

лишь промежуточный этап. Необходимо установить прямую связь определенных наведенных источников с измеряемыми величинами. Ввиду того, что в большинстве случаев в дальней зоне вычисляется либо рассеянное поле, либо сечение рассеяния, для иллюстрации метода ограничимся этими величинами. Поле в дальней зоне рассеяния, создаваемое ограниченной поверхностью Σ , может быть определено через вспомогательные источники с помощью уравнений (8), (9), в которых точки наблюдения устремлены к бесконечности.

Таким образом, предложенный и полностью обоснованный в данной работе метод интегральных уравнений первого рода применительно к возбуждению и рассеянию электромагнитных волн на импедансных телах (сверхпроводящих и нормально проводящих), имеющих симметрию вращения, может быть использован для определения радиолокационного сечения рассеяния (например, коническая поверхность, усеченная коническая поверхность, цилиндрическая поверхность, конус-сфера-конус), а также многослойных структур.

Поступило
12 VIII 1988

ЛИТЕРАТУРА

1. Васильев Е.Н. Возбуждение тел вращения. М.: Радио и связь, 1987. 271 с.
2. Андрущенко А.М., Богомолов А.С., Кравченко В.Ф., Менде Ф.Ф. — РЭ, 1979, т. 24, с. № 6, с. 1078–1083.
3. Кравченко В.Ф. — Докл. АН УССР. Сер. А, 1982, № 1, с. 63–66.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М., 1959. 532 с.
5. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.
6. Шенберг Д. Сверхпроводимость. М.: ИЛ, 1955. 288 с.
7. Смирнов В.И. Курс высшей математики. М.: Наука, 1974, т. 4, ч. 1. 336 с.

УДК 519.6

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

© А.А. ФОМИН

ДИФРАКЦИЯ НА КОНЕЧНОЙ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЕ ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩИХ ЭКРАНОВ

(Представлено академиком А.Н. Тихоновым 14 VI 1988)

Анализ и расчет рассеяния электромагнитных волн на системе произвольно расположенных тонких, идеально проводящих лент различных размеров имеет большое практическое и теоретическое значение. В работах [1–3] эта задача сведена к интегральному уравнению Фредгольма второго рода. В [4] приближенно рассматривается дифракция на ограниченной ленточной решетке. Реализация точно поставленных краевых задач на ЭВМ порождает специфические проблемы, связанные как с погрешностями и устойчивостью получаемых решений, так и с необходимостью снижения трудоемкости вычислительного процесса. Целесообразно при формулировке задачи учесть, что полученное решение будет приближенным. В настоящей работе краевая задача формулируется как задача оптимизации некоторого функционала, что позволяет стабилизировать решение путем регуляризации и получить приближенные результаты для различных областей изменения параметров задачи. В основе алгоритма лежит быстрое преобразование Фурье, это позволило получить высокое быстродействие.

Рассмотрим систему тонких, идеально проводящих параллельных лент, расположенных в плоскости $X = 0$ координатной системы x, y, z . Пусть на ленты падает произвольная электромагнитная волна, электрический вектор которой $E_0(z)$ параллелен краям лент. Пусть V – евклидово пространство, $M \subset V$ – множество точек плоскости $x = 0$. Тогда идеальной проводимостью обладают точки замкнутого множества $S = \bigcup_n S_n$, где S_n – n -я лента, $n = 1, 2, \dots, N$.

Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$(1) \quad \int_S j(z_0) g(z - z_0) dz_0 + E_0(z) = 0, \quad z \in S,$$

$$(2) \quad j(z) = 0, \quad z \in S^c = M \setminus S,$$

$$(3) \quad \int_{V_0} \{ |E|^2 + |\text{grad } E|^2 \} dV < \infty.$$

Здесь V_0 – произвольный компакт в V , функция Грина $g(z - z_0) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|z - z_0|)$, $H_0^{(1)}(\xi)$ – функция Ганкеля, k – волновой вектор.

Так как уравнение (1) является уравнением типа свертки, целесообразно построить алгоритм решения задачи (1)–(3) на основе преобразования Фурье и использовать при машинной реализации алгоритм быстрого преобразования Фурье.

Введем функции окна

$$(4) \quad \Pi(z) = \begin{cases} 1, & z \in S, \\ 0, & z \in S^c, \end{cases}$$

$$(5) \quad \Pi(z) = \begin{cases} 0, & z \in S, \\ 1, & z \in S^c \end{cases}$$

и неизвестную функцию $l(z) \in C^2$ на S^c . Функция $l(z) = -E_0(z)$ на краях ленты. Теперь уравнение (1) можно записать в виде [5]

$$(6) \quad \int_S j(z) g(z - z_0) dz_0 = -E_0(z) \Pi(z) + l(z) \Pi(z), \quad z \in M.$$

Введем операторы прямого и обратного преобразований Фурье:

$$F(v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} v(h) \exp ihz \, dh,$$

$$F^{-1}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} u(z) \exp (-ihz) \, dz,$$

тогда

$$E(z) = F(v) = -E_0(z) \Pi(z) + l(z) \Pi(z),$$

откуда находим

$$(7) \quad v(h) = F^{-1}(-E_0(z) \Pi(z) + l(z) \Pi(z)).$$

С другой стороны, из (1) следует

$$(8) \quad v(h) = I(h) \Gamma(h),$$

где $I(h) = F^{-1}(j)$, $\Gamma(h) = F^{-1}(g)$.

Таким образом, плотность тока на лентах

$$(9) \quad j(z) = F \{ \Gamma^{-1}(h) F^{-1}(-E_0(z) \Pi(z) + l(z) \Pi(z)) \} = c(l),$$

$$\text{или } j(z) = F \{ \Gamma^{-1}(h) \cdot v \} = c(v).$$

Если правая часть в (9) вычислена неточно, то уравнение (9) дает $j \neq 0$ на S^c , поэтому диаграмму направленности рассеянного назад излучения $D(h)$, учитывая условие (2), запишем, используя функцию окна:

$$(10) \quad D(h) = F^{-1}(j(z) \Pi(z)).$$

Электрическое поле на поверхности $X = 0$

$$(11) \quad E(z) = F \{ \Gamma(h) D(h) \} = B(l), \text{ или } E(z) = F \{ \Gamma(h) F^{-1}[j(z) \Pi(z)] \} = B(j),$$

а также $E(z) = F \{ \Gamma(h) F^{-1}[\Pi(z) F(\Gamma^{-1}(h) v)] \} = B(v)$. Оно должно удовлетворять граничному условию (1), а именно:

$$(12) \quad E(z) = -E_0(z), \quad z \in S.$$

Так как $l(z)$ точно не известно, формулы (7)–(11) дают приближенные результаты.

Кроме того, $\Gamma(h) = \frac{i}{2\sqrt{k^2 - h^2}}$, поэтому в (11) влияние погрешностей значительно усиливается при $|h| \approx k$. Мерой погрешности решения являются отклонения от условий (2) и (12). Теперь можно сформулировать рассматриваемую задачу как задачу минимизации любого из следующих нелинейных функционалов:

$$(13) \quad \begin{aligned} \Phi_1(j) &= \|\Pi(z) [B(j) + E_0]\|_A^2 + \lambda \|\Pi(z) j(z)\|_A^2 + \alpha \Omega(j), \\ \Phi_2(l) &= \|\Pi(z) [B(l) + E_0]\|_A^2 + \lambda \|\Pi(z) c(l)\|_A^2 + \alpha \Omega(l), \\ \Phi_3(v) &= \|\Pi(z) [B(v) + E_0]\|_A^2 + \lambda \|\Pi(z) c(v)\|_A^2 + \alpha \Omega(v). \end{aligned}$$

Здесь A – некоторое функциональное пространство, чаще всего L_2 , Ω – стабилизирующий функционал [6], α – параметр регуляризации, λ – множитель Лагранжа. Введение множителя Лагранжа λ позволяет изменять приоритет условий (1) и (2). При $\lambda = 1$ весомость этих условий одинакова. Таким образом, задачу минимизации сформулируем в виде

$$(14) \quad \inf_{\omega} \Phi_m(\omega) = \Phi_m(\omega_0)$$

при заданном λ , или в общем случае

$$(15) \quad \inf_{\omega} \sup_{\lambda} \Phi_m(\omega, \lambda) = \Phi_m(\omega_0, \lambda_0).$$

Поиск экстремума традиционными градиентными методами требует большого машинного времени. Однако физический анализ формул (7)–(11) позволяет предложить простые и эффективные методы оптимизации. Например, для лент достаточно большой ширины kL_n можно использовать квазилокальное приближение. Действительно, неизвестная функция $l(z)$ обусловлена рассеянным излучением с волновым числом $|h| \gtrsim k$. Если это излучение мало, то соответствующими составляющими рассеянного поля можно пренебречь (квазилокальное приближение). Если положить $D(h) = 0$ при $h > h_c < k$, то норма отброшенной части диаграммы $\Delta D(h)$ в пространстве непрерывных функций $\|\Delta D\|_c = (kL_n)^{-1}$, $2L_n$ – ширина n -й ленты. При этом в начальном приближении полагаем $l(z) = 0$. На рис. 1 показаны $|E(z)|$ и $|j(z)|$, вычисленные для отдельной ленты (две итерации) с $kL = 50$. Граничные условия для электрического поля выполняются с погрешностью меньше 0,01. Оптимизировался функционал Φ_2 . Плотность тока на множестве S^c является мерой

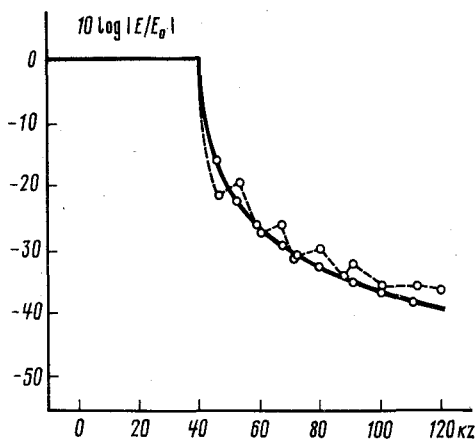


Рис. 1

Рис. 1. Электрическое поле E в плоскости $X = 0$ (сплошная кривая) и восстановленная по E плотность тока (штриховая линия) в квазилокальном приближении, $kL = 50$, $\beta = 0$

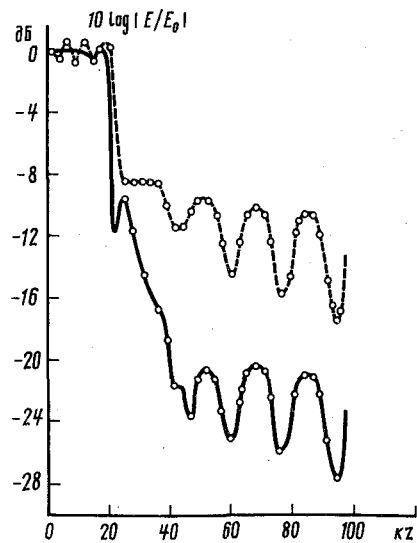
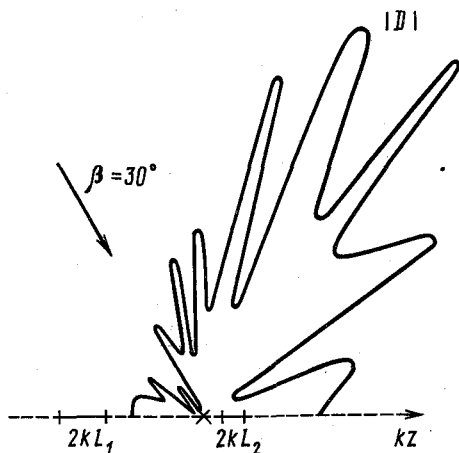


Рис. 2

Рис. 2. Электрическое поле E в плоскости $X = 0$ до фильтрации (штриховая линия) и после фильтрации (сплошная кривая), $kL = 20$, $\beta = 0$, $\alpha = 7$

Рис. 3. Диаграмма рассеяния двух лент с $kL_1 = 5,29$ и $kL_2 = 2,64$ при угле падения плоской волны $\beta = 30^\circ$



погрешности решения, однако при вычислении $D(h)$ по (10) условие (2) удовлетворяется точно.

При уменьшении kL погрешность этого метода возрастает. На рис. 2 показана зависимость $|E(z)|$ при $kL = 20$. Здесь $\| \Pi(z) [B(v) + E_0] \|_c = 0,2$. Из рис. 2 видно, что невязка вызвана скользящими волнами с $|h| \approx k$. Поэтому естественно спектр E подвергнуть узкополосной фильтрации (оптимизация функционала Φ_3), а именно, в (11) положим $B(v) = F \{ \varphi(h) \Gamma(h) D(h) \}$. На рис. 2 показан модуль $|E(z)|$ после фильтрации функций

$$(17) \quad \varphi(h) = \exp \{ -\alpha [(h/k)^2 - 1]^2 \}.$$

Видно, что граничные условия выполняются значительно лучше, но сохранилась неустойчивость $l(z)$ на уровне -20 дБ. Дополнительной фильтрацией этой неустойчивости можно улучшить результат. Из рис. 2 видно, что невыполнение граничных условий на поверхности ленты сильно влияет на $l(z)$. Плотность тока $j(z)$ мало

чувствительна к этой погрешности, поэтому диаграмма направленности $D(h)$ вычисляется с хорошей точностью даже при значительной невязке $\|B(j) + E_0\|_c$. Сравнение результатов вычисления $D(h)$ с данными [7, 8] показывает, что наибольших значений погрешность достигает в минимумах $D(h)$ и в направлениях скользящих вдоль поверхности лучей. Например, при $kL = \sqrt{80}$ и $kL = \sqrt{28}$ при нормальном падении плоской волны погрешность $D(h)$ составляет единицы процентов при выполнении граничного условия для E с погрешностью $\sim 5-10\%$. Применялась однократная фильтрация.

Метод без каких-либо изменений применяется при любом числе произвольно расположенных лент различной ширины. На рис. 3 приведена индикатриса рассеяния в верхнее полупространство $D(h)$ при падении плоской волны под углом 30° на две ленты с $kL_1 = 5,29$ и $kL_2 = 2,64$. Метод легко обобщить на случай, когда ленты находятся на границе раздела двух сред.

Таким образом, формулировка задачи дифракции как задачи минимизации функционала позволяет разработать простые эффективные алгоритмы, дающие решения с приемлемой для практических целей точностью.

Поступило
11 VII 1988

ЛИТЕРАТУРА

1. Сологуб В.Г. – ЖВМиМФ, 1971, т. 11, № 4, с. 837.
2. Каач Н.В., Сологуб В.Г. – РЭ, 1982, т. 27, № 10, с. 2031–2033.
3. Сологуб В.Г. – РЭ, 1988, т. 33, № 2, с. 271–275.
4. Литвиненко Л.Н., Просвирич С.Л. Спектральные операторы рассеяния в задачах дифракции волн на плоских экранах. Киев: Наук. думка, 1984. 240 с.
5. Миттра Р., Гао В., Рахмат-Самий Я. – ТИИЭР, 1979, т. 67, № 11, с. 20–40.
6. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 285 с.
7. Захаров Е.В., Пименов Ю.В. Численный анализ дифракции радиоволн. М.: Радио и связь, 1982. 180 с.
8. Горгошидзе А.Н. – РЭ, 1975, т. 20, № 7, с. 1354–1361.