В. Г. Яхно, Одномерная обратная задача анизотропной упругости при шнуровых источниках, *Докл. АН СССР*, 1985, том 285, номер 2, 339–342

В.Г. ЯХНО

ОДНОМЕРНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА АНИЗОТРОПНОЙ УПРУГОСТИ ПРИ ШНУРОВЫХ ИСТОЧНИКАХ

(Представлено академиком М.М. Лаврентьевым 2 I 1985)

В настоящей работе получена оценка устойчивости решения задачи определения плотности и всех модулей упругости, входящих в систему дифференциальных уравнений линейной теории упругости анизотропных сред, которые зависят от одной пространственной переменной x_3 при данных, моделирующих "шнуровые источники", расположенные на оси x_3. Ранее в работах В.Г. Романова, Е.А. Волковой [1–3] для данных, моделирующих мгновенные точечные источники на границе $x_3 = 0$, показана однозначность восстановления плотности 18 из 21 модулей упругости. Из данной и цитируемых работ следует, что постановка обратной задачи для шнуровых источников более информативна, чем для точечных источников, что и позволяет ее исследовать в полной постановке.

Пусть $x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$, $t \in R$. Рассмотрим при $x_3 > 0$, $t > 0$ систему дифференциальных уравнений теории упругости для анизотропных сред

$$(1)\qquad \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sum_{j,k,l=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(c_{ijkl}\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right)$$

с начальными данными

$$(2)\qquad u_i\big|_{t=0} = p_i(x_3)\delta(x_1, x_2), \quad \frac{\partial u_i}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0,$$

и граничным условием

$$(3)\qquad \sum_{k,l=1}^{3} c_{3ikl}\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\bigg|_{x_3=0} = f_i(x_1, x_2, t),$$

где $i = 1, 2, 3$; $u(x, t) = (u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t))$ — вектор смещения; c_{ijkl}, $i, j, k, l = 1, 2, 3$, — модули упругости, причем $c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{ijlk} = c_{klij}$; ρ — плотность; $\delta(x_1, x_2) = \delta(x_1)\delta(x_2)$, $\delta(\cdot)$ — дельта-функция Дирака.

З а м е ч а н и е 1. Начальные данные вида (2) моделируют так называемые шнуровые источники. Задача (1)–(3) может быть получена из однопараметрического семейства задач для системы (1), зависящего от параметра x_3^0, с начальными и граничными данными вида

$$u_i(x, t, x_3^0)\big|_{t=0} = p_i(x_3^0)\,\delta(x_3 - x_3^0)\delta(x_1, x_2), \quad \frac{\partial}{\partial t}u_i(x, t, x_3^0)\bigg|_{t=0} = 0,$$

$$\sum_{k,l=1}^{3} c_{3ikl}\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\bigg|_{x_3=0} = F_i(x_1, x_2, t, x_3^0).$$

Соотношения симметрии сводят число независимых модулей упругости с 81 до 21. Если принять, что $c_{\alpha\beta} = c_{ijkl}$, где $\alpha = (ij)$, $\beta = (kl)$ в соответствии со следующими переобозначениями

$$(11) \to 1, \quad (22) \to 2, \quad (33) \to 3, \quad (23) = (32) \to 4,$$

$$(31) = (13) \to 5, \quad (12) = (21) \to 6,$$

то таблице независимых модулей упругости можно придать вид симметрической матрицы порядка 6×6.

Относительно функций $\rho = \rho(x_3)$, $c_{ijkl} = c_{ijkl}(x_3)$ предполагаем, что $\rho(x_3) > 0$, система дифференциальных уравнений (1) гиперболическая и

$$\rho(x_3) \in C^2(R_+), \quad c_{lj}(x_3) \in C(R_+), \quad l, j = 1, 2, 6;$$

$$c_{jk}(x_3) \in C^1(R_+), \quad j = 1, 2, 6; \quad k = 3, 4, 5; \quad c_{nm}(x_3) \in C^3(R_+),$$

$$m,n = 3, 4, 5; \quad R_+ = [0, \infty).$$

Далее считаем, что $p(x_3) = (p_1(x_3), p_2(x_3), p_3(x_3))$,

$$f(x_1, x_2, t) = (f_1(x_1, x_2, t), f_2(x_1, x_2, t), f_3(x_1, x_2, t)),$$

(4)
$$p_j \in C^4(R_+), \; f_j \in C_t^3(R_+; \mathcal{E}'(R^2)), \; \frac{\partial}{\partial t} f \Big|_{t=0} = 0,$$

$$ip(0)[R_0 \delta'(x_1)\delta(x_2) + G_0 \delta(x_1)\delta'(x_2)] +$$

$$+ C(0) \frac{d}{dx_3} P \Big|_{x_3=0} \cdot \delta(x_1)\delta(x_2) = f(x_1, x_2, 0),$$

$$= i^2 = -1, \quad j = 1, 2, 3,$$

где

$$C(x_3) = (c_{kj})_{k,j=5,4,3}, \quad c_{kj}(x_3) = c_{jk}(x_3);$$

$$R_0 = -i \begin{pmatrix} c_{15}(0) & c_{56}(0) & c_{55}(0) \\ c_{14}(0) & c_{46}(0) & c_{45}(0) \\ c_{13}(0) & c_{36}(0) & c_{35}(0) \end{pmatrix}, \quad G_0 = -i \begin{pmatrix} c_{56}(0) & c_{25}(0) & c_{45}(0) \\ c_{46}(0) & c_{24}(0) & c_{44}(0) \\ c_{36}(0) & c_{23}(0) & c_{34}(0) \end{pmatrix}.$$

З а м е ч а н и е 2. Если $\rho(x_3)$, $c_{\alpha\beta}(x_3)$ суть заданные функции с вышеуказанными свойствами, а $p(x_3)$, $f(x_1, x_2, t)$ – известные вектор-функции, удовлетворяющие условиям (4), то можно показать, что существует единственное решение задачи (1)–(3)

$$u(x, t) \in \mathcal{U} = C^2_{x_3, t}(R^2_+; \mathcal{E}'(R^2)), \quad R^2_+ = R_+ \times R_+.$$

Рассмотрим набор таких вектор-функций $p^j(x_3)$, $f^j(x_1, x_2, t)$, $j = 1, 2, \ldots, 10$, которые при каждом j удовлетворяют условиям (4). Решение $u(x, t)$ задачи (1)–(3) есть, вообще говоря, некоторый функционал от p, f: $u(x, t) = u[p, f]\,(x, t)$. Далее используем обозначение $u^j(x, t) = u[p^j, f^j]\,(x, t)$, $j = 1, 2, \ldots, 10$.

О б р а т н а я з а д а ч а. Определить такие модули упругости $c_{\alpha\beta}(x_3)$, $\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, 6$ и плотность $\rho(x_3)$, входящие в систему дифференциальных уравнений (1), для которых имеют место равенства

(5)
$$u^j(x, t) \Big|_{x_3=0} = \psi^j(x_1, x_2, t), \quad j = 1, 2, \ldots, 10,$$

где вектор-функции ψ^j, $j = 1, 2, \ldots, 10$, считаются данными.

Введем следующие обозначения:

(6)
$$\psi^{skj}(t) = \frac{\partial^{s+k}}{\partial \nu_1^s \partial \nu_2^k} F_{x_1, x_2}[\psi^j]\,(\nu_1, \nu_2, t) \Big|_{\nu_1 = \nu_2 = 0},$$

$$(7) \qquad f^{skj}(t) = \frac{\partial^{s+k}}{\partial \nu_1^s \partial \nu_2^k} F_{x_1, x_2} [f^j] (\nu_1, \nu_2, t) \Big|_{\nu_1 = \nu_2 = 0},$$

F_{x_1, x_2} – оператор преобразования Фурье по переменным $(x_1, x_2) \in R^2$; ν_1, ν_2 – параметры преобразования;

$$\mathfrak{A}(\mu_0, \mu_1, \epsilon, M, X) = \{A(y) = (a_{ij}(y))_{3\times 3} \mid a_{ij} = a_{ji},$$

$$a_{ij}(x_3) \in C^3 [0, X], \quad \| a_{ij} \|_3 (X) \leqslant M, \quad \min_{x_3 \in [0, X]} a_{33}(x_3) \mid \geqslant \epsilon,$$

для собственных чисел $\lambda_i(A)(x_3)$, $i = 1, 2, 3$ матрицы $A(x_3)$ при $x_3 \in [0, X]$ истинно высказывание $(\mu_0 \leqslant \lambda_i(A)(x_3) \leqslant \mu_1)$ & $((\mid \lambda_i(A)(x_3) - \lambda_j(A)(x_3) \mid \geqslant \epsilon) \vee (\lambda_i(A)(x_3) \equiv \equiv \lambda_j(A)(x_3)))\}$, $\| \cdot \|_s (X) = \| \cdot \|_{C^s[0,X]}$; $\mathfrak{R}(\rho_0, r, M, X) = \{ \rho(x_3) \in C^2 [0, X] \mid \rho(0) = \rho_0$, $\rho(x_3) \geqslant r$, $\| \rho \|_2 (X) \leqslant M \}$; $\mu_0, \mu_1, \epsilon, \rho_0, r, M, X$ – фиксированные положительные числа; $P_1(x_3)$ – матрица порядка 3×3, j-й строкой которой служит вектор

$$\left(\frac{d}{dx_3} p_1^j, \ \frac{d}{dx_3} p_2^j, \frac{d}{dx_3} p_3^j\right), \quad j = 1, 2, 3;$$

$P_2(x_3)$ – матрица, порядка 2×2, j-й строкой которой служит вектор

$$\left(\frac{d}{dx_3} p_2^{3+j}, \ \frac{d}{dx_3} p_2^{3+j}\right), \quad j = 1, 2;$$

$P_3(x_3)$ – матрица порядка 2×2, j-й строкой которой служит вектор

$$\left(\frac{d_2}{dx_3^2} p_3^{5+j}, \ \frac{d}{dx_3} p_3^{5+j}\right), \quad j = 1, 2;$$

$P_4(x_3)$ – матрица порядка 2×2, j-й строкой которой служит вектор

$(p_1^{7+j}, \ p_2^{7+j})$, $j = 1, 2$.

Т е о р е м а. *Пусть μ_0, μ_1, ϵ, ρ_0, r, M, X – фиксированные положительные числа $\mu_1 \geqslant \mu_0$; $T = XM/\mu_0$. Заданные вектор-функции $p^j(x_3) \in C^4 [0, X]$, $j = 1, 2, \ldots, 10$, считаются такими, что* $\det P_k(x_3) \neq 0$, $k = 1, 2, 3, 4$; $p_2^{10}(x_3) \neq 0$, $p_1^j(x_3) \equiv 0$, $j = 4, 5, 6, 7$, $p_2^l(x_3) \equiv 0$, $l = 6, 7$, $x_3 \in [0, X]$. *Функции $c_{mn}(x_3)$, $\rho(x_3)$, $c^*_{mn}(x_3)$, $\rho^*(x_3)$ $(m, n = 1, 2, \ldots, 6)$ при $x_3 \in [0, X]$ суть решения обратных задач, отвечающие вектор-функциям ψ^j, f^j; ψ^j_*, f^j_* $(j = 1, 2, \ldots, 10)$ соответственно, причем $c_{mn}(x_3)$, $c^*_{mn}(x_3)$ удовлетворяют условиям, описанным в начале работы и $(c_{mn})_{m,n=5,4,3}$, $(c^*_{mn})_{m,n=5,4,3} \in$ $\mathfrak{A}(\mu_0, \mu_1, \epsilon, M, X)$,* а $\rho, \rho^* \in$ $\mathfrak{R}(\rho_0, r, M, X)$. *Тогда имеет место оценка*

$$\| \rho - \rho^* \|_1 (X) + \sum_{n,m=3}^{5} \| c_{nm} - c^*_{nm} \|_1 (X) + \sum_{j=1,2,6} \sum_{k=3}^{5} \| c_{jk} - c^*_{jk} \| (X) +$$

$$+ \sum_{l,j=1,2,6} \| c_{lj} - c^*_{lj} \| (X) \leqslant \frac{K}{d} \Big\{ \sum_{j=1}^{10} \| \psi^{00j} - \psi^{00j}_* \|_2 (T) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{7} \| f^{00j} - f^{00j}_* \|_2 (T) + \sum_{(s,k,j) \in \Lambda'} [\| \psi^{skj} - \psi^{skj}_* \|_2 (T) + \| f^{skj} - f^{skj}_* \|_2 (T)] +$$

$$+ \| \psi^{10,10} - \psi^{10,10} \|_2 (T) \Big\},$$

где

$$d = \min\left\{ \min_{k=1,2,3,4}\ \min_{y\in[0,X]} |\det P_k(y)|,\ \min_{y\in[0,X]} |p_2^{10}(y)| \right\};$$

K – некоторое положительное число; $\Lambda = \{(s, k, j) \mid k = 0, s = 1, 2, j = 8, 9\} \cup \cup \{(s, k, 10) \mid k = 0, 1, 2; s = 0, 1, 2; s + k = 2\} \cup \{(0, 1, 10)\}$; $\psi^{skj}(t), f^{skj}(t)$ *определены посредством формул* (5) – (7).

З а м е ч а н и е 3. Вместо однородной системы дифференциальных уравнений (1) можно рассмотреть неоднородную, свободный член которой есть вектор-функция $F(x, t) = p(x_3, t)\delta(x_1, x_2)$, $p(x_3, t) \in C^4(R_+^2)$, $\frac{\partial}{\partial t} p(x_3, t)\big|_{t=0} = 0$. Начальные и граничные условия могут быть нулевыми. В этом случае в правой части оценки устойчивости вместо слагаемых $\|\psi^{skj} - \psi_*^{skj}\|_2(T)$ будут слагаемые $\|\psi^{skj} - \psi_*^{skj}\|_4(T)$. Если, кроме того, граничное условие не нулевое, то вместо членов $\|f^{skj} - f_*^{skj}\|_2(T)$ войдут члены $\|f^{skj} - f_*^{skj}\|_4(T)$.

Вычислительный центр
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
25 I 1985

ЛИТЕРАТУРА

1. *Романов В.Г., Волкова Е.А.* – ДАН, 1982, т. 267, № 4, с. 780–783. 2. *Волкова Е.А.* В кн.: Вопросы корректности обратных задач математической физики. Новосибирск, 1982, с. 62–68. 3. *Волкова Е.А* В кн.: Некорректные задачи математической физики и анализа. Новосибирск: Наука, 1984, с. 228–230.