В. А. Белоногов, О максимальных подгруппах. II, *Изв. вузов. Матем.*, 1962, номер 5, 3–11

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1962 МАТЕМАТИКА № 5 (30)

В. А. Белоногов

О МАКСИМАЛЬНЫХ ПОДГРУППАХ. II

II. О силовских максимальных подгруппах конечной группы

В этой части изучаются конечные группы, имеющие максимальные подгруппы среди силовских, то есть конечные группы с силовскими максимальными подгруппами. Дадим вначале одно достаточное условие для максимальности силовской подгруппы в конечной группе.

Теорема 5. *Пусть $\mathfrak{G}$ — группа порядка $p^\alpha n$ и $\mathfrak{P}$ — ее силовская подгруппа порядка p^α. Если ни один собственный делитель числа n не сравним с единицей по модулю p и $\mathfrak{P}$ не инвариантна в $\mathfrak{G}$, то $\mathfrak{P}$ является максимальной подгруппой группы $\mathfrak{G}$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{P}$ не максимальна в $\mathfrak{G}$, то есть $\mathfrak{P}$ содержится в подгруппе $\mathfrak{H}$ порядка $p^\alpha m$, где m — некоторый собственный делитель числа n (то есть $m \neq 1$ и $m \neq n$). Возможны два случая.

1) $\mathfrak{P}$ инвариантна в $\mathfrak{H}$. Тогда $N_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{P}) \supseteq \mathfrak{H}$ и, следовательно, $o(N_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{P})) = p^\alpha s$, где $m \leqslant s < n$ (здесь $s \neq n$, в силу того, что $\mathfrak{P}$ не инвариантна в $\mathfrak{G}$). Имея в виду вторую теорему Силова, получаем $o(\langle\mathfrak{P}\rangle_{\mathfrak{G}}) = (\mathfrak{G}, N_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{P})) = \frac{p^\alpha n}{p^\alpha s} = \frac{n}{s} \equiv 1\,(p)$, что противоречит условию теоремы.

2) $\mathfrak{P}$ не инвариантна в $\mathfrak{H}$. Тогда $N_{\mathfrak{H}}(\mathfrak{P})$ есть истинная подгруппа $\mathfrak{H}$ и поэтому $o(N_{\mathfrak{H}}(\mathfrak{P})) = p^\alpha t$, где $1 \leqslant t < m$. И опять получаем $o(\langle\mathfrak{P}\rangle_{\mathfrak{H}}) = (\mathfrak{H}, N_{\mathfrak{H}}(\mathfrak{P})) = \frac{p^\alpha m}{p^\alpha t} = \frac{m}{t} \equiv 1\,(p)$ в противоречие с условием теоремы (так же, как и в случае 1); тем самым теорема доказана.

Теорема 6. *Пусть $\mathfrak{P}$ — силовская максимальная подгруппа порядка p^α группы $\mathfrak{G}$ порядка $p^\alpha n$. Если $\mathfrak{N}$ — нормальный делитель $\mathfrak{G}$, то*

либо $\mathfrak{N} \subseteq \bigcap \langle\mathfrak{P}\rangle_{\mathfrak{G}}$,

$$\text{либо}\quad o(\mathfrak{N}) = p^a n, \quad \text{где} \quad \begin{cases} 0 \leqslant a \leqslant \alpha, & \text{если } \tau(n) = 1, \\ 1 \leqslant a \leqslant \alpha, & \text{если } \tau(n) \geqslant 2. \end{cases}$$

Доказательство. В силу следствия из теоремы 4, либо $\mathfrak{N} \subseteq \bigcap \langle\mathfrak{P}\rangle_{\mathfrak{G}}$, либо $\mathfrak{N}\mathfrak{P} = \mathfrak{G}$, и, следовательно, $o(\mathfrak{N}) = p^a n$, где $0 \leqslant a \leqslant \alpha$. Остается поэтому показать, что при $\tau(n) \geqslant 2$ в $\mathfrak{G}$ не может содержаться нормальный делитель порядка n. Будем полагать, что в $\mathfrak{G}$ существует нормальный делитель $\mathfrak{N}$ порядка n. Никакая собственная подгруппа $\mathfrak{N}$ уже не может быть инвариантной в $\mathfrak{G}$, а поэтому для любой силовской подгруппы $\mathfrak{Q}$ из $\mathfrak{N}$ будет $N_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{Q}) \neq \mathfrak{G}$, но, согласно следствию 2 из леммы 1, имеем $N_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{Q})\mathfrak{N} = \mathfrak{G}$, откуда следует, что $o(N_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{Q}))$ делится на p^α, что противоречит максимальности в $\mathfrak{G}$ подгрупп порядка p^α. Теорема доказана.

Следствие. Если $\mathfrak{P}$ — силовская максимальная подгруппа порядка p^α группы $\mathfrak{G}$ порядка $p^\alpha n$, то либо $\mathfrak{G}$ имеет нормальный делитель порядка $p^{\alpha-1}n$, либо все нормальные делители $\mathfrak{G}$ заключены в $\bigcap \langle \mathfrak{P} \rangle_{\mathfrak{G}}$.

Действительно, если $\mathfrak{N}$ есть максимальный истинный нормальный делитель $\mathfrak{G}$ порядка $p^a n$, то $a = \alpha - 1$, так как фактор-группа $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ имеет порядок $p^{\alpha - a}$ и является простой, что возможно лишь при $\alpha - a = 1$. Следовательно, если в $\mathfrak{G}$ нет нормального делителя порядка $p^{\alpha-1}n$, то в ней нет и нормальных делителей порядка $p^a n$ при $a < \alpha - 1$, но тогда, согласно теореме 6, все истинные нормальные делители $\mathfrak{G}$ заключены в $\bigcap \langle \mathfrak{P} \rangle_{\mathfrak{G}}$.

Теорема 7. *Если $\mathfrak{P}$ — силовская максимальная подгруппа группы $\mathfrak{G}$ с $\tau(\mathfrak{G}) \geqslant 3$, то среди пересечений $\mathfrak{P}$ с сопряженными с ней подгруппами найдется, по крайней мере, одно не инвариантное в $\mathfrak{P}$ (следовательно, отличное от $\bigcap \langle \mathfrak{P} \rangle_{\mathfrak{G}}$).*

Доказательство. Предположим, что для любой подгруппы $\mathfrak{P}^*$ из $\langle \mathfrak{P} \rangle_{\mathfrak{G}}$ пересечение $\mathfrak{P} \cap \mathfrak{P}^*$ инвариантно в $\mathfrak{P}$, а поэтому, в силу леммы 2, для всех $\mathfrak{P}^*$ из $\langle \mathfrak{P} \rangle_{\mathfrak{G}}$, отличных от $\mathfrak{P}$, мы должны иметь $\mathfrak{P} \cap \mathfrak{P}^* = \bigcap \langle \mathfrak{P} \rangle_{\mathfrak{G}}$. Но тогда в фактор-группе $\overline{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G}/\bigcap \langle \mathfrak{P} \rangle_{\mathfrak{G}}$ силовская максимальная (следствие 1 из теоремы 1) подгруппа $\overline{\mathfrak{P}} = \mathfrak{P}/\bigcap \langle \mathfrak{P} \rangle_{\mathfrak{G}}$ будет взаимно простой с каждой из сопряженных с ней подгрупп и, кроме того, если $o(\mathfrak{G}) = p^\alpha n$, где $p^\alpha = o(\mathfrak{P})$, то $o(\overline{\mathfrak{G}}) = p^{\alpha-\delta}n$, где $p^\delta = o(\bigcap \langle \mathfrak{P} \rangle_{\mathfrak{G}})$ и $p^{\alpha-\delta} = o(\overline{\mathfrak{P}})$, а так как, по условию, $\tau(\mathfrak{G}) \geqslant 3$, то $\tau(n) \geqslant 2$, и поэтому $\overline{\mathfrak{P}}$ не инвариантна в $\overline{\mathfrak{G}}$, откуда следует, что $\overline{\mathfrak{P}} \neq 1$, а поэтому $\tau(\overline{\mathfrak{G}}) = \tau(p^{\alpha-\delta}n) \geqslant 3$ и $N_{\overline{\mathfrak{G}}}(\overline{\mathfrak{P}}) = \overline{\mathfrak{P}}$. Теперь, в силу теоремы Фробениуса ([1], стр. 112), в $\overline{\mathfrak{G}}$ содержится нормальный делитель, порядок которого равен n, что противоречит теореме 6. Тем самым теорема доказана.

Следствие 1. Пусть $\mathfrak{P}$ — силовская максимальная подгруппа группы $\mathfrak{G}$ с $\tau(\mathfrak{G}) \geqslant 3$. Тогда $\mathfrak{P}$ не может быть абелевой или гамильтоновой группой, а поэтому, если $o(\mathfrak{P}) = p^\alpha$, то $\alpha \geqslant 3$.

Действительно, согласно теореме 7, $\mathfrak{P}$ обязана иметь неинвариантные подгруппы, а поэтому не может быть абелевой или гамильтоновой группой, а так как группы порядков p и p^2 являются абелевыми, то $\alpha \geqslant 3$.

Следствие 2. Если силовские p-подгруппы группы $\mathfrak{G}$ с $\tau(\mathfrak{G}) \geqslant 3$, максимальны в $\mathfrak{G}$, то ни одна из них не может содержать коммутанта другой.

Действительно, если $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{P}^*$ — две силовские p-подгруппы группы $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{P}$ содержит коммутант $\mathfrak{P}^*$, то пересечение $\mathfrak{P} \cap \mathfrak{P}^*$ также содержит коммутант $\mathfrak{P}^*$, а поэтому инвариантно в $\mathfrak{P}^*$, и, в силу леммы 2, мы заключаем, что $\mathfrak{P} \cap \mathfrak{P}^* \subseteq \cap \langle \mathfrak{P} \rangle_{\mathfrak{G}}$. Далее, так как $\tau(\mathfrak{G}) \geqslant 3$, то $\cap \langle \mathfrak{P} \rangle_{\mathfrak{G}} \neq \mathfrak{P}$, и поэтому $\tau(\mathfrak{G}/\cap \langle \mathfrak{P} \rangle_{\mathfrak{G}}) = \tau(\mathfrak{G}) \geqslant 3$, но максимальная (следствие 1 из теоремы 1) силовская p-подгруппа $\mathfrak{P}^*/\cap \langle \mathfrak{P} \rangle_{\mathfrak{G}}$ группы $\mathfrak{G}/\cap \langle \mathfrak{P} \rangle_{\mathfrak{G}}$ является абелевой, поскольку $\mathfrak{P} \cap \mathfrak{P}^* \subseteq \cap \langle \mathfrak{P} \rangle_{\mathfrak{G}}$ содержит коммутант $\mathfrak{P}^*$, и мы получаем противоречие со следствием 1.

Определение 3 ([1], стр. 121). Группами типа A называются неспециальные группы порядка pq^{β} (p и q — простые числа), у которых силовская подгруппа порядка q^{β} — инвариантная элементарная абелева группа и $q^{\beta} \equiv 1\,(p)$, причем β — наименьшая степень числа q, удовлетворяющая сравнению такого типа.

Теорема 8. *Если в группе $\mathfrak{G}$ существуют две максимальные подгруппы $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$ взаимно простых порядков h и f, то группа $\mathfrak{G}$ простая. Исключение представляют лишь циклические группы порядка pq (p и q — различные простые числа) и группы типа A.*

Доказательство. Пусть группа $\mathfrak{G}$ не простая. Тогда в $\mathfrak{G}$ существует истинный нормальный делитель $\mathfrak{N} \neq 1$. В силу следствия из теоремы 4, возможны следующие четыре случая:

1) $\mathfrak{N} \subseteq \cap \langle \mathfrak{H} \rangle_{\mathfrak{G}}$ и $\mathfrak{N} \subseteq \cap \langle \mathfrak{F} \rangle_{\mathfrak{G}}$,

2) $\mathfrak{N} \subseteq \cap \langle \mathfrak{H} \rangle_{\mathfrak{G}}$ и $\mathfrak{N}\mathfrak{F} = \mathfrak{G}$,

3) $\mathfrak{N}\mathfrak{H} = \mathfrak{G}$ и $\mathfrak{N} \subseteq \cap \langle \mathfrak{F} \rangle_{\mathfrak{G}}$,

4) $\mathfrak{N}\mathfrak{H} = \mathfrak{G}$ и $\mathfrak{N}\mathfrak{F} = \mathfrak{G}$.

Из первого случая выводим $\mathfrak{N} \subseteq (\cap \langle \mathfrak{H} \rangle_{\mathfrak{G}}) \cap (\cap \langle \mathfrak{F} \rangle_{\mathfrak{G}})$, что невозможно, так как, в силу взаимной простоты $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$, будет $(\cap \langle \mathfrak{H} \rangle_{\mathfrak{G}}) \cap (\cap \langle \mathfrak{F} \rangle_{\mathfrak{G}}) = 1$. Во втором случае получаем $\mathfrak{H}\mathfrak{F} \supseteq \mathfrak{N}\mathfrak{F} = \mathfrak{G}$, так что $\mathfrak{H}\mathfrak{F} = \mathfrak{G}$, и, ввиду $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F} = 1$, заключаем, что $\mathfrak{N} = \mathfrak{H}$ и $o(\mathfrak{G}) = g = hf$. Так как $\mathfrak{H}$ есть инвариантная максимальная подгруппа $\mathfrak{G}$, то, согласно теореме 2, индекс $(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}) = \frac{g}{h} = f$ — простое число. Таким образом, в этом случае группа $\mathfrak{G}$ порядка $g = hf$, где f — простое число, имеет силовскую максимальную подгруппу $\mathfrak{F}$ порядка f и нормальный делитель $\mathfrak{H}$ порядка h. В силу теоремы 6, это возможно лишь при $\tau(h) = 1$; т. е. когда h — степень простого числа ($h = q^{\beta}$). Далее, в силу максимальности $\mathfrak{F}$, подгруппа $\mathfrak{H}$ порядка $h = q^{\beta}$ должна быть элементарной, а поэтому абелевой группой, а так как в $\mathfrak{G}$, очевидно, нет подгрупп составного порядка, то все ее подгруппы являются абелевыми. Если $\mathfrak{G}$ сама при этом абелева, то она обязана быть циклической группой порядка qf (так как, будучи инвариантной, подгруппа $\mathfrak{F}$ также обязана иметь простой индекс в $\mathfrak{G}$). Если же сама $\mathfrak{G}$ не является абелевой, то, по известному свойству таких групп (например [11], стр. 132), имеем $q^{\beta} \equiv 1\,(f)$ и β — наименьшее число, удовлетворяющее сравнению такого типа. Но тогда $\mathfrak{G}$ — группа типа A. В третьем случае совершенно симметрично мы приходим к тому же выводу. Четвертый же случай невозможен.

Действительно, из равенств 4) получаем $o(\mathfrak{N}) = h_1 \frac{g}{h} = f_1 \frac{g}{f}$ (где h_1 делит h, и f_1 делит f), откуда $\frac{h}{h_1} = \frac{f}{f_1}$, что возможно лишь при $h_1 = h$ и $f_1 = f$, то есть при $\mathfrak{N} = \mathfrak{G}$. Таким образом, мы показали, что, если группа $\mathfrak{G}$, имеющая две максимальные подгруппы взаимно простых порядков, не является простой, то она либо циклическая, порядка pq, где p и q — различные простые числа, либо группа типа A. Покажем теперь, что указанные группы действительно имеют две максимальные подгруппы взаимно простых порядков. Для групп порядка pq таковыми являются подгруппы порядков p и q. Если же $\mathfrak{G}$ есть группа типа A порядка pq^{β}, то ее подгруппа порядка q^{β} максимальна в $\mathfrak{G}$, так как имеет простой индекс в $\mathfrak{G}$, а силовская подгруппа порядка p максимальна в $\mathfrak{G}$, в силу теоремы 5. Теорема доказана.

Отсюда вытекает следующая несколько более общая

Теорема 9. *Для конечной группы $\mathfrak{G}$ следующие условия эквивалентны*:

1) *$\mathfrak{G}$ непростая и имеет, по крайней мере, две максимальных подгруппы, порядки которых взаимно просты*;

2) *$\mathfrak{G}$ непростая и имеет, по крайней мере, два класса силовских максимальных подгрупп*;

3) *все силовские подгруппы группы $\mathfrak{G}$ максимальны в $\mathfrak{G}$, и $\mathfrak{G}$ не имеет максимальных подгрупп кроме силовских*;

4) *все силовские подгруппы группы $\mathfrak{G}$ максимальны в ней и* $\tau(\mathfrak{G}) = 2$;

5) *группа $\mathfrak{G}$ имеет силовскую максимальную подгруппу простого порядка*;

6) *$\mathfrak{G}$ есть циклическая группа порядка pq, где p и q — различные простые числа, или группа типа A.*

Доказательство. Из условия 1) следует условие 6), в силу теоремы 8. Из условия 6), очевидно, вытекает условие 5). Если же $\mathfrak{G}$ удовлетворяет условию 5), то, согласно следствию 1 из теоремы 7, $\tau(\mathfrak{G}) = 2$, и, очевидно, для $\mathfrak{G}$ будет выполнено условие 4). Из 4) легко следует 3). А так как в случае 3) все подгруппы $\mathfrak{G}$ специальные, то ([11], стр. 127) $\mathfrak{G}$ не простая, что влечет условие 2). Из 2), очевидно, вытекает 1). Таким образом, эквивалентность условий 1), 2), 3), 4), 5) и 6) доказана.

Частными следствиями теоремы 9 являются следующие результаты.

1. Разрешимая группа не может иметь максимальных силовских подгрупп более чем двух различных порядков, и если она содержит максимальные силовские подгруппы двух различных порядков, то, по крайней мере, одна из них является инвариантной и простого индекса относительной группы [4].

2. Если каждая максимальная подгруппа группы $\mathfrak{G}$ является силовской подгруппой, то порядок $\mathfrak{G}$ делится на два и только два различных простых числа, и имеется, по крайней мере, одна инвариантная максимальная подгруппа в $\mathfrak{G}$. Если $\mathfrak{G}$ содержит более чем одну инвариантную максимальную подгруппу, то она содержит точно две таких подгруппы и является циклической группой порядка pq, где p и q — различные простые числа. Если $\mathfrak{G}$ содержит только одну инвариантную максимальную подгруппу, то последняя абелева, элементарная и простого индекса относительно $\mathfrak{G}$ [4].

3. Группы, все силовские подгруппы которых максимальные, а

порядок каждой делится только на два различных простых числа p и q, суть группы порядка pq, или pq^{β} $(\beta > 1)$, в которых силовская подгруппа порядка q^{β} есть инвариантная элементарная абелева группа, а силовские подгруппы порядка p не инвариантны [5].

Действительно, если в условии первой из этих теорем слово „разрешимая" заменить словом „непростая" (что, разумеется, лишь усилит ее), то условия этих трех теорем будут совпадать, соответственно, с условиями 1), 3) и 4) теоремы 9, в то время как утверждения их содержат описания лишь некоторых свойств групп, содержащихся в пункте 6) теоремы 9.

Из последней, с учетом следствия 1 из теоремы 7, вытекают также следующие два результата:

4. Если каждая силовская подгруппа группы $\mathfrak{G}$ является максимальной и $\mathfrak{G}$ содержит максимальную подгруппу, которая не является силовской, то она должна быть неразрешимой и каждая ее силовская подгруппа должна иметь порядок, представляющий, по крайней мере, куб простого числа [4].

5. Группой, в которой все силовские подгруппы максимальные, а порядок делится более чем на два различных простых числа, может быть лишь простая группа порядка $p^{\alpha}q^{\beta}n$, где $\alpha \geqslant 2$, $\beta \geqslant 2$ и n делится, по крайней мере, на одно простое число, отличное от p и q [5].

Действительно, прежде всего ясно, что условия этих двух теорем эквивалентны (это следует из эквивалентности условий 3) и 4) в теореме 9), а следовательно, в обоих случаях $\tau(\mathfrak{G}) \geqslant 3$, и группа $\mathfrak{G}$ содержит, по крайней мере, три класса максимальных силовских подгрупп. Но тогда эквивалентность условий 2) и 6) теоремы 9 показывает, что $\mathfrak{G}$ должна быть простой (а следовательно, неразрешимой). В силу же следствия 1 из теоремы 7, порядок группы $\mathfrak{G}$ обязан содержать каждое простое число, его делящее, по крайней мере, в кубе, что и завершает доказательство обоих утверждений.

Отметим еще одно следствие теоремы 9:

6. Если $\mathfrak{P}$ — силовская неинвариантная максимальная подгруппа порядка p^{α} группы $\mathfrak{G}$ порядка $p^{\alpha}n$, то $n \equiv 1\,(p^2)$. Исключение могут представлять лишь группы порядка $p^{\alpha}q^{\beta}$ (q — простое число), имеющие нормальный делитель порядка $p^{\alpha-1}$, фактор-группа по которому есть группа типа A.

Действительно, так как $\mathfrak{P}$ не инвариантна в $\mathfrak{G}$, то $N_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{P}) = \mathfrak{P}$ и $o(\langle\mathfrak{P}\rangle_{\mathfrak{G}}) = (\mathfrak{G},\ N_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{P})) = (\mathfrak{G},\ \mathfrak{P}) = n$, но, в силу второй теоремы Силова ([9], стр. 94), $o(\langle\mathfrak{P}\rangle_{\mathfrak{G}}) \equiv 1\,(p^{\alpha-\delta})$, где p^{δ} — порядок наибольшего из пересечений $\mathfrak{P}$ с сопряженными с ней (но отличными от нее) подгруппами, а поэтому при $\delta \leqslant \alpha - 2$ наше утверждение будет верно. Пусть теперь $\delta = \alpha - 1$, то есть существует подгруппа $\mathfrak{P}^*$ из $\langle\mathfrak{P}\rangle_{\mathfrak{G}}$ такая, что $o(\mathfrak{P} \cap \mathfrak{P}^*) = p^{\alpha-1}$. Но тогда подгруппа $\mathfrak{P} \cap \mathfrak{P}^*$ инвариантна как в $\mathfrak{P}$, так и в $\mathfrak{P}^*$, а поэтому и в $\mathfrak{G}$. Фактор-группа $\mathfrak{G}/\mathfrak{P} \cap \mathfrak{P}^*$ будет иметь силовскую неинвариантную максимальную подгруппу $\mathfrak{P}/\mathfrak{P} \cap \mathfrak{P}^*$ простого порядка p и, согласно теореме 9 (из 5) следует 6)), $\mathfrak{G}/\mathfrak{P} \cap \mathfrak{P}^*$ есть группа типа A. Но тогда $n = q^{\beta}$, где q — простое число, и $o(\mathfrak{G}) = p^{\alpha} q^{\beta}$.

Докажем теперь несколько теорем о существовании подгрупп составного порядка (или, как мы будем говорить, составных подгрупп) у конечной группы.

Лемма 3. *Пусть $\mathfrak{G}$ — группа порядка $p^\alpha n$ и ее силовские подгруппы порядка p^α максимальны, но не инвариантны в ней. Если p^δ есть наибольший из порядков попарных пересечений этих силовских подгрупп, то в группе $\mathfrak{G}$ существует истинная подгруппа $\mathfrak{H}$ порядка $p^\gamma m$, где $\gamma \geqslant \delta$ и m — некоторый отличный от единицы делитель n. Если, кроме того, $\tau(\mathfrak{G}) \geqslant 3$, то $\gamma \geqslant \delta + 1 \geqslant 2$.*

Доказательство Пусть $\mathfrak{D} = \mathfrak{P} \cap \mathfrak{P}^*$ есть пересечение двух силовских p-подгрупп $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{P}^*$, такое что $o(\mathfrak{D}) = p^\delta$. Если $\mathfrak{D}$ инвариантно в $\mathfrak{G}$, то компонируя $\mathfrak{D}$ с любой подгруппой, порядок m которой есть делитель числа n, получим подгруппу порядка $p^\delta m$. Если же $\mathfrak{D}$ не инвариантно в $\mathfrak{G}$, то, по лемме Фробениуса ([1], стр. 121), $o(N_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{D})) = p^\gamma m$, где m — некоторый отличный от единицы делитель n, причем силовская подгруппа порядка p^γ группы $N_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{D})$ не инвариантна в ней, и поэтому должно быть $\gamma \geqslant \delta + 1$. Остается заметить, что при $\tau(\mathfrak{G}) \geqslant 3$ возможен лишь второй случай, так как если бы $\mathfrak{D}$ было инвариантно в $\mathfrak{G}$, то было бы $\mathfrak{D} = \cap \langle \mathfrak{P} \rangle_{\mathfrak{G}}$, а следовательно, пересечение любых двух подгрупп класса $\langle \mathfrak{P} \rangle_{\mathfrak{G}}$ совпадало бы с $\cap \langle \mathfrak{P} \rangle_{\mathfrak{G}}$ (так как, по условию, их порядки не больше, чем порядок $\mathfrak{D}$), в противоречие с теоремой 7. Но тогда $\delta \geqslant 1$ и $\gamma \geqslant \delta + 1 \geqslant 2$. Лемма доказана.

Теорема 10. *Пусть $\mathfrak{G}$ — группа порядка $p^\alpha n$ и ее силовские подгруппы порядка p^α не инвариантны в ней. Если $n \not\equiv 1\ (p^k)$, $1 \leqslant k \leqslant \alpha$, то группа $\mathfrak{G}$ имеет истинную подгруппу, порядок которой делится на $p^{\alpha-k+1}$ и одновременно на некоторое простое число, отличное от p.*

Доказательство. Если силовская подгруппа $\mathfrak{P}$ порядка p^α не является максимальной в $\mathfrak{G}$, то теорема верна. Будем поэтому предполагать, что $\mathfrak{P}$ максимальна в $\mathfrak{G}$. Так как $\mathfrak{P}$ не инвариантна в $\mathfrak{G}$, то $N_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{P}) = \mathfrak{P}$ и $o(\langle \mathfrak{P} \rangle_{\mathfrak{G}}) = (\mathfrak{G}, N_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{P})) = (\mathfrak{G}, \mathfrak{P}) = n$. Поэтому, в силу второй теоремы Силова, имеем $o(\langle \mathfrak{P} \rangle_{\mathfrak{G}}) = n \equiv 1\ (p^{\alpha-\delta})$, где p^δ есть наибольший из порядков попарных пересечений подгрупп класса $\langle \mathfrak{P} \rangle_{\mathfrak{G}}$, причем $\alpha - \delta \geqslant 1$. Так как, по предположению, $n \not\equiv 1\ (p^k)$, то должно быть $k > \alpha - \delta$ или $\delta \geqslant \alpha - k + 1$. Но, согласно лемме 3, в $\mathfrak{G}$ существует истинная составная подгруппа, порядок которой делится на p^δ, что и завершает доказательство теоремы.

Следствие. Пусть $\mathfrak{G}$ — группа порядка $p^\alpha n$ и силовские подгруппы порядка p^α не инвариантны в ней. Если в $\mathfrak{G}$ не существует истинной составной подгруппы, порядок которой делится на $p^t\ (1 \leqslant t \leqslant \alpha)$, то $n \equiv 1\ (p^{\alpha-t+1})$.

Определение 4. Группой типа T называется группа $\mathfrak{G}$, имеющая класс $\langle \mathfrak{P} \rangle_{\mathfrak{G}}$ силовских подгрупп такой, что $1 \neq \cap \langle \mathfrak{P} \rangle_{\mathfrak{G}} \neq \mathfrak{P}$ и все нормальные делители группы $\mathfrak{G}$ заключены в $\cap \langle \mathfrak{P} \rangle_{\mathfrak{G}}$.

Теорема 11. *Пусть $\mathfrak{G}$ — конечная группа порядка $p^\alpha n$, $\alpha \geqslant 1$, p простое и не делит n $(n \neq 1)$. Если p^γ есть наивысшая из степеней числа p, делящих порядки составных подгрупп $\mathfrak{G}$, то*

1) *$\gamma = \alpha$ или $2 \leqslant \gamma < \alpha$, если группа $\mathfrak{G}$ простая,*

2) $\gamma = \alpha$ *или* $3 \leqslant \gamma < \alpha$, *если* $\mathfrak{G}$ *есть группа типа* T,

3) $\gamma = \alpha$ *или* $\mathfrak{G}$ *имеет нормальный делитель порядка* $p^{\alpha-1}n$, *если* $\mathfrak{G}$ *не простая и не типа* T *и если силовские подгруппы порядка* p^{α} *не инвариантны в ней,*

4) $\gamma = 0$ *тогда и только тогда, когда* $\mathfrak{G}$ *есть циклическая группа порядка* pq (q — *простое число, отличное от* p) *или группа типа* A.

Доказательство. Если силовские подгруппы порядка p^{α} не максимальны в $\mathfrak{G}$, то $\gamma = \alpha$ и условия 1), 2) и 3) будут выполнены. Будем поэтому считать, что подгруппы порядка p^{α} максимальны в группе $\mathfrak{G}$.

1) Если группа $\mathfrak{G}$ простая, то $\tau(\mathfrak{G}) \geqslant 3$ и, в силу леммы 3, будет $2 \leqslant \gamma < \alpha$.

2) Если $\mathfrak{G}$ — группа типа T и $\mathfrak{P}$ — ее силовская подгруппа порядка p^{α}, то непосредственно из определения групп типа T следует, что фактор-группа $\mathfrak{G}/\bigcap\langle\mathfrak{P}\rangle_{\mathfrak{G}}$ простая порядка $p^{\alpha-d}n$, где $p^d = o(\bigcap\langle\mathfrak{P}\rangle_{\mathfrak{G}})$ и $1 \leqslant d \leqslant \alpha - 1$. Согласно предыдущему случаю, в $\mathfrak{G}/\bigcap\langle\mathfrak{P}\rangle_{\mathfrak{G}}$ существует составная подгруппа $\mathfrak{H}/\bigcap\langle\mathfrak{P}\rangle_{\mathfrak{G}}$, порядок которой делится на p^{γ_1}, где $2 \leqslant \gamma_1 < \alpha - d$. Но тогда в $\mathfrak{G}$ содержится составная подгруппа $\mathfrak{H}$, порядок которой делится на p^{γ_1+d}, где $3 \leqslant \gamma_1 + d < \alpha$.

3) Пусть теперь группа $\mathfrak{G}$ не простая и не типа T, и пусть ее силовская подгруппа $\mathfrak{P}$ порядка p^{α} не инвариантна в $\mathfrak{G}$. Тогда $\mathfrak{G}$ имеет нормальный делитель порядка $p^{\alpha-1}n$, так как в противном случае, согласно следствию из теоремы 6, все нормальные делители $\mathfrak{G}$ были бы заключены в $\bigcap\langle\mathfrak{P}\rangle_{\mathfrak{G}}$, а так как $\bigcap\langle\mathfrak{P}\rangle_{\mathfrak{G}} \neq 1$ ($\mathfrak{Q}$ не простая) и $\bigcap\langle\mathfrak{P}\rangle_{\mathfrak{Q}} \neq \mathfrak{P}$ ($\mathfrak{P}$ не инвариантна в $\mathfrak{G}$), то $\mathfrak{G}$ была бы группой типа T, в противоречие с предположением.

4) Если $\gamma = 0$, то силовские подгруппы порядка p^{α} максимальны в $\mathfrak{G}$ и, в силу леммы 3, должно быть $\tau(\mathfrak{G}) = 2$. Очевидно, что при этом все силовские подгруппы максимальны в $\mathfrak{G}$ и, в силу теоремы 9 (эквивалентность условий 4) и 6)), $\mathfrak{G}$ является циклической группой порядка pq (q — простое число, отличное от p) или группой типа A. Обратное следует из эквивалентности условий 6) и 3) теоремы 9. Теорема доказана.

Ее можно рассматривать как некоторое расширение следующего утверждения, принадлежащего С. А. Чунихину ([6], Satz III):

Если порядок группы $\mathfrak{G}$ *делится на простое число* p, *но не является степенью* p, *то* $\mathfrak{G}$ *содержит, по крайней мере, одну действительную подгруппу, порядок которой делится на* p *и одновременно на некоторое другое простое число, не равное* p. *Эта подгруппа или циклическая или группа типа* A. *Единственное исключение представляют циклические группы порядка* pq (q — *простое, не равное* p) *и группы типа* A.

Сама же эта теорема составляет, как легко видеть, содержание пункта 4) теоремы 11 с добавлением того очевидного факта, что среди всех составных подгрупп группы, порядки которых деляется на p, существует наименьшая, и, следовательно, для нее $\gamma = 0$.

Замечание. Исходя из пункта 4) теоремы 11, мы можем к условиям 1) — 6) теоремы 9 добавить еще следующее эквивалентное им условие:

7) Порядок группы $\mathfrak{G}$ делится на простое число p такое, что порядок любой ее составной подгруппы на p не делится.

Признак непростоты конечной группы дает

Лемма 4. *Пусть $\mathfrak{P}$ — силовская подгруппа порядка p^α группы $\mathfrak{G}$ порядка $p^\alpha n$ $(n \neq 1)$. Если $\mathfrak{H}$ — подгруппа $\mathfrak{P}$, не лежащая в $\bigcap \langle \mathfrak{P} \rangle_{\mathfrak{G}}$, то $o(N_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{H}))$ не делится на n.*

Доказательство. Если $o(N_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{H}))$ делится на n, то, очевидно, имеет место равенство $\mathfrak{G} = N_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{H})\mathfrak{P}$ и, в силу леммы 1 (эквивалентность условий 2) и 3)), мы должны иметь $\mathfrak{H} \subseteq \bigcap \langle \mathfrak{P} \rangle_{\mathfrak{G}}$, в противоречие с предположением.

Теорема 12. *Пусть $\mathfrak{G}$ — группа порядка $p^\alpha n$, p — простое число, не делящее n. Если ни один собственный делитель числа n не сравним с единицей по модулю p, то группа $\mathfrak{G}$ непростая. А именно: или силовская подгруппа $\mathfrak{P}$ порядка p^α инвариантна в $\mathfrak{G}$, или $\mathfrak{G}$ — разрешимая группа с $\tau(\mathfrak{G}) = 2$, у которой силовские подгруппы класса $\langle \mathfrak{P} \rangle_{\mathfrak{G}}$ максимальны и пересечение любых двух подгрупп этого класса совпадает с $\bigcap \langle \mathfrak{P} \rangle_{\mathfrak{G}}$.*

Доказательство. Пусть условие теоремы выполнено. Она верна, если $\mathfrak{P}$ инвариантна в $\mathfrak{G}$. Будем поэтому предполагать, что $\mathfrak{P}$ не инвариантна в $\mathfrak{G}$. Тогда, в силу теоремы 5, $\mathfrak{P}$ максимальна в $\mathfrak{G}$. Если пересечение любых двух подгрупп класса $\langle \mathfrak{P} \rangle_{\mathfrak{G}}$ равно $\bigcap \langle \mathfrak{P} \rangle_{\mathfrak{G}}$, то, согласно теореме 7, будет $\tau(\mathfrak{G}) = 2$, и теорема опять справедлива. Поэтому будем считать, что среди попарных пересечений подгрупп из $\langle \mathfrak{P} \rangle_{\mathfrak{G}}$ есть отличные от $\bigcap \langle \mathfrak{P} \rangle_{\mathfrak{G}}$ (и поэтому не инвариантные в $\mathfrak{G}$). Среди таких пересечений возьмем то, $\mathfrak{D}$, порядок которого наибольший. Тогда, согласно лемме Фробениуса ([1], стр. 121), $N_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{D})$ есть подгруппа составного порядка $p^a m$, $1 \leqslant a < \alpha$, $(p, m) = 1$, в которой силовская p-подгруппа не инвариантна, а поэтому, согласно второй теореме Силова, некоторый отличный от единицы делитель числа m сравним с единицей по модулю p. Но так как, в силу леммы 4, $m \neq n$, то мы получили противоречие с условием. Теорема доказана.

Она накладывает ограничение на порядки простых групп.

Следствие. Если $\mathfrak{G}$ — простая группа порядка g (g не является простым числом), то для любого простого числа p, делящего g, число $\frac{g}{p^\alpha}$ (где p^α — наивысшая степень p, делящая g) имеет собственный делитель, сравнимый с единицей по модулю p.

Томский государственный университет
им. В. В. Куйбышева

Поступило
30 VII 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. С. А. Чунихин. О существовании подгрупп у конечной группы. Тр. семинара по теории групп, ГОНТИ, М.-Л., 1938.

2. O. Ore. Contributions to the theory of groups of finite order. Duke Math. J., 5, p. 431—460, 1939.

3. О. Ю. Шмидт. Группы с двумя классами неинвариантных подгрупп. Тр. семинара по теории групп, ГОНТИ, М.-Л., 1938.

4. G. A. Miller. Maximal Sylow subgroups of a given group. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 28, p. 80—83, 1942.

5. С. П. Азлецкий. Об инвариантных подгруппах среди максимальных и некоторых классах групп. Сб. статей по общетехн. вопросам Уральск. лесотехн. ин-та, стр. 3—12, Свердловск, 1949.

6. S. A. Tchounikhin. Über Gruppen mit vorgegebenen Untergruppen. Матем. сб., т. 4 (46) : 3, стр. 521—528, 1938.

7. А. Г. Курош. Теория групп. ГИТТЛ, М., 1953.

8. О. Ю. Шмидт. О бесконечных специальных группах. Матем. сб., т. 8 (50) : 3, стр. 363—375, 1940.

9. О. Ю. Шмидт. Абстрактная теория групп. ГТТИ, М.-Л., 1933.

10. K. Wielandt. Zum Satz von Sylow. Math. Z., 60, № 4, S. 407—408, 1954.

11. О. Ю. Шмидт. Группы, все подгруппы которых специальные. Тр. семинара по теории групп, ГОНТИ, М.-Л., 1938.