Р. О. Кузьмин, Об одном новом классе трансцендентных чисел, *Известия Академии наук СССР. VII серия. Отделение физико-математических наук*, 1930, выпуск 6, 585–597

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1930.
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des Sciences Physico-Mathématiques

Отделение Физико-Математических Наук

ОБ ОДНОМ НОВОМ КЛАССЕ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ЧИСЕЛ

Р. О. КУЗЬМИНА

(Представлено академиком И. М. Виноградовым *в заседании Отделения Физико-Математических Наук 4 апреля 1930 года)*

В декабрьском выпуске журнала «Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris» (1929) помещена интересная заметка А. Гельфонда, в которой автор излагает новый результат, полученный им в теории трансцендентных чисел с помощью крайне остроумных соображений. Результат, достигнутый им, можно высказать так: все числа вида ω^α, где ω — алгебраическое число, α — мнимая квадратичная иррациональность, трансцендентны. В частности, например, $e^\pi = (-1)^{-i}$ трансцендентно. В настоящей работе я доказываю теорему, в некотором отношении дополнительную к теореме Гельфонда. Мою теорему можно прочесть так: числа вида ω^α, где ω — алгебраическое число, α — вещественная квадратичная иррациональность, трансцендентны.

Например, по этой теореме $2^{\sqrt{2}}$ трансцендентно. Интересно отметить, что о столь просто определенном числе до сих пор не было известно даже меньшее — рационально ли оно. Вопрос об его иррациональности был когда-то предложен в «Nouvelles Annales Mathématiques», но до сих пор не был решен, как это отмечено, например, в докладе А. Я. Хинчина на Московском съезде математиков РСФСР.

Содержащийся в § 3 и имеющий в данной работе вспомогательное значение результат не лишен самостоятельного интереса. Он может быть легко обобщен и несколько уточнен.

Метод, которым я пользуюсь, в основе своей близок к методу А. О. Гельфонда (последний впрочем в полном виде неизвестен мне, так как полное его изложение находится в японских журналах, оставшихся мне недоступными). В некоторых отношениях мой метод проще и элементарнее. В частности я обхожусь без теории функций комплексного переменного.

§ **1.** Пусть D — целое положительное число, не делящееся на 4. Кроме того пусть $\alpha = \frac{1+\sqrt{D}}{2}$, если $D \equiv 1 \pmod 4$ и $\alpha = \sqrt{D}$ в остальных случаях. При этом D неравно точному квадрату.

Целые числа $x + \alpha y$ квадратичной области $(1, \alpha)$ будем изображать точками (x, y) с целыми координатами. Числа идеала (a) данной квадратичной области будут тогда изображаться точками параллелограматической сети, у которой площадь основного параллелограма будет равна норме идеала $N(a)$.

Рассмотрим область S с площадью, которую будем обозначать S, ограниченную контуром длиной l. При этом будем считать, что площадь S увеличивается беспредельно, а форма области если и изменяется, то так, что отношение величины l к величине $\sqrt{S}$ не превосходит некоторой постоянной C. В случае, если форма площади не изменяется, сказанное условие выполняется само собой.

Определим сколько точек сети идеала (a) лежит внутри площади S. К основному параллелограму сети отнесем одну вершину. Так как все остальные основные параллелограмы получаются у данной сетки параллельным перенесением, то каждому из них тем самым будет отнесена одна из его вершин. Ясно, что таким образом каждой точке будет соответствовать один параллелограм. Пусть n_1 число таких параллелограмов, которые целиком лежат внутри S, n_2 — число таких параллелограмов, которые с областью S имеют хотя бы одну общую точку, n — число точек сети, лежащих внутри S.

Тогда очевидны неравенства

$$n_1 N(a) \leqq S < n_2 N(a).$$

Ясно также, что число n заключено между числами n_1 и n_2. Отсюда вытекает равенство

$$n = \frac{S}{N(a)} + \theta(n_2 - n_1); \qquad 0 \leqq \theta < 1.$$

Число $n_2 - n_1$ равно числу различных параллелограмов, по которым проходит контур, длиной l. Из геометрических соображений ясно, что у каждых пяти параллелограмов один из них удален от ближайшей точки некоторого другого из них не меньше, чем на μ — наименьшую из высот параллелограма. Поэтому часть контура l, заключенная между той точкой, где он входит в первый из пяти параллелограмов, и той, где он окончательно покидает последний из пяти, по длине должна быть больше, чем число μ. Отсюда следует неравенство

$$n_2 - n_1 < \frac{5l}{\mu}.$$

В связи со сказанным раньше, находим

$$n = \frac{S}{N(a)} + \frac{5\theta C\sqrt{S}}{\mu}.$$

Основной параллелограм выберем так. Первую вершину его O возьмем в начале координат. Другую поместим в ближайшей к O из всех остальных точек сети идеала (a). Если ближайших точек несколько, то возьмем одну из них. Полученную точку назовем A. На прямой OA будет находиться бесчисленное множество точек идеала (a) на расстоянии $h = OA$. Остальные точки будут расположены на прямых, параллельных с OA и удаленных друг от друга на расстояние $\frac{N(a)}{h}$. Через точку O проведем прямую перпендикулярную отрезку OA. На параллели, ближайшей OA, найдется одна из точек идеала (a), удаленная от проведенного перпендикуляра не более, чем на $\frac{h}{2}$. Иногда таких точек будет две. Эта точка, или одна из таких точек — назовем ее B — должна быть принята за третью вершину параллелограма, у которого таким образом двумя сторонами будут векторы OA и OB. Пусть $OB = h$. Очевидно, что $\sin(h, h_1) > \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Называя высоты параллелограма $б$ и $б_1$, причем $б < б_1$, находим

$$бб_1 = N(a)\sin\varphi > N(a)\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Из того обстоятельства, что одновременно с числом $A = x + \alpha y$ к идеалу (a) принадлежит также и число $A\alpha$, равное $x\alpha + \alpha^2 y$, и не лежащее на прямой OA, вытекает неравенство $б_1 < бD$. Отсюда следует, что величина $\mu^2 D$ больше чем $N(a)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot$

Для величины n это дает такое равенство:

$$n=\frac{S}{N(a)}+O\left(\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{N(a)}}\right)\cdot$$

§ **2.** Составим произведение Πz_k всех чисел $z_k = x + \alpha y$, изображаемых целыми точками площади S.

Определим в какой степени входит простой идеал (a) в разложении числа Πz_k на идеальные множители. Эту степень можно определить так: сосчитаем сколько чисел идеала (a) принадлежит площади S, потом решим такой же вопрос относительно идеалов $(a)^2$, $(a)^3$, ... Таким образом получится только конечное число чисел, отличных от нуля. Ясно, что искомая степень будет суммой полученных чисел.

Применяя окончательную формулу § 1 и обозначая искомую степень через $n(a)$, находим

$$n(a)=\sum_{\nu}\frac{1}{N^{\nu}(a)}+C\sqrt{S}\sum_{\nu}\frac{1}{\sqrt{N^{\nu}(a)}}\cdot$$

При этом суммирование распространяется на все те значения ν, при которых в идеале $(a)^{\nu}$ находится хотя бы одно отличное от нуля число, изображаемое точкой области S. Величина C по абсолютному значению не превосходит некоторой постоянной τ, не зависящей от выбора идеала (a) и от величины площади S.

§ **3.** Полученный результат позволяет обобщить некоторые результаты Чебышева и Мертенса на комплексные целые числа. Будем исходить из тождества: $\Pi N(z_k) = \Pi N(a)^{n(a)}$. Отсюда находим

$$\sum_{k}\lg|N(z_k)|=\sum_{a}n(a)\lg N(a).$$

Применяя формулу § 2, последнее можно переписать так:

$$\sum_{k}\lg|N(z_k)|=S\sum_{a,\nu}\frac{\lg N(a)}{N^{\nu}(a)}+O\left(\sqrt{S}\sum\frac{\lg N}{\sqrt{N^{\nu}(a)}}\right)\cdot$$

Для изучения правой части равенства обозначим величину $\sum \frac{\lg N(a)}{N^{\nu}(a)}$ через σ. Применяя неравенство Коши-Шварца, находим

$$\left(\sum \frac{\lg N(a)}{\sqrt{N^{\nu}(a)}}\right)^2 < \sum \lg N(a) \cdot \sum \frac{\lg N(a)}{N^{\nu}(a)} = \sum \lg N(a) \cdot \sigma.$$

Величина $\sum\limits_{a,\,\nu} \lg N(a)$ распадается на ряд сумм $\sum\limits_{a} \lg N(a)$, распространенных на все $(a)^{\nu}$, имеющие хотя бы одну точку в S. Каждая из таких сумм может быть переписана в виде

$$\sum \nu(p) \lg p,$$

где $\nu(p) = 1$ или 2, смотря по тому, распадается число p на идеальные множители или нет.

Поэтому

$$\sum_{a} \lg N(a) < 2 \sum \lg p.$$

При этом если p не разлагается на идеальные множители, то должно соблюдаться неравенство $p < l$.

Если же p разлагается на идеальные множители, тогда $p = N(\rho)$. Причем в идеале (ρ) должно содержаться число отличное от нуля и представляемое точкой в S, расстояние которой от начала координат должно быть меньше, чем l. С другой стороны расстояние между ближайшими точками идеала больше, чем величина μ, упомянутая в § 1. Поэтому

$$l > \mu > \sqrt{N(\rho)\frac{\sqrt{3}}{2}};$$

отсюда

$$p < \frac{2l^2}{\sqrt{3}}.$$

В обоих случаях величина p не должна превосходить некоторой постоянной C, умноженной на величину S.

Поэтому первая из сумм

$$\sum_{a} \lg N(a),$$

распространенная на все (a), имеющие хотя одну точку в S, будучи не больше, чем величина

$$2 \sum_{p<CS} \lg p,$$

по известной теореме из теории простых чисел не превзойдет величины $4CS$. Таким же образом величина

$$\sum_{(a)^2} \lg N(a),$$

распространенная на такие идеалы (a), квадраты которых содержат точки в S, не превзойдет величины $4C\sqrt{S}$ и т. д.

Следовательно величина

$$\sum_{a,\nu} \lg N(a)$$

есть величина порядка S.

Объединяя сказанное для величины правой части изучаемого равенства, получаем выражение

$$S\sigma + O(S\sqrt{\sigma}),$$

где

$$\sigma = \sum_{a,\nu} \frac{\lg N(a)}{N^{\nu}(a)}.$$

Для изучения величины

$$\sum_{x,y} \lg |N(x+\alpha y)|$$

воспользуемся равенством

$$\sum \lg |N(x+\alpha y)| = \sum \lg |x+\alpha y| + \sum \lg |x-\alpha y|.$$

Каждую из сумм правой части этого равенства можно изучать способом пригодным, с соответствующими изменениями и для другой.

Разобьем площадь S на три части прямыми, параллельными прямой $x-\alpha y=0$ и удаленной от нее на расстояние, равное $\sqrt{\frac{S}{\lg S}}$. При этом предполагается, что начало координат лежит внутри S, а одна из трех частей может отсутствовать, если соответствующая прямая не пересечет площади S. Назовем эти три части S_1, S_2, S_3. Пусть S_1 — площадь между проведенными прямыми. Нетрудно видеть, что

$$S_1 = O\left(\frac{S}{\sqrt{\lg S}}\right).$$

Поэтому для суммы $\sum \lg |x - \alpha y|$, распространенной на точки площади S_1, нетрудно доказать, что это величина порядка $S\sqrt{\lg S}$.

В площадях S_2 и S_3, как можно убедиться рассуждениями, подобными примененным в § 1, число точек составить величину

$$S + O\left(\frac{S}{\sqrt{\lg S}}\right).$$

Для точек этих областей величина $|x - \alpha y|$ заключена в пределах

$$\frac{\alpha\sqrt{S}}{\sqrt{\lg S}} \text{ и } C\sqrt{S},$$

где C — некоторая постоянная. Поэтому, назвав через $б$ некоторую среднюю между этими пределами, для суммы $\sum \lg |x - \alpha y|$, распространенной на точки площадей S_2 и S_3, находим

$$\sum \lg |x - \alpha y| = \left[S + O\left(\frac{S}{\sqrt{\lg S}}\right)\right] \lg б = S \lg б + O(S\sqrt{\lg S}).$$

Кроме того имеем очевидное равенство

$$\lg б = \frac{1}{2}\lg S + \lg\frac{б}{\sqrt{S}} = \frac{1}{2}\lg S + O(\lg\lg S).$$

Поэтому для величины $\sum \lg |x - \alpha y|$ находим

$$\sum \lg |x - \alpha y| = \frac{1}{2} S \lg S + O(S\sqrt{\lg S}).$$

Применив подобное же рассуждение к сумме $\sum \lg |x + \alpha y|$ для величины левой части изучаемого равенства получим

$$\sum \lg |N(z_k)| = S \lg S + O(S\sqrt{\lg S}).$$

Следовательно равенство, полученное в начале этого §, превращается в такое:

$$S \lg S + O(S\sqrt{\lg S}) = S\sigma + O(S\sqrt{\sigma}).$$

Отсюда легко получается

$$\sigma = \lg S + O(\sqrt{\lg S})$$

или в полном виде

$$\sum_{a,\nu} \frac{\lg |N(a)|}{|N^\nu(a)|} = \lg S + O(\sqrt{\lg S}).$$

Это равенство является естественным обобщением на комплексные числа известного результата, выведенного Мертенсом из чебышевской теории простых чисел

$$\sum_{p^k < x} \frac{\lg p}{p^k} = \lg x + O(1).$$

Полученное равенство можно было бы значительно обобщить и несколько уточнить. Так как однако для дальнейшего это несущественно, то в интересах простоты это опускается.

§ 4. Будем передвигать площадь S параллельным переносом так, чтобы каждая из ее целых точек $z_k = x + \alpha y$ попадала по очереди в начало координат.

Для каждого из таких положений площади S составим величину Πz_k, где произведение распространено на все точки, лежащие внутри площади S при данном ее расположении. Задачей ближайших параграфов является составление по возможности наименьшего в некотором смысле слова кратного всех чисел Πz_k, полученных указанным способом.

Для этого проведем окружность радиусом l с центром в начале координат. Очевидно, что площадь этого круга $S(l)$ будет удовлетворять неравенствам

$$S < S(l) < CS,$$

где C соответственно подобранная постоянная.

Введем в рассмотрение идеал (A), разложение которого по простым идеалам изображается выражением $\Pi(a)^\lambda$, причем произведение распространено на все идеалы, имеющие хотя одно, отличное от нуля число, внутри $S(l)$. Число λ пусть определяется формулой

$$\lambda = S\sum_{\nu}\frac{1}{N^{\nu}(a)} + \tau\sqrt{S}\sum_{\nu}\frac{1}{\sqrt{N^{\nu}(a)}} + \theta,$$

где τ наибольшая из постоянных формулы § 2, примененной ко всем указанным положениям площади S.

Величина θ правильная дробь, подобранная так, чтобы число λ получалось целым. Суммирование распространяется на все степени идеала (a), имеющие представителей в $S(l)$, не считая нуля.

Очевидно, что всякое число идеала (A), определенного таким образом, кратно всякому из чисел Πz_k, так как оно при разложении на идеальные множители содержит все множители любого из чисел Πz_k и притом в степенях не меньших.

Среди точек, принадлежащих идеалу (A), можно найти ближайшую к началу координат, но не совпадающую с ним. Соответствующее ей число назовем M.

Если $M = X + \alpha Y$, то рассуждением, подобным примененному раньше, можно показать, что справедлива оценка

$$\max(|X|, |Y|) = O(\sqrt{|N(A)|}).$$

§ **5.** Для дальнейшего важно изучить величину $|N(A)|$.

Очевидно имеем равенство

$$\lg|N(A)| = \sum_{a}\lambda\lg N(a) = S\sum_{a,\nu}\frac{\lg N(a)}{N^{\nu}(a)} + \\ + \tau\sqrt{S}\sum\frac{\lg N}{\sqrt{N^{\nu}(a)}} + \sum_{a,\nu}\theta\lg N(a).$$

На основании результатов § 3, а также ввиду того, что $S < S(l) < CS$, находим

$$\lg|N(A)| = S\lg S + O(S\sqrt{\lg S}).$$

Для числа M, введенного в § 4, получаем

$$\max(|X|, |Y|) = O(e^{\frac{1}{2}S\lg S + O(S\sqrt{\lg S})}).$$

§ **6.** Рассмотрим наконец целое число

$$\frac{M}{\Pi z_k} = \frac{M}{\Pi (x + \alpha y)},$$

которое можно переписать в таком виде

$$\frac{M \Pi (x - \alpha y)}{\Pi N(z_k)}.$$

Для величины $\Pi N(z_k)$ на основании сказанного раньше имеем оценку

$$\prod N(z_k) = e^{S \lg S + O(S \sqrt{\lg S})}.$$

Полагая $\Pi (x - \alpha y) = \xi + \alpha \eta$ для величин ξ и η, нетрудно найти оценку

$$\max (|\xi|, |\eta|) = e^{\frac{1}{2} S \lg S + O(S \sqrt{\lg S})}.$$

С помощью подобной же оценки, полученной для X и Y, полагая $M \cdot \Pi (x - \alpha y) = U + \alpha V$, находим для величин U и V

$$\max (|U|, |V|) = O(e^{S \lg S + OS \sqrt{\lg S}}).$$

Замечая, что $\frac{M \Pi (x - \alpha y)}{\Pi N(z_k)}$ есть целое алгебраическое число квадратичной области $(1, \alpha)$, находим, что числа U и V должны делиться на $\Pi N(z_k)$. В связи со сказанным находим следовательно

$$\frac{M}{\Pi z_k} = P + Q\alpha,$$

где P и Q целые рациональные числа и притом величины порядка

$$O(e^{O(S \sqrt{\lg S})}).$$

§ **7.** Пусть ω какое-нибудь вещественное алгебраическое число. Предположим, что ω^{α} тоже алгебраическое число. С помощью интерполяционной формулы Лагранжа для функции ω^z находим

$$\omega^z = \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi(z)}{z - z_k} \cdot \frac{\omega^{z_k}}{\varphi'(z_k)} + \frac{\varphi(z)}{n!} \omega^{\xi} (\lg \omega)^n.$$

При этом $\varphi(z)=(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_n)$; ξ некоторое среднее число между наибольшим и наименьшим из вещественных чисел z, z_1, $z_2,\ldots z_n$.

Вместо чисел z_1, $z_2\ldots z_n$ примем числа, определяемые формулой

$$z_k=x+\alpha y$$

и условием, что x и y независимо друг от друга пробегают систему значений

$$0,\ 1,\ 2,\ldots t,$$

где t — некоторое целое число. Будем однако считать, что x и y не могут одновременно равняться нулю.

Числу z придадим значение равное нулю, которое в целях симметрии при записи будем заменять буквой z_0.

Деля обе части формулы Лагранжа на $\varphi(z_0)$, перепишем ее так:

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\omega^{z_k}}{\prod\limits_{\lambda\neq k}(z_k-z_\lambda)}=\frac{\omega^{\xi}(\lg\omega)^n}{n!}.$$

Непосредственно ясно, что взявши вместо площади S, рассматривавшейся в предыдущих §§, квадрат с вершинами в точках $(0,\ 0)$, $(0,\ t)$, $(t,\ 0)$, $(t,\ t)$, мы можем величины

$$\prod_{\lambda\neq k}(z_k-z_\lambda)$$

принять за числа Πz_k, введенные в § 4.

Пусть ω и ω^α дробные алгебраические числа со знаменателем q, т. е. предположим, что $q\omega$ и $q\omega^\alpha$ — целые алгебраические числа. Умножая последнее равенство на q^{2t} и на число M, составленное применительно к данному случаю по способу, изложенному в § 4, находим

$$\sum B_{x,y}\cdot(q\omega)^x(q\omega^\alpha)^y=\frac{Mq^{2t}\omega^{\xi}(\lg\omega)^n}{n!}.$$

При этом

$$B_{x,y}=\frac{M}{\Pi(z_k-z_\lambda)}\cdot q^{2t-x-y}=O(e^{O(t^2\sqrt{\lg t})}).$$

Кроме того $B_{x,y}$, $q\omega$, $q\omega^\alpha$ — целые алгебраические числа. Величина правой части, а следовательно и левой также, отлична от нуля.

Умножим обе части найденного равенства на величины $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots \Sigma_r$, сопряженные с левой частью равенства, ни одна из которых не равна нулю, потому что и сама левая часть отлична от нуля.

Получаем таким образом равенство

$$N(\Sigma B_{x,y}\cdot(q\omega)^x(q\omega^\alpha)^y)=\frac{Mq^{2t}\omega^\xi(\lg\omega)^n}{n!}\cdot\prod_{j=1}^{j=r}\Sigma_j.$$

Здесь левая часть целое рациональное число, отличное от нуля и, следовательно, не меньшее, чем единица по абсолютной величине.

В правой части на основании изложенного имеем

$$M=O(e^{t^2\lg t+O(t^2\sqrt{\lg t})});\quad q^{2t}=e^{O(t)};\quad \omega^\xi(\lg\omega)^n=e^{O(t^2)}.$$

Кроме того для величины $n!$ с помощью формулы Стирлинга имеем

$$n!=e^{2t^2\lg t+O(t^2)}.$$

Наконец, для величин Σ_j находим

$$|\Sigma_j|=O(e^{O(t^2\sqrt{\lg t})}).$$

Объединяя все это для величины правой части равенства находим такую оценку

$$\frac{Mq^{2t}\omega^\xi(\lg\omega)^n}{n!}\cdot\prod_{j=1}^{r}\Sigma_j=\frac{O(e^{O(t^2\sqrt{\lg t})})}{e^{t^2\lg t+O(t^2)}}=O(e^{-\frac{1}{2}t^2\lg t}).$$

Ясно, что при достаточно больших значениях числа t правая часть равенства будет как угодно мала по абсолютной величине. Поэтому равенство невозможно. Полученное противоречие показывает невозможность допущения, что оба числа ω и ω^α одновременно являются алгебраическими.

§ 8. В ппредыдущем редполагалось, что ω — вещественное число. Это ограничение легко устранить.

В самом деле из условий: $\omega=p+qi$, $\omega^\alpha=P+Qi$ при вещественном α вытекает: $\overline{\omega}^\alpha=(p-qi)^\alpha=P-Qi$. Если $P+Qi$ алгебраическое число, то по известной теореме $P - Qi$ тоже алгебраическое число, а следовательно и число $P^2 + Q^2$, равное $(\omega\bar{\omega})^\alpha$, тоже алгебраическое, а это невозможно по доказанному, ввиду того, что $\omega\bar{\omega}$ вещественное алгебраическое число.

В предыдущем показано, что ω^α трансцендентно, если $\alpha = \sqrt{D}$ или

$$\frac{\sqrt{D} + 1}{2},$$

где D не кратно четырем и не равно точному квадрату.

Из полученного следует, что вообще при рациональных p и q и алгебраическом ω число $\omega^{p+q\sqrt{m}}$, где m любое целое положительное число, трансцендентно. В самом деле, если m кратно 4, то вынося из-под радикала наивысшую возможную степень четырех, получим под радикалом число не кратное четырем. При этом m не равно точному квадрату.

Очевидно также, что если бы $\omega^{p+q\sqrt{D}}$ при рациональных p и q было бы алгебраическим, то и $\omega^{u(p+q\sqrt{D})}$ тоже было бы алгебраическим, где u — общий знаменатель дробных чисел p и q.

Таким образом изложенное доказывает справедливость теоремы:

При любом алгебраическом числе ω и любой вещественной квадратичной иррациональности число ω^α трансцендентно.