Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

М. А. Красносельский, Л. А. Ладыженский, Об объёме понятия u_0-вогнутого оператора,
Изв. вузов. Матем., 1959, номер 5, 112–121

https://www.mathnet.ru/ivm2825

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.81
16 января 2026 г., 03:13:53

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1959 МАТЕМАТИКА № 5 (12)

М. А. Красносельский, Л. А. Ладыженский

ОБ ОБЪЁМЕ ПОНЯТИЯ u_0-ВОГНУТОГО ОПЕРАТОРА

П. С. Урысон в статье [1] исследовал вопрос о существовании ненулевых неотрицательных решений у нелинейного интегрального уравнения

$$\int_F G[x, y, \varphi(y)]\,dy + f(x) = \lambda\varphi(x)$$

при некоторых предположениях о ядре $G(x, y, u)$, основными из которых являются предположения о положительности и убывании производной $G'_u(x, y, u)$ при возрастании u. Грубо говоря, требования П. С. Урысона заключались в предположении вогнутости по u функций $G(x, y, u)$.

Авторы, используя методы теории конусов [2] и развивая идеи статьи [3], получили [4] аналогичные результаты для абстрактных операторных уравнений со специальными положительными операторами, названными u_0-вогнутыми. В [4] показано, что результаты П. С. Урысона вытекают из общих теорем. Однако, область применимости общих результатов к исследованию уравнения П. С. Урысона оказалась более широкой. Это объясняется тем, что оператор

$$A\varphi(x) = \int_F G[x, y, \varphi(y)]\,dy \tag{1}$$

оказывается u_0-вогнутым при менее ограничительных условиях, чем условия П. С. Урысона. Эти условия u_0-вогнутости оператора (1) указываются в настоящей статье.

Излагаемые ниже предложения были установлены еще в 1955 г. Авторам приятно отметить, что эти предложения нашли применение и были дополнены И. А. Бахтиным и Я. Д. Мамедовым.

В статье используются обычные понятия теории банаховых пространств, упорядоченных при помощи некоторого конуса ([2], см. также [4]). Для обозначения соотношения упорядоченности используется обычный знак неравенства $\leqslant$. Через F всюду обозначается ограниченное замкнутое множество конечномерного эвклидова пространства.

1. Оператор A, действующий в банаховом пространстве E, полуупорядоченном при помощи конуса K, называется u_0-вогнутым, если этот оператор положителен и монотонен и если найдется такой положительный элемент u_0, что выполняются следующие два условия:

а) для любого элемента $\varphi \in K$ ($\|\varphi\| \neq 0$) найдутся такие положительные числа α и β, что

$$\alpha u_0 \leqslant A\varphi \leqslant \beta u_0; \tag{2}$$

б) для любого элемента $\varphi \in K$ такого, что $\varphi \geqslant \gamma u_0$ ($\gamma > 0$) и для

любых чисел $0 < a < b < 1$ можно указать такое положительное число η, что

$$A(t\varphi) \geqslant (1+\eta)\, tA\varphi \quad (a \leqslant t \leqslant b). \tag{3}$$

Как уже указывалось, u_0-вогнутые операторы обладают рядом важных и интересных свойств. В [4] дано достаточно полное описание структуры множества положительных собственных векторов таких операторов, а также подробно изучена совокупность собственных значений, которым соответствуют положительные собственные векторы.

2. Всюду в дальнейшем, не оговаривая этого особо, будем предполагать, что функция $G(x, y, u)$ возрастает при возрастании u и что $G(x, y, 0) \equiv 0$.

Наряду с функцией $G(x, y, u)$ нам придется рассматривать функцию

$$H(x, y, u) = \frac{1}{u} G(x, y, u).$$

Будем говорить, что функция $H(x, y, u)$ почти всюду убывает при возрастании u, если эта функция не возрастает по u и если при любом фиксированном $x \in F$ и при любых фиксированных $u_2 > u_1$ неравенство

$$H(x, y, u_1) - H(x, y, u_2) > 0 \tag{4}$$

выполняется почти при всех $y \in F$.

Пусть функция $H(x, y, u)$ почти всюду убывает при возрастании u. Тогда, как легко видеть, при любом $x \in F$ и любом $a > 0$ неравенство

$$G(x, y, u) > 0 \quad (u \geqslant a) \tag{5}$$

выполняется почти при всех $y \in F$.

Ниже используется следующее обозначение:

$$u_0 = u_0(x) \equiv 1.$$

Теорема 1. *Пусть оператор* (1) *действует в пространстве C непрерывных на F функций. Пусть функция $H(x, y, u)$ почти всюду убывает при возрастании u. Тогда оператор* (1) *будет u_0-вогнут в пространстве C относительно конуса неотрицательных функций.*

Доказательство. Пусть $\varphi(x) \in C$, $\varphi(x) \not\equiv 0$. Так как оператор (1) действует в C, то функция $A\varphi(x)$ также непрерывна и, следовательно, ограничена:

$$A\varphi(x) \leqslant \beta u_0. \tag{6}$$

Пусть функция $\varphi(x)$ принадлежит конусу K неотрицательных функций. Тогда можно указать такое $a > 0$, что множество F_1 тех $x \in F$, в которых $\varphi(x) \geqslant a$, имеет положительную меру. Тогда, в силу (5),

$$A\varphi(x) = \int_F G[x, y, \varphi(y)]\, dy \geqslant \int_{F_1} G[x, y, \varphi(y)]\, dy > 0 \quad (x \in F).$$

Это означает, что непрерывная на компакте F функция $A\varphi(x)$ положительна. Следовательно, $A\varphi(x)$ ограничена снизу положительным числом:

$$A\varphi(x) \geqslant du_0.$$

Перейдем к доказательству справедливости соотношения (3).

Зададим положительные числа γ, γ_0, a и b такие, что $\gamma<\gamma_0$ и $0<a<b<1$. Пусть t — произвольное число из сегмента $[a, b]$. Выберем целое число n так, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{\gamma_0-b\gamma}{n}<\frac{\gamma(1-b)}{2},$$

и разобьем сегмент $[b\gamma, \gamma_0]$ на n равных частей точками

$$b\gamma=\xi_0<\xi_1<\ldots<\xi_n=\gamma_0.$$

Пусть

$$u\in[\gamma, \gamma_0] \text{ и } \xi_{i-1}\leqslant bu\leqslant\xi_i.$$

Тогда, очевидно,

$$u=bu+(1-b)u\geqslant\xi_{i-1}+(1-b)\gamma>\xi_{i-1}+2\frac{\gamma_0-b\gamma}{n}=\xi_{i+1}.$$

Поэтому

$$G(x, y, tu)-tG(x, y, u)=tu[H(x, y, tu)-H(x, y, u)]\geqslant$$
$$\geqslant a\gamma[H(x, y, bu)-H(x, y, u)]=a\gamma\{[H(x, y, bu)-H(x, y, \xi_i)]+$$
$$+[H(x, y, \xi_i)-H(x, y, \xi_{i+1})]+[H(x, y, \xi_{i+1})-H(x, y, u)]\}\geqslant$$
$$\geqslant a\gamma[H(x, y, \xi_i)-H(x, y, \xi_{i+1})]$$

и в силу убывания функции $H(x, y, u)$ неравенство

$$G(x, y, tu)-tG(x, y, u)>0 \tag{7}$$

выполняется при каждом $x\in r$ для любых $t\in[a, b]$, $u\in[\gamma, \gamma_0]$ почти при всех y.

Пусть теперь $\varphi(y)$ — положительная непрерывная на F функция. Положим $\gamma=\min\varphi(y)$, $\gamma_0=\max\varphi(y)$. Из (7) вытекает, что

$$A[t\varphi(x)]-tA\varphi(x)=\int_F\{G[x, y, t\varphi(y)]-tG[x, y, \varphi(y)]\}dy>0.$$

Поэтому найдется такое $\mu>0$, что

$$A(t\varphi)-tA\varphi\geqslant\mu u_0,$$

откуда, в силу (6),

$$A(t\varphi)-tA\varphi\geqslant\frac{\mu}{\beta}A\varphi\geqslant\frac{\mu}{\beta b}tA\varphi$$

или

$$A(t\varphi)\geqslant\left(1+\frac{\mu}{\beta b}\right)tA\varphi.$$

Теорема доказана.

В условиях теоремы 1 содержится требование, чтобы оператор A действовал в пространстве C непрерывных функций. Укажем некоторые условия, при которых A действует в C.

Очевидно, оператор A действует в C, если функция $G(x, y, u)$ непрерывна по совокупности переменных. В [5] показано, что A действует в C при следующих, более общих предположениях: если для любого $a>0$

$$\int_F\sup_{|u|\leqslant a}|G(x, y, u)|dy<\infty$$

и

$$\lim_{h\to 0}\int_F \sup_{|u|\leqslant a} |G(x+h, y, u)-G(x, y, u)|\,dy=0.$$

Более того, если, кроме этого, функция $G(x, y, u)$ непрерывна по u при всех $x\in F$ и почти при всех $y\in F$, то оператор A вполне непрерывен в C.

3. Будем говорить, что $H(x, y, u)$ равномерно убывает при возрастании u, если разность $H(x, y, u_1)-H(x, y, u_2)$ при $u_1<u_2$ имеет положительный infimum по x, $y\in F$.

Аналогичными рассуждениями можно доказать следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть функция $H(x, y, u)$ равномерно убывает при возрастании u. Пусть производная $G'_u(x, y, 0)$ удовлетворяет условию*

$$\sup_x \int_F |G'_u(x, y, 0)|^{\frac{p}{p-1}}\,dy<\infty \quad (p>1).$$

Тогда оператор (1) u_0 — вогнут в пространстве L^p относительно конуса неотрицательных функций ($u_0(x)\equiv 1$)[1].

Заметим здесь же, что $H(x, y, u)$ равномерно убывает при возрастании u, если при $u\geqslant 0$ существует производная $G'_u(x, y, u)$, если $G(x, y, u)$ имеет при каждом фиксированном u положительный infimum по x, $y\in F$ и если найдется такая функция $\varphi(u)$ ($u>0$), что

$$0\leqslant\varphi(u)<1$$

и

$$\frac{uG'_u(x, y, u)}{G(x, y, u)}\leqslant\varphi(u) \quad (x, y\in F;\ u>0). \tag{8}$$

Отсюда, в частности, следует, что $H(x, y, u)$ равномерно убывает при возрастании u в условиях П. С. Урысона [1].

4. Перейдем теперь к рассмотрению условий дифференцируемости оператора Урысона [1]. Будем говорить, что оператор A ($A\theta=\theta$) дифференцируем в точке θ по конусу K, если существует такой линейный оператор P, что

$$\lim_{\|\varphi\|\to 0,\ \varphi\in K}\frac{\|A\varphi-P\varphi\|}{\|\varphi\|}=0.$$

Оператор P при этом будем называть производной Фреше по конусу. Легко видеть, что все теоремы из [4] о дифференцируемых в обычном смысле операторах остаются справедливыми в предположении, что рассматриваемые операторы дифференцируемы только по конусу.

Теорема 3. *Пусть существует производная*

$$G'_u(x, y, 0)=P(x, y).$$

Пусть операторы (1) *и* P

$$P\varphi(x)=\int_F P(x, y)\varphi(y)\,dy$$

[1] Из результатов статьи [6] вытекает, что в условиях теоремы 2 оператор A будет вполне непрерывным оператором в L^p, если только функция $G(x, y, u)$ непрерывна по u.

действуют в пространстве C. Пусть, наконец, функция $H(x, y, u)$ почти всюду убывает при возрастании u. Тогда оператор (1) *дифференцируем в нуле по конусу K неотрицательных функций пространства C, причем его производной Фреше по конусу является оператор P.*

Доказательство. Пусть $\varphi_n(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$ — последовательность непрерывных неотрицательных функций, равномерно сходящаяся к нулю. Без ограничения можно считать, что $\|\varphi_n\|$ монотонно убывают. Обозначим через F_n $(n=1, 2, \ldots)$ множество тех $x \in F$, для которых $|\varphi_n(x)| > 0$. Очевидно,

$$\frac{\|A\varphi_n - P\varphi_n\|}{\|\varphi_n\|} = \max_x \frac{\int\limits_F \{P(x, y)\varphi_n(y) - G[x, y, \varphi_n(y)]\}\,dy}{\|\varphi_n\|} =$$

$$= \max_x \frac{\int\limits_{F_n} \{P(x, y) - H[x, y, \varphi_n(y)]\}\varphi_n(y)\,dy}{\|\varphi_n\|} \leqslant$$

$$\leqslant \max_x \int\limits_{F_n} \{P(x, y) - H[x, y, \varphi_n(y)]\}\,dy.$$

В силу убывания почти всюду функции $H(x, y, u)$ следует, что

$$\frac{\|A\varphi_n - P\varphi_n\|}{\|\varphi_n\|} \leqslant \max_x \int\limits_F [P(x, y) - H(x, y, \|\varphi_n\|)]\,dy. \tag{9}$$

Функции

$$f_n(x) = Pu_0 - \frac{1}{\|\varphi_n\|} A(\|\varphi_n\| u_0) = \int\limits_F [P(x, y) - H(x, y, \|\varphi_n\|)]\,dy$$

непрерывны, так как операторы P и A действуют в C. Подынтегральные выражения при всех x и y сходятся к нулю. При каждом фиксированном x под знаком интеграла можно перейти к пределу, так как неотрицательные подынтегральные выражения монотонно убывают. Следовательно, $f_n(x)$ сходятся к нулю, монотонно убывая. В силу теоремы Дини, последовательность $f_n(x)$ сходится к нулю равномерно.

Поэтому из (9) вытекает, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|A\varphi_n - P\varphi_n\|}{\|\varphi_n\|} = 0.$$

Теорема доказана.

5. Введенное в [7] понятие асимптотической линейности оператора может быть несколько обобщено. Будем говорить, что оператор A асимптотически линеен по конусу K, если существует такой линейный оператор Q, что

$$\lim_{\|\varphi\|\to\infty,\ \varphi\in K} \frac{\|A\varphi - Q\varphi\|}{\|\varphi\|} = 0. \tag{10}$$

Мы укажем некоторые условия асимптотической линейности по конусу оператора (1).

Если функция $H(x, y, u)$ убывает при возрастании u, то существует предел

$$\lim_{u\to\infty} H(x, y, u) = Q(x, y). \tag{11}$$

Функция $Q(x, y)$ определяет интегральный оператор

$$Q\varphi(x) = \int_F Q(x, y)\varphi(y)\,dy.$$

Теорема 4. *Пусть функция $H(x, y, u)$ убывает при возрастании u; операторы* (1) *и Q действуют в C; существует производная $G'_u(x, y, 0)$, причем*

$$\int_F G'_u(x, y, 0)\,dy \leqslant m < \infty \quad (x \in F).$$

Тогда оператор A асимптотически близок по конусу неотрицательных функций пространства C к линейному оператору Q.

Доказательство. Предположим, что $\varphi_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ — последовательность непрерывных неотрицательных функций такая, для которой $\|\varphi_n\| \to \infty$. Без ограничения общности можно считать, что $\|\varphi_n\|$ монотонно возрастают.

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Обозначим через F_n множество тех $x \in F$, для которых $\varphi_n(x) \geqslant \varepsilon\|\varphi_n\|$. Тогда

$$G[x, y, \varphi_n(y)] \leqslant \varepsilon\|\varphi_n\| G'_u(x, y, 0) \quad (y \in F \setminus F_n),$$

откуда

$$\frac{\|A\varphi_n - Q\varphi_n\|}{\|\varphi_n\|} \leqslant \max_x \int_{F_n} \{H[x, y, \varphi_n(y)] - Q(x, y)\} \frac{\varphi_n(y)}{\|\varphi_n\|}\,dy +$$

$$+ \frac{1}{\|\varphi_n\|} \max_x \int_{F \setminus F_n} G[x, y, \varphi_n(y)]\,dy \leqslant$$

$$\leqslant \max_x \int_F \{H[x, y, \varepsilon\|\varphi_n\|] - Q(x, y)\}\,dy + m\varepsilon.$$

Аналогично тому, как была доказана теорема 3, можно показать, что

$$\lim_{n\to\infty} \max_x \int_F \{H[x, y, \varepsilon\|\varphi_n\|] - Q(x, y)\}\,dy = 0.$$

Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|A\varphi_n - Q\varphi_n\|}{\|\varphi_n\|} \leqslant m\varepsilon,$$

откуда, в силу произвольности ε, следует (10). Теорема доказана.

Укажем теперь условия дифференцируемости по конусу и условия асимптотической линейности по конусу для оператора (1) для случая, когда этот оператор действует в пространстве L^p $(p > 1)$.

Ниже будет использовано следующее неравенство, очевидным образом вытекающее из неравенства Гельдера:

$$\left\{\int_F \left|\int_F f(x, y)\varphi(y)\,dy\right|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant \|\varphi\|_{L^p} (\operatorname{mes} F)^{\frac{|p-q|}{pq}} \left\{ \int_F \int_F |f(x, y)|^s dxdy \right\}^{\frac{1}{s}}, \tag{12}$$

где

$$q = \frac{p}{p-1}, \quad s = \max\{p, q\}.$$

Теорема 5. *Пусть $H(x, y, u)$ убывает при возрастании u и существует производная $G'_u(x, y, 0) = P(x, y)$, причем*

$$\int_F \int_F |P(x, y)|^s dxdy < \infty, \tag{13}$$

где $s = \max\{p, q\}$.

Тогда оператор (1) имеет в нуле производную Фреше по конусу неотрицательных функций пространства L^p, причем этой производной является оператор P

$$P\varphi(x) = \int_F P(x, y)\varphi(y)\,dy.$$

Доказательство. Заметим, прежде всего, что из (13) и убывания функции $H(x, y, u)$ следует, что оператор (1) определен на неотрицательных функциях пространства L^p и множество его значений лежит в L^p. Действительно, если $\varphi(x) \in L^p$, $\varphi(x) \geqslant 0$, то в силу убывания функции $H(x, y, u)$ и неравенства (12)

$$\left\{ \int_F \left| \int_F G[x, y, \varphi(y)]\,dy \right|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant \left\{ \int_F \left| \int_F P(x, y)\varphi(y)\,dy \right|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant \|\varphi\|_{L^p} (\operatorname{mes} F)^{\frac{|p-q|}{pq}} \left\{ \int_F \int_F |P(x, y)|^s dxdy \right\}^{\frac{1}{s}} < \infty,$$

то есть $A\varphi(x) \in L^p$.

Пусть задано $\varepsilon > 0$.

В силу абсолютной непрерывности интеграла (13), можно указать такое $\delta > 0$, что для любого множества $M \subset F \times F$ из $\operatorname{mes} M < \delta$ будет следовать

$$\left\{ \int_M \int |P(x, y)|^s dxdy \right\}^{\frac{1}{s}} < \varepsilon. \tag{14}$$

На основании теоремы Егорова можно указать такое множество $M_\delta \subset F \times F$, что $\operatorname{mes}[F \times F) \setminus M_\delta] < \delta$ и на M_δ последовательность функций $nG\left(x, y, \frac{1}{n}\right) = H\left(x, y, \frac{1}{n}\right)$ сходится к $P(x, y)$ равномерно. Выберем n_0 так, чтобы при $n \geqslant n_0$ выполнялось неравенство

$$\left| nG\left(x, y, \frac{1}{n}\right) - P(x, y) \right| \leqslant \varepsilon \quad (\{x, y\} \in M_\delta). \tag{15}$$

Выберем, наконец, такое натуральное число k, что

$$n_0^{-(k-1)p} < \frac{\delta}{\operatorname{mes} F}.$$

Пусть $\varphi(x)$ — такая неотрицательная функция из L^p, что

$$\|\varphi\| \leqslant n_0^{-k}.$$

Обозначим через F_1 множество тех $x \in F$, для которых выполняется неравенство $\varphi(x) \geqslant n_0^{-1}$. Тогда

$$\frac{1}{n_0^k} \geqslant \|\varphi\| = \left\{\int_F |\varphi(x)|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} \geqslant \left\{\int_{F_1} |\varphi(x)|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} \geqslant \frac{1}{n_0} (\operatorname{mes} F_1)^{\frac{1}{p}},$$

откуда

$$\operatorname{mes} F_1 \leqslant \frac{1}{n_0^{(k-1)p}} < \frac{\delta}{\operatorname{mes} F}. \tag{16}$$

Через F_0 обозначим множество тех $x \in F$, для которых $\varphi(x) > 0$. Очевидно,

$$\frac{\|P\varphi - A\varphi\|}{\|\varphi\|} = \frac{1}{\|\varphi\|}\left\{\int_F \left|\int_{F_0} \{P(x, y) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - H[x, y, \varphi(y)]\}\varphi(y)\, dy\right|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant I_1 + I_2,$$

где

$$I_1 = \frac{1}{\|\varphi\|}\left\{\int_F \left|\int_{F_1} \{P(x, y) - H[x, y, \varphi(y)]\}\varphi(y)\, dy\right|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}$$

и

$$I_2 = \frac{1}{\|\varphi\|}\left\{\int_F \left|\int_{F_0 \setminus F_1} \{P(x, y) - H[x, y, \varphi(y)]\}\varphi(y)\, dy\right|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Оценим отдельно каждое слагаемое I_1 и I_2.

Неравенство (12) в применении к первому слагаемому дает

$$I_1 \leqslant (\operatorname{mes} F)^{\frac{|p-q|}{pq}} \left\{\int_F \int_{F_1} |P(x, y) - H[x, y, \varphi(y)]|^s dx dy\right\}^{\frac{1}{s}},$$

откуда

$$I_1 \leqslant (\operatorname{mes} F)^{\frac{|p-q|}{pq}} \left\{\int_F \int_{F_1} |P(x, y)|^s dx dy\right\}^{\frac{1}{s}}$$

и, в силу (16) и (14),

$$I_1 \leqslant \varepsilon (\operatorname{mes} F)^{\frac{|p-q|}{pq}}.$$

Введем обозначения:

$$M_1 = M_\delta \cap [F \times (F_0 \setminus F_1)], \quad M_2 = [F \times (F_0 \setminus F_1)] \setminus M_1.$$

Неравенство (12) в применении к I_2 дает

$$I_2 \leqslant (\operatorname{mes} F)^{\frac{|p-q|}{pq}} \left\{ \iint\limits_{M_1} |P(x, y) - H[x, y, \varphi(y)]|^s dxdy + \right.$$

$$\left. + \iint\limits_{M_2} |P(x, y) - H[x, y, \varphi(y)]|^s dxdy \right\}^{\frac{1}{s}}.$$

Легко видеть, что $\operatorname{mes} M_2 < \delta$. Поэтому, в силу (14),

$$\iint\limits_{M_2} |P(x, y) - H[x, y, \varphi(y)]|^s dxdy \leqslant \iint\limits_{M_2} |P(x, y)|^s dxdy \leqslant \varepsilon^s.$$

В силу (15)

$$\iint\limits_{M_1} |P(x, y) - H[x, y, \varphi(y)]|^s dxdy \leqslant$$

$$\leqslant \iint\limits_{M_1} \left| P(x, y) - n_0 G\left(x, y, \frac{1}{n_0}\right) \right|^s dxdy \leqslant \varepsilon^s (\operatorname{mes} F)^2.$$

Из последних двух оценок вытекает, что

$$I_2 \leqslant \varepsilon (\operatorname{mes} F)^{\frac{|p-q|}{pq}} [1 + (\operatorname{mes} F)^2]^{\frac{1}{s}}.$$

Таким образом, при $\|\varphi\| \leqslant n_0^{-k}$ выполняется неравенство

$$\frac{\|P\varphi - A\varphi\|}{\|\varphi\|} \leqslant \varepsilon (\operatorname{mes} F)^{\frac{|p-q|}{pq}} \{1 + [1 + (\operatorname{mes} F)^2]^{\frac{1}{s}}\}.$$

Отсюда следует

$$\lim_{\|\varphi\| \to 0,\ \varphi(x) \geqslant 0} \frac{\|P\varphi - A\varphi\|}{\|\varphi\|} = 0.$$

Теорема доказана. При помощи аналогичных рассуждений может быть доказана.

Теорема 6. *Пусть выполнены условия теоремы 5. Тогда оператор* (1) *асимптотически близок по конусу неотрицательных функций пространства* L^p *к линейному интегральному оператору* Q, *ядро которого определяется формулой* (11).

7. В качестве примера применения полученных результатов к задачам теории нелинейных интегральных уравнений приведем две теоремы, вытекающие из результатов статьи [4] (см. также [8]).

Условимся называть позитивным спектром оператора (1) совокупность таких значений λ, при которых уравнение

$$\int\limits_F G[x, y, \varphi(y)]\, dy = \lambda \varphi(x) \tag{17}$$

имеет неотрицательные решения, отличные от тождественного нуля. Так как $G(x, y, 0) \equiv 0$ и $G(x, y, u) \geqslant 0$ при $u > 0$, то все λ из позитивного спектра будут положительными числами.

Теорема 7. *Пусть при любых* $a > 0$, $x \in F$

$$\int\limits_F \sup_{|u| \leqslant a} |G(x, y, u)|\, dy < \infty$$

и

$$\lim_{h\to 0}\int_F \sup_{|u|\leqslant a} |G(x+h, y, u)-G(x, y, u)|\,dy=0.$$

Допустим, функция $G(x, y, u)$ непрерывна по u почти при всех $y\in F$ и при всех $x\in F$, а функция $H(x, y, u)$ почти всюду убывает при возрастании u. Тогда все неотрицательные непрерывные решения уравнения (17) будут положительными функциями. Позитивный спектр оператора (1) при этом полностью заполняет некоторый интервал, каждой точке которого соответствует единственное положительное решение уравнения (17).

Теорема 8. *Пусть функция $G(x, y, u)$ непрерывна по u почти при всех $\{x, y\}\in F\times F$ и удовлетворяет условиям:*

а) *функция $H(x, y, u)$ равномерно убывает при возрастании u;*

б) *производная $G'_u(x, y, 0)$ удовлетворяет неравенству*

$$\int_F |G'_u(x, y, 0)|^s dy\leqslant m<\infty,$$

где $s=\max\{p, q\}$;

в) *справедливо неравенство $H(x, y, u)\geqslant a>0$ $(x, y\in F, u>0)$.*

Тогда позитивный спектр оператора (1) образует интервал (α, β), где α и β — положительные собственные числа линейных интегральных операторов

$$P\varphi(x)=\int_F G'_u(x, y, 0)\varphi(y)\,dy,$$

$$Q\varphi(x)=\int_F \lim_{n\to\infty} H(x, y, n)\varphi(y)\,dy,$$

которым соответствуют положительные собственные функции. Каждой точке интервала (α, β) соответствует единственное положительное решение уравнения (17) из L^p. Ненулевые решения убывают при возрастании u.

Воронежский государственный университет

Поступило 10 II 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. П. С. Урысон. Тр. по топологии и др. обл. матем., Гостехиздат, М.—Л., т. 1, стр. 45—77, 1951.

2. М. Г. Крейн, М. А. Рутман. Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха. УМН, т. 3, вып. 1 (23), стр. 3—95, 1948.

3. М. А. Красносельский. Операторы с монотонной минорантой. ДАН СССР, 76, № 4, стр. 481—484, 1951.

4. М. А. Красносельский, Л. А. Ладыженский. Структура спектра положительных неоднородных операторов. Тр. М. матем. о-ва, т. 3, стр. 321—346, 1954.

5. Л. А. Ладыженский. Общие условия полной непрерывности оператора П. С. Урысона, действующего в пространстве непрерывных функций. ДАН СССР, 96, № 6, стр. 1105—1108, 1954.

6. М. А. Красносельский, Л. А. Ладыженский. Условия полной непрерывности операторов П. С. Урысона, действующих в пространствах L^p. Тр. М. матем. о-ва, т. 3, стр. 307—320, 1954.

7. М. А. Красносельский. Собственные функции нелинейных операторов, асимптотически близких к линейным. ДАН СССР, 74, № 2, стр. 177—179, 1950.

8. М. А. Красносельский. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. Гостехиздат, 1956.