\|_{2,B} + \|\vec{v}^*\|_{2,B}\|\text{rot}\vec{u}\|_{2,B}).$$

Учитывая, что в левой части неравенства можно перейти к интегрированию по области G , $\|\vec{u}\|_{2,B} = \|\vec{u}\|_{2,G}$, $\|\text{rot}\vec{u}\|_{2,B} = \|\text{rot}\vec{u}\|_{2,G}$, получаем

$$\begin{aligned} |(\vec{u}, \vec{v})_{2,G}| &\leq C_1(B) (\|\vec{u}\|_{2,G}\|\text{div}\vec{v}^*\|_{2,B} + \|\vec{v}^*\|_{2,B}\|\text{rot}\vec{u}\|_{2,G}) \leq \\ &\leq C_1(B) (\|\vec{u}\|_{2,G}\|\text{div}\vec{v}\|_{2,G} + \|E_{\text{div}}\|(\|\vec{v}\|_{2,G} + \|\text{div}\vec{v}\|_{2,G})\|\text{rot}\vec{u}\|_{2,G}). \end{aligned}$$

Таким образом, справедливо неравенство (3.5), где в качестве $C(G)$ можно взять $C(G) = C_1(B) \max\{1, \|E_{div}\|\}$.

Пусть $\vec{u} \in H(\text{rot}; G)$, $\vec{v} \in H_0(\text{div}; G)$. Функцию \vec{v} продолжаем нулём до функции из $H_0(\text{div}; B)$. Положим $\vec{u}^* = E_{rot}(\vec{u})$. Применяя неравенство (3.3), получим

$$|(\vec{u}^*, \vec{v})_{2,B}| \leq C_1(B) (\|\vec{u}^*\|_{2,B} \|\text{div}\vec{v}\|_{2,B} + \|\vec{v}\|_{2,B} \|\text{rot}\vec{u}^*\|_{2,B} + \|\text{div}\vec{v}\|_{2,B} \|\text{rot}\vec{u}^*\|_{2,B}).$$

Учитывая, что в левой части неравенства можно перейти к интегрированию по области G , $\|\vec{v}\|_{2,B} = \|\vec{v}\|_{2,G}$, $\|\text{div}\vec{v}\|_{2,B} = \|\text{div}\vec{v}\|_{2,G}$, получаем

$$\begin{aligned} |(\vec{u}, \vec{v})_{2,G}| &\leq C_1(B) (\|\vec{u}^*\|_{2,B} \|\text{div}\vec{v}\|_{2,G} + \|\vec{v}\|_{2,G} \|\text{rot}\vec{u}^*\|_{2,B} + \|\text{div}\vec{v}\|_{2,G} \|\text{rot}\vec{u}^*\|_{2,B}) \leq \\ &\leq C_1(B) (\|E_{rot}\| \|\vec{u}\|_{rot,G} \|\text{div}\vec{v}\|_{2,G} + \|E_{div}\| \|\text{rot}\vec{u}\|_{2,G} \|\vec{v}\|_{div,G}). \end{aligned}$$

Таким образом, справедливо неравенство (3.5), где в качестве $C(G)$ можно взять $C(G) = C_1(B)(\|E_{div}\| + \|E_{rot}\|)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о .

Пусть $\eta : \{L_2(G)\}^3 \rightarrow \{L_2(G)\}^3$ – непрерывный линейный самосопряженный оператор такой, что при некоторых $\eta_1, \eta_2 > 0$

$$\eta_1 \|\vec{u}\|_{2,G}^2 \leq (\eta\vec{u}, \vec{u})_{2,G} \leq \eta_2 \|\vec{u}\|_{2,G}^2$$

для всех $\vec{u} \in \{L_2(G)\}^3$. Обозначим через $\{L_2(\eta; G)\}^3$ пространство $\{L_2(G)\}^3$, снабженное скалярным произведением $(\vec{u}, \vec{v})_\eta = (\eta\vec{u}, \vec{v})_{2,G}$. Справедливы следующие утверждения.

Л е м м а 3.8. *Ортогональное дополнение к $K(\text{div}\eta; G)$ в $\{L_2(\eta; G)\}^3$ совпадает с подпространством $K_0(\text{rot}; G)$.*

Л е м м а 3.9. *Ортогональное дополнение к $K_0(\text{div}\eta; G)$ в $\{L_2(\eta; G)\}^3$ совпадает с подпространством $K(\text{rot}; G)$.*

Предположим, что область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ удовлетворяет условиям, сформулированным при постановке краевых задач.

Л е м м а 3.10. *Пусть $K_{0,I}(\text{div}; \Omega_I) = \{\vec{w} \in K(\text{div}; \Omega_I) : \langle \gamma_\nu \vec{w}, 1 \rangle_\Gamma = 0\}$. Существует линейный непрерывный оператор продолжения $E_{div}^C : K_{0,I}(\text{div}; \Omega_I) \rightarrow K(\text{div}; \Omega)$. Если при этом $\vec{w}_\nu(\vec{x}) = 0$, $\vec{x} \in \Gamma$, то $E_{div}^C \vec{w} \in K_0(\text{div}; \Omega)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть $\vec{w} \in K_{0,I}(\text{div}; \Omega_I)$. Тогда $\langle \gamma_{\nu_j} \vec{w}, 1 \rangle_{\Gamma_j} = 0$, $j = 0, 1$. Существует единственное решение $p \in H^1(\Omega_C)$ задачи Неймана

$$\Delta p(\vec{x}) = 0, \vec{x} \in \Omega_C, \frac{\partial p(\vec{x})}{\partial \nu_C} = -\gamma_{\nu_I} \vec{w}(\vec{x}), \vec{x} \in \Gamma_0 \cup \Gamma_1,$$

такое, что $\int_{\Omega_C} p d\vec{x} = 0$. Для любой функции $q \in H^1(\Omega_C)$

$$\int_{\Omega_C} (\text{grad} p \cdot \text{grad} q) d\vec{x} = -\langle \gamma_{\nu_I} \vec{w}, \gamma_0 q \rangle.$$

Поэтому

$$\|\text{grad} p\|_{2,\Omega_C} \leq C \|\vec{w}_I\|_{2,\Omega_I},$$

где $C = \|\gamma_0\| (1 + T(\Omega_C))^{1/2}$, $\gamma_0 : H^1(\Omega_C) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma_0 \cup \Gamma_1)$ – оператор следа.

Определим функцию $\vec{v} \in K(\text{div}; \Omega)$ соотношением

$$\vec{v}(\vec{x}) = \begin{cases} \text{grad} p(\vec{x}), & \vec{x} \in \Omega_C, \\ \vec{w}(\vec{x}), & \vec{x} \in \Omega_I. \end{cases}$$

Положим $E_{div}^C \vec{w} = \vec{v}$,

$$\|E_{div}^C \vec{w}\| = \|\vec{v}\|_{2,\Omega} \leq \sqrt{C^2 + 1} \|\vec{w}\|_{2,\Omega_I}.$$

Доказательство закончено.

Лемма 3.11. *Найдётся такая постоянная $T(\Omega_C, \Omega_I) > 0$, зависящая только от областей Ω_C, Ω_I , что для всех функций $\vec{w} \in H(\text{rot}; \Omega)$, удовлетворяющих условиям $\vec{w}_I \in K_{0,I}(\text{div}; \Omega_I)$ и таких, что либо $\vec{w}_\nu(\vec{x}) = 0$, либо $\vec{w}_\tau(\vec{x}) = 0$ при $\vec{x} \in \Gamma$, справедливо неравенство*

$$\|\vec{w}_I\|_{2,\Omega_I} \leq T(\Omega_C, \Omega_I) (\|\vec{w}_C\|_{2,\Omega_C} + \|\text{rot} \vec{w}\|_{2,\Omega}). \tag{3.6}$$

Доказательство. Пусть \vec{w} удовлетворяет условиям леммы. Положим, в соответствии с леммой 3.10., $\vec{v} = E_{div}^C \vec{w}_I \in K(\text{div}; \Omega)$. При этом, по условию, либо $\vec{w} \in H_0(\text{rot}; \Omega)$, либо $\vec{v} \in K_0(\text{div}; \Omega)$.

Применяя к функциям \vec{v}, \vec{w} неравенство (3.5), получаем

$$(\vec{w}, \vec{v})_{2,\Omega} = (\vec{v}_C, \vec{w}_C)_{2,\Omega_C} + \|\vec{w}_I\|_{2,\Omega_I}^2 \leq C(\Omega) \|\vec{v}\|_{2,\Omega} \|\text{rot} \vec{w}\|_{2,\Omega} \leq C(\Omega) \|E_{div}^C \vec{w}_I\| \|\vec{w}_I\|_{2,\Omega_I} \|\text{rot} \vec{w}\|_{2,\Omega},$$

$$\|\vec{w}_I\|_{2,\Omega_I}^2 \leq C(\Omega) \|E_{div}^C \vec{w}_I\| \|\vec{w}_I\|_{2,\Omega_I} \|\text{rot} \vec{w}\|_{2,\Omega} + \|E_{div}^C \vec{w}_I\| \|\vec{w}_I\|_{2,\Omega_I} \|\vec{w}_C\|_{2,\Omega}.$$

Таким образом, справедливо неравенство (3.6), где можно взять

$$T(\Omega_C, \Omega_I) = (C(\Omega) + 1) \|E_{div}^C\|$$

Доказательство закончено.

4. Доказательство основных результатов

Доказательство теоремы 2.2.

Пусть $\vec{v} \in V^j(\mu; \Omega)$. Применяя неравенство (3.5) к функциям $\vec{v} \in H_0(\text{rot}; \Omega)$, $\mu \vec{v} \in K(\text{div}; \Omega)$ или $\vec{v} \in H(\text{rot}; \Omega)$, $\mu \vec{v} \in K_0(\text{div}; \Omega)$, получаем

$$\|\vec{v}\|_{2,\Omega} \leq C_1 \|\text{rot} \vec{v}\|_{2,\Omega}, \tag{4.1}$$

где $C_1 = \mu_2 \mu_1^{-1} C(\Omega)$. В частности, если $\vec{v} \in V_0^j(\mu; \Omega)$, $\|\vec{v}\|_{2,\Omega} \leq C_1 \|\text{rot} \vec{v}\|_{2,\Omega_C}$.

Согласно лемме 3.10., найдётся функция $\vec{J}_1 \in K_0(\text{div}; \Omega)$ (соответственно, $\vec{J}_1 \in K(\text{div}; \Omega)$) такая, что $\vec{J}_{1I} = \vec{J}_I^{\text{ct}}$.

Согласно лемме Лакса-Мильграма, возможность применения которой вытекает из неравенства (4.1), найдётся единственная функция $\vec{H}_1 \in V^j(\mu; \Omega)$, при всех $\vec{v} \in V^j(\mu; \Omega)$ удовлетворяющая равенству

$$\int_{\Omega} (\text{rot} \vec{H}_1 \cdot \text{rot} \vec{v}) d\vec{x} = \int_{\Omega} (\vec{J}_1 \cdot \text{rot} \vec{v}) d\vec{x}.$$

Из лемм 3.8., 3.9. следует, что равенство справедливо для всех $\vec{v} \in H_0(\text{rot}; \Omega)$ или $\vec{v} \in H(\text{rot}; \Omega)$ соответственно, поэтому $\text{rot} \vec{H}_1 - \vec{J}_1 \in K(\text{rot}; \Omega) \cap K_0(\text{div}; \Omega) = \{\vec{0}\}$ или $\text{rot} \vec{H}_1 - \vec{J}_1 \in K_0(\text{rot}; \Omega) \cap K(\text{div}; \Omega) = \{\vec{0}\}$, то есть $\text{rot} \vec{H}_1 = \vec{J}_1$.

Будем искать решение $\vec{H} \in V^j(\mu; \Omega)$ задачи (2.11), (2.12) в виде $\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{H}_1$. Тогда $\vec{H}_0 \in V_0^j(\mu; \Omega)$ и при всех $\vec{v} \in V_0^j(\mu; \Omega)$ удовлетворяет равенству

$$\begin{aligned} & i\omega \int_{\Omega} (\mu \vec{H}_0 \cdot \vec{v}) d\vec{x} + \int_{\Omega_C} (\sigma^{-1} \text{rot} \vec{H}_0 \cdot \text{rot} \vec{v}) d\vec{x} = \\ & = \int_{\Omega_C} (\sigma^{-1} \vec{J}^{\text{ct}} \cdot \text{rot} \vec{v}) d\vec{x} - \int_{\Omega} (\sigma^{-1} \text{rot} \vec{H}_1 \cdot \text{rot} \vec{v}) d\vec{x} - i\omega \int_{\Omega} (\mu \vec{H}_1 \cdot \vec{v}) d\vec{x}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Из (4.1) вытекает, что билинейная форма $a(\vec{u}, \vec{v}) = i\omega \int_{\Omega} (\mu \vec{u} \cdot \vec{v}) d\vec{x} + \int_{\Omega_C} (\sigma^{-1} \text{rot} \vec{u} \cdot \text{rot} \vec{v}) d\vec{x}$ коэрцитивна на $V_0^j(\mu; \Omega)$. Следовательно, задача (4.2) имеет единственное решение.

Предположим, $\vec{h} \in V^j(\mu; \Omega)$ – разность двух решений задачи (2.11), (2.12). Тогда $\vec{h} \in V_0^j(\mu; \Omega)$ и для всех $\vec{v} \in V_0^j(\mu; \Omega)$

$$i\omega \int_{\Omega} (\mu \vec{h} \cdot \vec{v}) d\vec{x} + \int_{\Omega_C} (\sigma^{-1} \text{rot} \vec{h} \cdot \text{rot} \vec{v}) d\vec{x} = 0.$$

Отсюда следует, что $\vec{h} = 0$ и единственность решения установлена.

Доказательство закончено.

Доказательство теоремы 2.3.

Пусть $\vec{H} \in V^j(\mu; \Omega)$, $j = 1, 2$ – решение задачи (2.11), (2.12). Положим $\vec{E}^c = \sigma^{-1}(\text{rot} \vec{H} - \vec{J}^{\text{ct}})$. Рассмотрим произвольную функцию $\vec{w} \in \{\mathcal{D}(\Omega_C)\}^3$. Продолжая её нулём в Ω_I , получаем функцию из $\{\mathcal{D}(\Omega)\}^3$. Согласно леммам 3.8., 3.9., $\vec{w} = \vec{v} + \text{grad} \phi$, где либо $\text{div} \mu \vec{v} = 0$, $\phi \in H_0^1(\Omega)$, либо $\mu \vec{v} \in K_0(\text{div}; \Omega)$, $\phi \in H^1(\Omega)$ при $j = 1, 2$ соответственно. Так как $\text{rot} \vec{w} = \text{rot} \vec{v}$, $\vec{v} \in V_0^j(\mu; \Omega)$. Таким образом,

$$\int_{\Omega_C} (\vec{E}^c \cdot \text{rot} \vec{w}) d\vec{x} = -i\omega \int_{\Omega} (\mu \vec{H} \cdot \vec{v}) d\vec{x} = -i\omega \int_{\Omega_C} (\mu \vec{H} \cdot \vec{w}) d\vec{x},$$

следовательно, $\text{rot} \vec{E}^c = -i\omega \mu \vec{H}$.

В случае задачи (2.1)–(2.6), (2.13) нужно найти функцию $\vec{E} \in H(\text{rot}; \Omega)$ такую, что

$$\vec{E}_C = \vec{E}^c, \text{rot} \vec{E} = -i\omega \mu \vec{H}, \text{div} \varepsilon \vec{E}_I = \rho_0, \gamma_\nu \varepsilon \vec{E}(\vec{x}) = 0, \vec{x} \in \Gamma. \quad (4.3)$$

Согласно лемме Лакса-Мильграма, возможность применения которой вытекает из неравенства (3.5), существует единственная функция $\vec{e} \in K_0(\text{div} \varepsilon; \Omega) \cap H(\text{rot}; \Omega)$, при всех $\vec{v} \in K_0(\text{div} \varepsilon; \Omega) \cap H(\text{rot}; \Omega)$ удовлетворяющая равенству

$$\int_{\Omega} (\text{rot} \vec{e} \cdot \text{rot} \vec{v}) d\vec{x} = -i\omega \int_{\Omega} (\mu \vec{H} \cdot \text{rot} \vec{v}) d\vec{x}.$$

Ввиду леммы 3.9. это равенство справедливо для всех $\vec{v} \in H(\text{rot}; \Omega)$, следовательно, согласно лемме 2.1. $\text{rot} \vec{e} + i\omega \mu \vec{H} \in K_0(\text{rot}; \Omega) \cap K(\text{div}; \Omega)$. Таким образом, $\text{rot} \vec{e} = -i\omega \mu \vec{H}$.

Согласно лемме 3.1. $\vec{E}^c - \vec{e}_C = \text{grad} p_c$, $p_c \in H^1(\Omega_C)$, $\int_{\Omega_C} p_c d\vec{x} = 0$.

Пусть $p_0 \in H^1(\Omega_0)$, $p_1 \in H^1(\Omega \setminus \bar{\Omega}_1)$ – решения задач Дирихле

$$\text{div} \varepsilon \text{grad} p_0(\vec{x}) = \rho_0(\vec{x}), \vec{x} \in \Omega_0, p_0(\vec{x}) = p_c(\vec{x}), \vec{x} \in \Gamma_0, \quad (4.4)$$

$$\text{div} \varepsilon \text{grad} p_1(\vec{x}) = \rho_0(\vec{x}), \vec{x} \in \Omega \setminus \bar{\Omega}_1, p_1(\vec{x}) = p_c(\vec{x}), \vec{x} \in \Gamma_1, p_1(\vec{x}) = 0, \vec{x} \in \Gamma. \quad (4.5)$$

Пусть, далее,

$$H_1 = \{q \in H^1(\Omega \setminus \bar{\Omega}_1) : q(\vec{x}) = 0, \vec{x} \in \Gamma_1\},$$

функция $p_2 \in H_1$ при всех $q \in H_1$ удовлетворяет равенству

$$\int_{\Omega \setminus \bar{\Omega}_1} (\epsilon \text{grad} p_2 \cdot \text{grad} \bar{q}) d\vec{x} = -\langle \gamma_{\nu_I}(\epsilon \text{grad} p_1), q \rangle_{\Gamma}.$$

Функцию $\psi \in H^1(\Omega)$ определим выражением

$$\psi(\vec{x}) = \begin{cases} p_c(\vec{x}), & \vec{x} \in \Omega_C, \\ p_0(\vec{x}), & \vec{x} \in \Omega_0, \\ p_1(\vec{x}) + p_2(\vec{x}), & \vec{x} \in \Omega \setminus \bar{\Omega}_1. \end{cases}$$

Тогда функция $\vec{E} = \vec{e} + \text{grad} \psi$ – решение задачи (4.3).

Если \vec{u} – разность двух решений задачи (4.3), то $\vec{u} \in K(\text{rot}; \Omega)$, $\vec{u}_C = 0$, $\text{div} \epsilon \vec{u}_I = 0$, $\gamma_{\nu}(\epsilon \vec{u}) = 0$. Согласно лемме 3.10., найдётся функция $\vec{v} \in K_0(\text{div}; \Omega)$ такая, что $\vec{v}_I = \epsilon \vec{u}_I$. Тогда

$$0 = (\vec{u}, \vec{v})_{2, \Omega} = (\epsilon \vec{u}_I, \vec{u}_I)_{2, \Omega_I},$$

то есть $\vec{u}_I = 0$ и, следовательно, $\vec{u} = 0$.

Рассмотрим теперь задачу (2.1)–(2.5), (2.7), (2.14) и, при $\omega = 0$, задачу (2.1)–(2.6), (2.14). Функция $\vec{E} \in H_0(\text{rot}; \Omega)$ должна удовлетворять условиям

$$\vec{E}_C = \vec{E}^c, \text{rot} \vec{E} = -i\omega \mu \vec{H}, \text{div} \epsilon \vec{E}_I = \rho_0, \langle \gamma_{\nu_I}(\epsilon \vec{E}), 1 \rangle_{\Gamma_1} = Q. \tag{4.6}$$

Определим функцию $\vec{e} \in K(\text{div} \epsilon; \Omega) \cap H_0(\text{rot}; \Omega)$ такую, что $\text{rot} \vec{e} = -i\omega \mu \vec{H}$, $\vec{E}^c - \vec{e}_C = \text{grad} p_c + \alpha$, где $p_c \in H^1(\Omega_C)$, $\int_{\Omega_C} p_c d\vec{x} = 0$, α – произвольная константа.

Пусть $p_0 \in H^1(\Omega_0)$, $p_1 \in H^1(\Omega \setminus \bar{\Omega}_1)$ – решения задач (4.4), (4.5). Положим $Q_1 = Q - \langle \gamma_{\nu_I}(\epsilon \text{grad} p_1), 1 \rangle_{\Gamma_1}$, $\phi_1 \in H_0^1(\Omega)$ определим выражением

$$\phi_1(\vec{x}) = \begin{cases} p_c(\vec{x}), & \vec{x} \in \Omega_C, \\ p_0(\vec{x}), & \vec{x} \in \Omega_0, \\ p_1(\vec{x}), & \vec{x} \in \Omega \setminus \bar{\Omega}_1 \end{cases}$$

Обозначим

$$H_2 = \{ \psi \in H_0^1(\Omega) : \psi(\vec{x}) = \text{const}, \vec{x} \in \Omega_1 \}$$

– гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(\psi, \xi)_{H_2} = \int_{\Omega \setminus \bar{\Omega}_1} (\text{grad} \psi \cdot \text{grad} \xi) d\vec{x}.$$

Рассмотрим задачу определения функции $\phi_2 \in H_2$, при всех $\psi \in H_2$ удовлетворяющей равенству

$$\int_{\Omega \setminus \bar{\Omega}_1} (\epsilon \text{grad} \phi_2 \cdot \text{grad} \psi) d\vec{x} = \psi_1 Q_1, \tag{4.7}$$

где $\psi_1 = \psi(\vec{x})$, $\vec{x} \in \Omega_1$. Согласно неравенству Фридрихса (3.1), $\psi_1^2 \text{mes}(\Omega_1) \leq A(\Omega, \Gamma) \|\psi\|_{H_2}^2$ для всех $\psi \in H_2$, линейный функционал $l : H_2 \rightarrow R^1$, $l(\psi) = Q_1 \psi_1$ – непрерывный. Таким образом, задача (4.7) имеет единственное решение. Из (4.7) следует, что

$$\text{div} \epsilon \text{grad} \phi_2(\vec{x}) = 0, \vec{x} \in \Omega_I, \langle \gamma_{\nu}(\epsilon \text{grad} \phi_2), 1 \rangle_{\Gamma} = Q_1.$$

Следовательно, $\vec{E} = \vec{e} + \text{grad}(\phi_1 + \phi_2)$ – решение задачи (4.6).

Пусть $\vec{u} \in H_0(\text{rot}; \Omega) \cap K(\text{rot}; \Omega)$ – разность двух решений задачи (4.6), тогда $\vec{u}_C = 0$. Так как $\langle \gamma_{\nu_I}(\epsilon \vec{u}), 1 \rangle_{\Gamma_j} = 0$, $j = 0, 1$, согласно лемме 3.4. найдётся функция $\vec{v} \in K(\text{div}; \Omega)$ такая, что $\vec{v}_I = \epsilon \vec{u}_I$. Таким образом, $0 = (\vec{v}, \vec{u})_{2,\Omega} = (\epsilon \vec{u}_I, \vec{u}_I)_{2,\Omega_I}$, $\vec{u}_I = 0$.

Пусть теперь $\vec{H} \in V^1(\mu; \Omega)$, $\vec{E} \in H(\text{rot}; \Omega)$ – решение системы (2.8). Положим $\vec{B} = \mu \vec{H} \in K(\text{div}; \Omega)$, $\vec{J} = \text{rot} \vec{H} \in K(\text{div}; \Omega)$, $\vec{D} = \epsilon \vec{E} \in \{L_2(\Omega)\}^3$. Очевидно, выполнены соотношения (2.1), (2.3), (2.5). Пользуясь соотношением (2.4), определим функционал $\rho \in H^{-1}(\Omega)$. Таким образом, найдено решение задачи (2.1) – (2.6). Решение задачи (2.1)–(2.5), (2.7) строится аналогично. Единственность решения задач вытекает из единственности определения \vec{H} и \vec{E} .

Доказательство теоремы 2.4.

Задачи (2.15) сводятся к задачам поиска функций $\vec{H}_\lambda \in V^j(\mu; \Omega)$, $j = 1, 2$, при всех $\vec{v} \in V^j(\sigma_\lambda; \Omega)$ удовлетворяющим равенству

$$i\omega \int_{\Omega} (\mu \vec{H} \cdot \vec{v}) d\vec{x} + \int_{\Omega} (\sigma_\lambda^{-1} \text{rot} \vec{H} \cdot \text{rot} \vec{v}) d\vec{x} = \int_{\Omega} (\sigma_\lambda^{-1} \vec{J}^{\text{ct}} \cdot \text{rot} \vec{v}) d\vec{x}. \quad (4.8)$$

Из леммы Лакса-Мильграма вытекает, что задача (4.8) имеет единственное решение. Положим $\vec{E}_\lambda = \sigma_\lambda^{-1}(\text{rot} \vec{H}_\lambda - \vec{J}^{\text{ct}})$. Пусть $\vec{\psi} \in \{\mathcal{D}(\Omega)\}^3$. Согласно леммам 3.8., 3.9. $\vec{\psi} = \vec{v} + \text{grad} \phi$, где либо $\mu \vec{v} \in K(\text{div}; \Omega)$, $\phi \in H_0^1(\Omega)$, либо $\mu \vec{v} \in K_0(\text{div}; \Omega)$, $\phi \in H^1(\Omega)$. Поскольку $\text{rot} \vec{\psi} = \text{rot} \vec{v}$, $\vec{v} \in V^j(\mu; \Omega)$. Получаем

$$\int_{\Omega} (\vec{E}_\lambda \cdot \text{rot} \vec{\psi}) d\vec{x} = \int_{\Omega} (\sigma_\lambda^{-1}(\text{rot} \vec{H}_\lambda - \vec{J}^{\text{ct}}) \cdot \text{rot} \vec{v}) d\vec{x} = -i\omega \int_{\Omega} (\mu \vec{H} \cdot \vec{v}) d\vec{x} = -i\omega \int_{\Omega} (\mu \vec{H} \cdot \vec{\psi}) d\vec{x},$$

то есть \vec{H} , \vec{E} – решение (2.15).

Доказательство закончено.

Доказательство теоремы 2.5.

Пусть $\vec{H}_\lambda \in V^1(\mu; \Omega)$, $\vec{E}_\lambda \in H(\text{rot}; \Omega)$ – решение системы (2.15). Случай, когда $\vec{H}_\lambda \in V^2(\mu; \Omega)$, $\vec{E}_\lambda \in H_0(\text{rot}; \Omega)$, рассматривается аналогично. Из (2.15) вытекает, что \vec{E}_λ удовлетворяет условиям леммы 3.11.,

$$\|\vec{E}_\lambda\|_{2,\Omega} \leq (T^2(\Omega_C, \Omega_I) + 1)^{1/2} (\|\vec{E}_\lambda\|_{2,\Omega_C} + \|\text{rot} \vec{E}\|_{2,\Omega}).$$

Пусть $\omega > 0$. Тогда для всех $\vec{v} \in H(\text{rot}; \Omega)$

$$i\omega \int_{\Omega} (\sigma_\lambda \vec{E}_\lambda \cdot \vec{v}) d\vec{x} + \int_{\Omega} (\mu^{-1} \text{rot} \vec{E} \cdot \text{rot} \vec{v}) d\vec{x} = -i\omega \int_{\Omega} (\vec{J}^{\text{ct}} \cdot \vec{v}) d\vec{x}. \quad (4.9)$$

Положив в (4.9) $\vec{v} = \vec{E}_\lambda$, получаем

$$\sigma_1 \|\vec{E}_\lambda\|_{2,\Omega_C}^2 + \lambda \|\vec{E}_\lambda\|_{2,\Omega_I}^2 + (\omega \mu_2)^{-1} \|\text{rot} \vec{E}_\lambda\|_{2,\Omega}^2 \leq (2T^2(\Omega_C, \Omega_I) + 2)^{1/2} \|\vec{J}^{\text{ct}}\|_{2,\Omega} (\|\vec{E}_\lambda\|_{2,\Omega_C} + \|\text{rot} \vec{E}\|_{2,\Omega}),$$

$$\|\vec{E}_\lambda\|_{2,\Omega_C} + \|\text{rot} \vec{E}\|_{2,\Omega} \leq C_1 \|\vec{J}^{\text{ct}}\|_{2,\Omega},$$

где $C_1 = 2(2T(\Omega_C, \Omega_I) + 2)^{1/2} \max\{\sigma_1^{-1}, \omega \mu_2\}$.

Обозначим $\vec{E}_1 = \vec{E}_{\lambda_1}$, $\vec{E}_2 = \vec{E}_{\lambda_2}$ при произвольных $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. Из равенств (4.9) вытекает, что для всех $\vec{v} \in H(\text{rot}; \Omega)$

$$\begin{aligned} i\omega \int_{\Omega_C} (\sigma(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \vec{v}) d\vec{x} + i\omega \lambda_2 \int_{\Omega_I} ((\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \vec{v}) d\vec{x} + \int_{\Omega} (\mu^{-1} \text{rot}(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \text{rot} \vec{v}) d\vec{x} = \\ = i\omega(\lambda_1 - \lambda_2) \int_{\Omega_I} (\vec{E}_1 \cdot \vec{v}) d\vec{x}. \end{aligned}$$

Положив $\vec{v} = \vec{E}_2 - \vec{E}_1$, получаем

$$\begin{aligned} \omega\sigma_1\|\vec{E}_2 - \vec{E}_1\|_{2,\Omega_C}^2 + \omega\lambda_2\|\vec{E}_2 - \vec{E}_1\|_{2,\Omega_I}^2 + \mu_2^{-1}\|\text{rot}(\vec{E}_2 - \vec{E}_1)\|_{2,\Omega}^2 &\leq \\ &\leq \sqrt{2}\omega|\lambda_1 - \lambda_2|\|\vec{E}_1\|_{2,\Omega_I}\|\vec{E}_2 - \vec{E}_1\|_{2,\Omega_I}, \\ \omega\sigma_1\|\vec{E}_2 - \vec{E}_1\|_{2,\Omega_C}^2 + \frac{1}{2}\omega\lambda_2\|\vec{E}_2 - \vec{E}_1\|_{2,\Omega_I}^2 + \mu_2^{-1}\|\text{rot}(\vec{E}_2 - \vec{E}_1)\|_{2,\Omega}^2 &\leq \\ &\leq \omega\frac{|\lambda_1 - \lambda_2|^2}{\lambda_2}\|\vec{E}_1\|_{2,\Omega_I}^2 \leq \omega\frac{|\lambda_1 - \lambda_2|^2}{\lambda_2}C_1^2T^2(\Omega_C, \Omega_I)\|\vec{J}^{\text{ct}}\|_{2,\Omega}^2. \end{aligned}$$

Пусть, без ограничения общности, $\lambda_2 > \lambda_1$. Тогда

$$\|\vec{E}_2 - \vec{E}_1\|_{\text{rot},\Omega}^2 \leq (2T^2(\Omega_C, \Omega_I) + 1)(\|\vec{E}_2 - \vec{E}_1\|_{2,\Omega_C}^2 + \|\text{rot}(\vec{E}_2 - \vec{E}_1)\|_{2,\Omega}^2) \leq C_2^2|\lambda_1 - \lambda_2|\|\vec{J}^{\text{ct}}\|_{2,\Omega}^2,$$

где $C_2^2 = (2T^2(\Omega_C, \Omega_I) + 1)C_1^2T^2(\Omega_C, \Omega_I)\max\{\sigma_1^{-1}, \mu_2\omega\}$.

Пусть теперь $\omega = 0$. Из (2.15) следует, что $\vec{E}_\lambda \in K(\text{rot}; \Omega)$. Используя лемму 2.1. получаем, что для всех $\vec{g} \in K(\text{rot}; \Omega)$

$$0 = \int_{\Omega_C} (\sigma\vec{E}_\lambda \cdot \vec{g})d\vec{x} + \lambda \int_{\Omega_I} (\vec{E}_\lambda \cdot \vec{g})d\vec{x} + \int_{\Omega} (\vec{J}^{\text{ct}} \cdot \vec{g})d\vec{x}. \quad (4.10)$$

Отсюда вытекает, что

$$\|\vec{E}_\lambda\|_{2,\Omega_C} \leq \sigma_1^{-1}(T^2(\Omega_C, \Omega_I) + 1)^{1/2}\|\vec{J}^{\text{ct}}\|_{2,\Omega}, \quad \|\vec{E}_\lambda\|_{2,\Omega_I} \leq C_3\|\vec{J}^{\text{ct}}\|_{2,\Omega},$$

где $C_3 = T(\Omega_C, \Omega_I)\sigma_1^{-1}(T^2(\Omega_C, \Omega_I) + 1)^{1/2}$.

Для $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ и $\vec{E}_1 = \vec{E}_{\lambda_1}$, $\vec{E}_2 = \vec{E}_{\lambda_2}$ из (4.10) получаем

$$\int_{\Omega_C} (\sigma(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \vec{g})d\vec{x} + \lambda_2 \int_{\Omega_I} ((\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \vec{g})d\vec{x} = (\lambda_1 - \lambda_2) \int_{\Omega_I} (\vec{E}_1 \cdot \vec{g})d\vec{x}$$

при любой функции $\vec{g} \in K(\text{rot}; \Omega)$. Следовательно,

$$\sigma_1 \int_{\Omega_C} (\vec{E}_2 - \vec{E}_1)^2 d\vec{x} + \frac{\lambda_2}{2} \int_{\Omega_I} (\vec{E}_2 - \vec{E}_1)^2 d\vec{x} \leq \frac{|\lambda_1 - \lambda_2|^2}{2\lambda_2} \int_{\Omega_I} (\vec{E}_1)^2 d\vec{x}.$$

Пусть $\lambda_1 < \lambda_2$. Тогда

$$\|\vec{E}_2 - \vec{E}_1\|_{2,\Omega} = \|\vec{E}_2 - \vec{E}_1\|_{\text{rot},\Omega} \leq C_4\sqrt{\lambda_2 - \lambda_1}\|\vec{J}^{\text{ct}}\|_{2,\Omega},$$

где $C_4 = ((T^2(\Omega_C, \Omega_I) + 1)/(2\sigma_1))^{1/2}C_3$.

Из (2.15) и оценки (3.5) следует, что

$$\|\text{rot}(\vec{H}_{\lambda_2} - \vec{H}_{\lambda_1})\|_{2,\Omega} \leq \max\{\lambda_2, \sigma_2\}\|\vec{E}_2 - \vec{E}_1\|_{2,\Omega} + |\lambda_2 - \lambda_1|\|\vec{E}_1\|_{2,\Omega_I},$$

то есть при $\lambda_2, \lambda_1 \leq 1$ получаем, используя оценку (3.5):

$$\|\vec{H}_{\lambda_2} - \vec{H}_{\lambda_1}\|_{\text{rot},\Omega} \leq C_5\sqrt{|\lambda_2 - \lambda_1|}\|\vec{J}^{\text{ct}}\|_{2,\Omega},$$

где $C_5 = (C^2(\Omega)\mu_2^2\mu_1^{-2} + 1)^{1/2}(\max\{1, \sigma_2\}C_2 + C_1T(\Omega_C, \Omega_I))$, если $\omega > 0$ и

$C_5 = (C^2(\Omega)\mu_2^2\mu_1^{-2} + 1)^{1/2}(\max\{1, \sigma_2\}C_4 + C_3)$ при $\omega = 0$.

Таким образом, $\vec{H}_\lambda, \vec{E}_\lambda$ стремятся при $\lambda \rightarrow 0$ в $H(\text{rot}; \Omega)$ к некоторым $\vec{h} \in V^1(\mu; \Omega)$, $\vec{e} \in H(\text{rot}; \Omega)$ соответственно. Переходя к пределу при $\lambda \rightarrow 0$ в (2.15) получаем, что $\vec{h} = \vec{H}$, $\vec{e} = \vec{E}$ – решение системы (2.8).

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках базовой части (код проекта 2664) и проектной части (код проекта 1727) государственного задания в 2014-2016 гг., а также поддержана грантом в рамках соглашения от 27 августа 2013 г. № 02.В.49.21.0003 между Минобрнауки РФ и ННГУ им. Н.И. Лобачевского.

Дата поступления 30.11.2016

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. М. П. Галанин, Ю. П. Попов, *Квазистационарные электромагнитные поля в неоднородных средах*, Наука, Физматлит, М., 1995, 316 с.
2. A. Alonso Rodriguez, A. Valli, *Eddy current approximation of Maxwell equations*, Springer-Verlag Italia, Milano, 2010.
3. J. D. Lavers, “State of the art of numerical modeling for induction processes”, *COMPEL*, **27** (2008), 335–349.
4. A. Bermudes, R. Rodriguez, P. Salgado, “FEM for 3D eddy current problems in bounded domains subject to realistic boundary conditions. An application to metallurgical electrodes”, *Arch. Comput. Methods Engrg.*, **12** (2005), 67–114.
5. R. Y. Tang, S. H. Wang, Y. Li, X. L. Wang, X. Cui, “Transient simulation of power transformers using 3-D finite element model coupled to electric circuit equations”, *IEEE Trans. Magn.*, **36** (2000), 1417–1420.
6. M. T. Thompson, “Eddy current magnetic levitation. Models and experiments”, *IEEE Potentials*, **19** (2000), 40–44.
7. B. A. Auld, J. C. Moulder, “Review of advances in quantitative eddy current nondestructive evaluation”, *J. Nondestr. Eval.*, **18** (1999), 3–36.
8. S. Baillet, J. C. Mosher, R. M. Leahy, “Electromagnetic brain mapping”, *IEEE Signal Process. Magaz.*, **18** (2001), 14–30.
9. Ж.-Л. Кулон, Ж.-К. Сабоннадьер, *САПР в электротехнике*, Мир, М., 1988, 208 с.
10. A. Bossavit, *Computational electromagnetism. Variational formulations, complementarity, edge elements*, Academic Press, Boston, 1998.
11. H. Weyl, “The method of orthogonal projection in potential theory”, *Duke Math. J.*, **7** (1940), 411–444.
12. Э. Б. Быховский, Н. В. Смирнов, “Об ортогональном разложении пространства вектор-функций, квадратично суммируемых по заданной области, и операторах векторного анализа”, *Труды МИАН СССР*, **59** (1960), 5–36.
13. Г. Дюво, Ж.-Л. Лионс, *Неравенства в механике и физике*, Наука, М., 1980, 384 с.
14. V. Girault, P. Raviart P., *Finite element methods for Navier–Stokes equations*, Springer-Verlag, N.Y., 1986.
15. А. В. Калинин, А. А. Калининкина, “Lp - оценки векторных полей”, *Известия Вузов. Математика*, 2004, № 3, 26–35.
16. Z. Chen, Q. Du, J. Zou, “Finite element methods with matching and nonmatching meshes for Maxwell equations with discontinuous coefficients”, *SIAM J. Numer. Anal.*, **37**:5 (2000), 1642–1570.

17. А. В. Калинин, С. Ф. Морозов, “Стационарные электромагнитные поля в неоднородных средах с непроводящими и слабопроводящими включениями”, *Вестник ННГУ им. Н.И. Лобачевского. Математическое моделирование и оптимальное управление*, 1999, № 1(20), 48–62.
18. А. В. Калинин, А. А. Тюхтина, “Асимптотическое поведение решений некоторых краевых задач для эллиптических уравнений”, *Вестник ННГУ им. Н.И. Лобачевского*, 2010, № 2, 117–123.
19. М. Cessenat, *Mathematical methods in electromagnetism: linear theory and applications*, World Scientific, 1996.
20. Х. Гаевский, К. Грёгер, К. Захарияс, *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения*, Мир, М., 1978, 336 с.

Quasistationary electromagnetic fields in inhomogeneous media with non-conductive and low conductive inclusions

© А. В. Kalinin³, А. А. Tiukhtina⁴

Abstract. Boundary value problems for the time-periodic solutions of quasi-stationary magnetic approximation for Maxwell equations are studied. The case of inhomogeneous media containing a conducting, non-conducting and low-conducting inclusions is considered. The asymptotic connection of the solutions of problems with non-conducting and low-conducting inclusions is investigated.

Key Words: Maxwell equations, quasistationary magnetic approximation, periodic solutions, inhomogeneous media, electric and magnetic boundary conditions, non-conducting and low-conducting inclusions

³ Associate Professor of Mathematical Physics and Optimal Control Department, Institute of Informational Technology, Mathematics and Mechanics, Lobachevsky State University, Nizhny Novgorod; avk@mm.unn.ru

⁴ Associate Professor of Mathematical Modelling of Economical Processes Department, Institute of Economics and Entrepreneurship, Lobachevsky State University, Nizhny Novgorod; kalinmm@yandex.ru