А Л Г Е Б Р А и Л О Г И К А
Семинар

Том 4
Выпуск I Руководитель А.И.Мальцев 1965 г.

ГРУППЫ АВТОМОРФИЗМОВ ГРУППОВЫХ КОЛЕЦ ПРАВОУПОРЯДОЧИВАЕМЫХ ГРУПП

Д.М.Смирнов

Группа $\mathcal{G}$ называется правоупорядочиваемой, если в $\mathcal{G}$ можно определить отношение линейного порядка „$<$" ,инвариантное относительно правого умножения, т.е. $a<b$ должно влечь $ax<bx$ для любого элемента $x\in\mathcal{G}$. Понятие правоупорядочиваемой группы принадлежит М.И.Зайцевой [I] . В настоящей статье изучается группа всех автоморфизмов $\Phi(\mathcal{Z}[\mathcal{G}])$ целочисленного группового кольца $\mathcal{Z}[\mathcal{G}]$ произвольной правоупорядочиваемой группы $\mathcal{G}$. Мы показываем, что группа $\Phi(\mathcal{Z}[\mathcal{G}])$ для любой правоупорядочиваемой группы $\mathcal{G}$ изоморфна полупрямому произведению группы всех автоморфизмов $\Phi(\mathcal{G})$ группы $\mathcal{G}$ на некоторую подгруппу полного прямого произведения циклических групп второго порядка. В частности, если фактор-группа по коммутанту $\mathcal{G}/\mathcal{G}_2$ правоупорядочиваемой группы $\mathcal{G}$ является 2-полной, то имеет место изоморфизм $\Phi(\mathcal{Z}[\mathcal{G}])\cong\Phi(\mathcal{G})$. Основной в работе является следующая теорема: пусть $\mathcal{F}$ - абсолютно свободная группа произвольного ранга τ , A - нормальный делитель в $\mathcal{F}$, содержащийся в коммутанте $\mathcal{F}_2$ группы $\mathcal{F}$; если фактор-группа $\mathcal{F}/A$ правоупорядочиваема, то группа $\Phi(\mathcal{Z}[\mathcal{F}/A])$ изоморфна полупрямому произведению группы $\Phi(\mathcal{F}/A)$ на полное прямое произведение в точности τ циклических групп второго порядка. В частности, полагая в этой теореме $A=\{e\}$, получим описание группы $\Phi(\mathcal{Z}[\mathcal{F}])$ через группу всех автоморфизмов $\Phi(\mathcal{F})$ группы $\mathcal{F}$.

§ I

ТЕОРЕМА I. П у с т ь $\mathcal{R}$ - п р о и з в о л ь н о е (а с с о ц и а т и в н о е или н е а с с о ц и а т и в н о е) к о л ьцо без делителей нуля. Тогда групповая алгебра $\mathcal{R}[\mathcal{G}]$ любой правоупорядочиваемой группы $\mathcal{G}$ над кольцом $\mathcal{R}$ не содержит делителей нуля.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем какой-нибудь правый порядок в группе $\mathcal{G}$. Каждый элемент u алгебры $\mathcal{R}[\mathcal{G}]$, отличный от нуля, обладает единственной записью вида

$$u = k_1 g_1 + k_2 g_2 + \dots + k_s g_s , \tag{I}$$

где $s \geqslant 1,\ g_i \in \mathcal{G},\ k_i \in \mathcal{R},\ k_i \neq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, s)$ и

$$g_1 > g > \dots > g_s .$$

Допустим, что для некоторых элементов u, v алгебры $\mathcal{R}[\mathcal{G}]$ отличных от нуля, имеет место равенство

$$uv = 0 .$$

Запишем элемент u в виде (I) и положим:

$$u_1 = u g_1^{-1}, \quad v_1 = g_1 v .$$

Тогда $u_1 = k_1 e + k_2 a_2 + \dots + k_s a_s$, где $a_i = g_i g_1^{-1}$.
Так как $g_1 > g_2 > \dots > g_s$ и линейный порядок в множестве $\mathcal{G}$ инвариантен относительно правого умножения, то

$$e > a_2 > \dots > a_s .$$

Далее, легко проверить, что элемент $v_1 \neq 0$. Запишем элемент v_1 также в форме (I):

$$v_1 = \sum_{j=1}^{t} n_j b_j \, (t \geqslant 1,\ n_j \in \mathcal{R},\ n_j \neq 0,\ b_j \in \mathcal{G},\ b_1 > b_2 > \dots > b_t) .$$

Неравенство $e > a_i$ влечет $b_j = e b_j > a_i b_j \ (2 \leqslant i \leqslant s,\ 1 \leqslant j \leqslant t)$.
Таким образом, имеют место неравенства:

$$\left.\begin{array}{ll} b_1 > b_j & (2 \leqslant j \leqslant t) \\ b_1 > a_i b_j & (2 \leqslant i \leqslant s,\ 1 \leqslant j \leqslant t) \end{array}\right\} \tag{2}$$

Из определения элементов u_1, v_1 следует, что

$$u_1 v_1 = uv = 0 .$$

С другой стороны, элемент $u_1 v_1$ допускает следующую запись:

$$u_1 v_1 = k_1 n_1 b_1 + \sum_{j=2}^{t} k_1 n_j b_j + \sum_{j=1}^{t} \sum_{i=2}^{s} k_i n_j a_i b_j .$$

Ввиду (2), должно быть: $k_1 n_1 = 0$. Однако это противоречит условию, что в кольце $\mathcal{R}$ нет делителей нуля, так как $k_1 \neq 0$ и $n_1 \neq 0$. Теорема I доказана.

Эта теорема возникла в связи с известной проблемой И.Капланского [2]: может ли групповая алгебра $\mathcal{P}(\mathcal{G})$ группы без кручения $\mathcal{G}$ над каким-либо полем $\mathcal{P}$ содержать делители нуля? Близкий к теореме I результат был получен А.А.Бовди [3].

Дальнейшее изложение будет основываться на следующем утверждении, принадлежащем А.А.Бовди [3].

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\mathcal{R}$ - ассоциативно-коммутативное кольцо с 1 и без делителей нуля, $\mathcal{G}$ - правоупорядочиваемая группа и $\mathcal{R}[\mathcal{G}]$ - групповая алгебра группы $\mathcal{G}$ над кольцом $\mathcal{R}$. Тогда группа обратимых элементов $\mathcal{G}^*$ алгебры $\mathcal{R}[\mathcal{G}]$ имеет вид

$$\mathcal{G}^* = \mathcal{R}^* \mathcal{G},$$

где $\mathcal{R}^*$ есть группа обратимых элементов кольца $\mathcal{R}$.

Мы ограничимся даже случаем, когда $\mathcal{R} = \mathcal{Z}$ есть кольцо целых чисел. Групповая алгебра группы $\mathcal{G}$ над кольцом $\mathcal{Z}$ будет называться просто групповым кольцом и обозначаться $\mathcal{Z}[\mathcal{G}]$.

СЛЕДСТВИЕ. Группа обратимых элементов $\mathcal{G}^*$ группового кольца $\mathcal{Z}[\mathcal{G}]$ правоупорядочиваемой группы $\mathcal{G}$ разложима в прямое произведение

$$\mathcal{G}^* = \mathcal{G} \times \mathcal{P},$$

где $\mathcal{P} = \{-e\}$ - циклическая группа 2-го порядка, порожденная элементом $(-e)$.

Действительно, подгруппы $\mathcal{G}$ и $\mathcal{P}$ группы $\mathcal{G}^*$ поэлементно перестановочны, так как $g^{-1}(-e)g = -e$ для любого элемента g из $\mathcal{G}$. Далее, каждый элемент $g^* \in \mathcal{G}^*$ представим в виде $g^* = gp$, где $g \in \mathcal{G}$, $p \in \mathcal{P}$, так как по теореме 2 группа $\mathcal{G}^*$ состоит из элементов вида $\pm x$, где x - произвольный элемент группы $\mathcal{G}$. Наконец, запись $g^*=gp\,(g\in\mathcal{G}, p\in\mathcal{P})$ однозначна, так как $\mathcal{G}\cap\mathcal{P}=\{e\}$

§ 2

ЛЕММА I. Если группа $\mathcal{G}$ правоупорядочиваема, то для любого автоморфизма φ^* группы обратимых элементов $\mathcal{G}^*$ группового кольца $Z[\mathcal{G}]$ имеет место тождество

$$(-g)\varphi^*=-(g\varphi^*),$$

где g – произвольный элемент группы $\mathcal{G}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно следствию из теоремы 2, имеем: $\mathcal{G}^*=\mathcal{G}\times\mathcal{P}$, где $\mathcal{P}=\{-e\}$. По условию группа $\mathcal{G}$ – без кручения и поэтому $\mathcal{P}$ совпадает с множеством всех элементов конечного порядка группы $\mathcal{G}^*$. Таким образом, подгруппа $\mathcal{P}$ характеристична в группе $\mathcal{G}^*$, откуда элемент $(-e)\varphi^*\in\mathcal{P}$. Поскольку φ^* – автоморфизм группы $\mathcal{G}^*$, то $(-e)\varphi^*\neq e$. Следовательно, $(-e)\varphi^*=-e$, так как $\mathcal{P}$ состоит всего лишь из двух элементов e и $-e$. Пусть g – произвольный элемент из $\mathcal{G}$. Тогда

$$(-g)\varphi^*=[(-e)g]\varphi^*=(-e)\varphi^*\cdot g\varphi^*=-(g\varphi^*),$$

и лемма I доказана.

ТЕОРЕМА 3. Группа всех автоморфизмов Φ группового кольца $Z[\mathcal{G}]$ правоупорядочиваемой группы $\mathcal{G}$ изоморфна группе всех автоморфизмов Φ^* группы обратимых элементов $\mathcal{G}^*$ кольца $Z[\mathcal{G}]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Группа $\mathcal{G}^*$ инвариантна относительно любого автоморфизма φ кольца $Z[\mathcal{G}]$. Действительно, если $u\in\mathcal{G}^*$, то в кольце $Z[\mathcal{G}]$ существует такой элемент v, что $uv=vu=e$. Отсюда $(u\varphi)(v\varphi)=(v\varphi)(u\varphi)=e$, т.е. $u\varphi$ – обратимый элемент в кольце $Z[\mathcal{G}]$ и поэтому $u\varphi\in\mathcal{G}^*$.

Обозначим через φ^* автоморфизм группы $\mathcal{G}^*$, индуцированный данным автоморфизмом φ кольца $Z[\mathcal{G}]$. Отображение

$$\eta:\ \varphi\longrightarrow\varphi^*$$

является гомоморфизмом группы Φ в группу Φ^*. Ядро этого гомоморфизма состоит лишь из тождественного автоморфизма кольца $Z[\mathcal{G}]$, так как если автоморфизм φ кольца $Z[\mathcal{G}]$ тождествен на группе $\mathcal{G}^*$, то он тождествен, в частности, на ее подгруппе $\mathcal{G}$, а следовательно, и на всем кольце $Z[G]$. Нам остается доказать, что η является эпиморфизмом. Для этого достаточно показать, что всякий автоморфизм группы G^* можно продолжить до автоморфизма кольца $Z[G]$.

Итак, пусть φ^* – произвольный автоморфизм группы G^*. Для каждого элемента u кольца $Z[G]$, $u=n_1g_1+n_2g_2+\ldots+n_sg_s$ $(n_i\in Z, g_i\in G)$, полагаем:

$$u\varphi=n_1(g_1\varphi^*)+n_2(g_2\varphi^*)+\ldots+n_s(g_s\varphi^*).$$

Отображение φ будет, очевидно, эндоморфизмом кольца $Z[G]$. Легко показать, однако, что φ будет эпиэндоморфизмом. Действительно, пусть $v'\in Z[G]$, $v'=k_1h_1+k_2h_2+\ldots+k_th_t$ $(k_j\in Z, h_j\in G)$. Поскольку φ^* – автоморфизм группы G^* и $G\subset G^*$, то в G^* существуют такие элементы h_j^*, что

$$h_j=h_j^*\varphi^* \quad (i=1,2,\ldots,t).$$

По теореме 2 $h_j^*=\delta_ja_j$, где $a_j\in G$, $\delta_j=\pm1$. По лемме I получаем:

$$h_j=\delta_j(a_j\varphi^*).$$

Полагая $v=(k_1\delta_1)a_1+\ldots+(k_t\delta_t)a_t$, будем иметь $v\varphi=v'$.

Покажем, что ядро эпиморфизма φ кольца $Z[G]$ равно нулю. Пусть

$$u\varphi=n_1(g_1\varphi^*)+n_2(g_2\varphi^*)+\ldots+n_s(g_s\varphi^*)=0,$$

причем $s\geqslant1$ и $g_1,g_2,\ldots,g_s$ – различные элементы группы G. По теореме 2 $g_i\varphi^*=\delta_ib_i$, где $b_i\in G$, $\delta_i=\pm1$ $(i=1,\ldots,s)$. Покажем сначала, что $b_i\neq b_j$ при $i\neq j$. Допустим, что $b_i=b_j$ $(i\neq j)$. Так как $g_i\neq g_j$ и φ^* – автоморфизм группы G^*, то $g_i\varphi^*\neq g_j\varphi^*$. Следовательно, $\delta_i\neq\delta_j$, т.е. $\delta_j=-\delta_i$. Получаем:

$$g_j=(\delta_jb_j)\varphi^{*-1}=(-\delta_ib_i)\varphi^{*-1}=-[(\delta_ib_i)\varphi^{*-1}]=-g_i,$$

что невозможно в кольце $Z[G]$. Итак, имеем:

$$(n_1\delta_1)b_1+(n_2\delta_2)b_2+\ldots+(n_s\delta_s)b_s=0,$$

где $b_1,b_2,\ldots,b_s$ – различные элементы группы G. Следовательно, должно быть: $n_1\delta_1=n_2\delta_2=\ldots=n_s\delta_s=0$, откуда $n_1=n_2=\ldots=n_s=0$, т.е. $u=0$.

Нам остается показать, что автоморфизм φ кольца $Z[G]$ совпадает с φ^* на группе G^*. Действительно, если $g\in G$, то $g\varphi=g\varphi^*$ по определению отображения φ. По лемме I мы имеем также

$$(-g)\varphi=-(g\varphi^*)=(-g)\varphi^*.$$

Теорема 3 доказана.

ЛЕММА 2. Всякий автоморфизм φ правоупорядочиваемой группы $\mathcal{G}$ продолжаем и притом единственным способом до автоморфизма φ^* группы обратимых элементов $\mathcal{G}^*$ группового кольца $Z[\mathcal{G}]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 2 группа $\mathcal{G}$ является прямым множителем для группы $\mathcal{G}^*$: $\mathcal{G}^*=\mathcal{G}\times\mathcal{P}$, где $\mathcal{P}=\{-e\}$. Поэтому для всякого автоморфизма φ группы $\mathcal{G}$ можно построить автоморфизм φ^* группы $\mathcal{G}^*$, продолжающий φ. Для этого достаточно положить, например, $g^*\varphi^*=(g\varphi)p$ для каждого элемента $g^*=gp(g\in\mathcal{G}, p\in\mathcal{P})$. Однако в условиях леммы такое продолжение будет единственным. В самом деле, пусть ψ^* - пройзвольный автоморфизм группы $\mathcal{G}^*$, совпадающий с φ на группе $\mathcal{G}$. Тогда $g\psi^*=g\varphi=g\varphi^*$ для всякого $g\in\mathcal{G}$. По лемме I имеем также:

$$(-g)\psi^*=-(g\psi^*)=-(g\varphi^*)=(-g)\varphi^*.$$

Таким образом, $g^*\varphi^*=g^*\psi^*$ для любого элемента g^* группы $\mathcal{G}^*$, т.е. $\varphi^*=\psi^*$.

ТЕОРЕМА 4. Группа всех автоморфизмов Φ^* группы обратимых элементов $\mathcal{G}^*$ группового кольца $Z[\mathcal{G}]$ любой правоупорядочиваемой группы $\mathcal{G}$ изоморфна полупрямому произведению группы всех автоморфизмов Φ группы $\mathcal{G}$ на группу устойчивости Θ ряда

$$\mathcal{G}^*\supset\mathcal{P}\supset\{e\},$$

где $\mathcal{P}=\{-e\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как уже отмечалось, имеет место разложение $\mathcal{G}^*=\mathcal{G}\times\mathcal{P}$, причем подгруппа $\mathcal{P}$ характеристична в группе $\mathcal{G}^*$. По определению Л.А.Калужнина, группа устойчивости нормального ряда произвольной группы $\mathcal{H}$ состоит из всех автоморфизмов группы $\mathcal{H}$, которые оставляют неподвижными члены этого ряда и индуцируют тождественные автоморфизмы в его факторах. По лемме I каждый автоморфизм φ^* группы $\mathcal{G}^*$ порождает тождественный автоморфизм в подгруппе $\mathcal{P}$. Поэтому группа устойчивости Θ ряда $\mathcal{G}^*\supset\mathcal{P}\supset\{e\}$ состоит из тех и только тех автоморфизмов группы $\mathcal{G}^*$, которые порождают тождественный автоморфизм в фактор-группе $\mathcal{G}^*/\mathcal{P}$. Отсюда, в частности, следует, что Θ является нормальным делителем в группе Φ^*.

Пусть φ^* - произвольный автоморфизм группы $\mathcal{G}^*$ и ψ - естественный изоморфизм группы $\mathcal{G}$ на фактор-группу $\mathcal{G}^*/\mathcal{P}$.

Положим:

$$g\tilde{\varphi}=(\overline{g\varphi^*})\psi^{-1},$$

где $g\in\mathcal{G}$, $\bar{u}=\mathcal{P}u\ (u\in\mathcal{G}^*)$. Легко проверить, что $(gh)\tilde{\varphi}=(g\tilde{\varphi})(h\tilde{\varphi})$ для любых элементов g,h из $\mathcal{G}$. Далее, если $g\tilde{\varphi}=e$, то $g\varphi^*\in\mathcal{P}$, откуда $g\in\mathcal{P}$ и поэтому $g=e$, так как $\mathcal{G}\cap\mathcal{P}=\{e\}$. Наконец, уравнение $x\tilde{\varphi}=a$ разрешимо в $\mathcal{G}$ для любого элемента $a\in\mathcal{G}$. В самом деле, в группе $\mathcal{G}^*$ найдется такой элемент u, что $u\varphi^*=a$. Пусть $u=bp$, где $b\in\mathcal{G}$, $p\in\mathcal{P}$. Тогда $u\varphi^*=(b\varphi^*)p$, откуда $\overline{u\varphi^*}=\overline{b\varphi^*}$ и поэтому $b\tilde{\varphi}=a$. Таким образом, $\tilde{\varphi}$ является автоморфизмом группы $\mathcal{G}$. По лемме 2 существует(и притом единственный)автоморфизм $\bar{\varphi}$ группы $\mathcal{G}^*$, продолжающий автоморфизм φ группы $\mathcal{G}$. Для произвольного элемента g из $\mathcal{G}$ имеем:

$$\bar{g}\varphi^*\bar{\varphi}^{-1}=(\overline{g\varphi^*})\bar{\varphi}^{-1}=(\overline{g\tilde{\varphi}})\bar{\varphi}^{-1}=\overline{g\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}^{-1}}=\bar{g}.$$

Таким образом, автоморфизм $\varphi^*\bar{\varphi}^{-1}$ порождает тождественный автоморфизм в фактор-группе $\mathcal{G}^*/\mathcal{P}$ и поэтому принадлежит Θ. Отсюда получаем:

$$\varphi^*=\bar{\varphi}\theta\quad(\theta\in\Theta).$$

Обозначим через $\bar{\Phi}$ группу автоморфизмов группы $\mathcal{G}^*$, продолжающих автоморфизмы из Φ группы $\mathcal{G}$. Предыдущее равенство показывает, что

$$\Phi^*=\bar{\Phi}\Theta.$$

Кроме того, $\bar{\Phi}\cap\Theta=\{\varepsilon\}$, где ε – тождественный автоморфизм группы $\mathcal{G}^*$. Действительно, если $\bar{\varphi}\in(\bar{\Phi}\cap\Theta)$ и продолжает автоморфизм $\tilde{\varphi}$ группы $\mathcal{G}$, то $g\tilde{\varphi}=\overline{g\bar{\varphi}}=\bar{g}$, откуда $g^{-1}(g\tilde{\varphi})\in\mathcal{P}$. Поскольку $\mathcal{G}\cap\mathcal{P}=\{e\}$, то $g^{-1}(g\tilde{\varphi})=e$. Ввиду произвольного выбора элемента g в $\mathcal{G}$ имеем: $\tilde{\varphi}=\varepsilon$.

Итак, $\Phi^*=\bar{\Phi}\Theta$ есть полупрямое произведение групп $\bar{\Phi}$, Θ. Остается заметить лишь, что группа $\bar{\Phi}$ изоморфна группе всех автоморфизмов $\tilde{\Phi}$ группы $\mathcal{G}$. Теорема 4 доказана.

Пусть $\mathcal{G}$ – произвольная праворупорядочиваемая группа и $\mathcal{G}^*$ – группа обратимых элементов группового кольца $Z[\mathcal{G}]$ группы $\mathcal{G}$. Выберем в группе $\mathcal{G}$ произвольную систему порождающих $g_\alpha\ (\alpha\in\mathcal{J})$ и образуем полное прямое произведение $\mathcal{P}=\prod\mathcal{P}_\alpha\ (\alpha\in\mathcal{J})$ групп $\mathcal{P}_\alpha$, изоморфных группе $\mathcal{P}=\{-e\}$. Группу устойчивости Θ ряда $\mathcal{G}^*\supset\mathcal{P}\supset\{e\}$ можно вложить в группу $\mathcal{P}$ посредством отображения (см. [4]):

$$\theta\longrightarrow(g_1^{-1}(g_1\theta),g_2^{-1}(g_2\theta),\dots,g_\alpha^{-1}(g_\alpha\theta),\dots),$$

где θ - произвольный элемент группы Θ. Таким образом, из теорем 3, 4 вытекает такое

СЛЕДСТВИЕ I. Группа всех автоморфизмов Φ группового кольца $Z[\mathcal{G}]$ произвольной правоупорядочиваемой группы $\mathcal{G}$ изоморфна полупрямому произведению группы всех автоморфизмов $\tilde{\Phi}$ группы $\mathcal{G}$ на некоторую подгруппу Θ полного прямого произведения τ циклических групп второго порядка, где τ – число порождающих группы $\mathcal{G}$.

Отсюда при помощи леммы I из работы А.И.Мальцева [5] получаем

СЛЕДСТВИЕ 2. Группа всех автоморфизмов Φ группового кольца $Z[\mathcal{G}]$ конечно порожденной правоупорядочиваемой группы $\mathcal{G}$ тогда и только тогда изоморфно представима матрицами (финитно аппроксимируема), когда соответствующим свойством обладает группа всех автоморфизмов $\tilde{\Phi}$ группы $\mathcal{G}$.

Группа $\mathcal{H}$ называется 2-полной, если для любого её элемента h уравнение $x^2=h$ имеет в $\mathcal{H}$ хотя бы одно решение.

ТЕОРЕМА 5. Если фактор-группа по коммутанту $\mathcal{G}/\mathcal{G}_2$ правоупорядочиваемой группы $\mathcal{G}$ является 2-полной, то группа всех автоморфизмов Φ группового кольца $Z[\mathcal{G}]$ изоморфна группе всех автоморфизмов $\tilde{\Phi}$ группы $\mathcal{G}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Φ^* – группа всех автоморфизмов группы обратимых элементов $\mathcal{G}^*$ кольца $Z[\mathcal{G}]$. Согласно теореме 3, имеет место изоморфизм $\Phi \cong \Phi^*$. Поэтому достаточно рассмотреть лишь группу Φ^*. По теореме 4 группа Φ^* изоморфна полупрямому произведению группы $\tilde{\Phi}$ на группу устойчивости Θ ряда $\mathcal{G}^* \supset \mathcal{P} \supset \{e\}$, где $\mathcal{P}=\{-e\}$. Таким образом, нам остается показать лишь, что $\Theta=\{\varepsilon\}$.

Пусть $\mathcal{G}_2^*$, $\mathcal{G}_2$ - коммутанты групп $\mathcal{G}^*$, $\mathcal{G}$. Так как $\mathcal{G}^* = \mathcal{G} \times \mathcal{P}$, то $\mathcal{G}_2^* = \mathcal{G}_2$. Положим: $\bar{\mathcal{G}}^* = \mathcal{G}^*/\mathcal{G}_2$, $\bar{\mathcal{G}} = \mathcal{G}/\mathcal{G}_2$, $\bar{\mathcal{P}} = \mathcal{P}\mathcal{G}_2/\mathcal{G}_2$. Получим $\bar{\mathcal{G}}^* = \bar{\mathcal{G}} \times \bar{\mathcal{P}}$. Пусть $\mathcal{B}_2$ - бернсайдово многообразие групп показателя 2. Переходя к вербальным подгруппам, отвечающим этому многообразию, будем иметь:

$$\mathcal{B}_2(\bar{\mathcal{G}}^*) = \mathcal{B}_2(\bar{\mathcal{G}}) \times \mathcal{B}_2(\bar{\mathcal{P}}).$$

Поскольку $\overline{\mathcal{P}} \cong \mathcal{P} \in \mathcal{L}_2$, то $\mathcal{L}_2(\overline{\mathcal{G}^*}) = \mathcal{L}_2(\overline{\mathcal{G}})$. По условию же группа $\overline{\mathcal{G}}$ является 2-полной и поэтому порождается квадратами своих элементов, т.е. $\mathcal{L}_2(\overline{\mathcal{G}}) = \overline{\mathcal{G}}$. Таким образом, $\mathcal{L}_2(\overline{\mathcal{G}^*}) = \overline{\mathcal{G}}$. Этим, в частности, доказано, что подгруппа $\overline{\mathcal{G}}$ характеристична в группе $\overline{\mathcal{G}^*}$, а подгруппа $\mathcal{G}$ характеристична в группе $\mathcal{G}^*$.

Пусть $\theta \in \Theta$, $g^* = gp\ (g \in \mathcal{G}, p \in \mathcal{P})$. Тогда $g^*\theta = (g\theta)p$, откуда

$$g^{*-1}(g^*\theta) = g^{-1}(g\theta) \in (\mathcal{G} \cap \mathcal{P}) = \{e\}.$$

Следовательно, $g^*\theta = g^*$ для любого элемента g^* группы $\mathcal{G}^*$, т.е. $\theta = \varepsilon$

Теорема 5 доказана.

Из неё получаем, в частности, такое

СЛЕДСТВИЕ. Если правоупорядочиваемая группа $\mathcal{G}$ является 2-полной или совпадает со своим коммутантом $\mathcal{G}_2$, то группа всех автоморфизмов Φ группового кольца $Z[\mathcal{G}]$ изоморфна группе всех автоморфизмов $\tilde{\Phi}$ группы $\mathcal{G}$.

§ 3

ТЕОРЕМА 6. Пусть $\mathcal{F}$ – абсолютно свободная группа произвольного ранга τ. Если фактор-группа $\mathcal{F}/A$ по нормальному делителю A, содержащемуся в коммутанте $\mathcal{F}_2$ группы $\mathcal{F}$, правоупорядочиваема, то группа всех автоморфизмов Φ группового кольца $Z[\mathcal{F}/A]$ группы $\mathcal{F}/A$ изоморфна полупрямому произведению группы всех автоморфизмов $\tilde{\Phi}$ группы $\mathcal{F}/A$ на полное прямое произведение τ циклических групп второго порядка.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала (основной) случай, когда нормальный делитель $A = \{e\}$. Как известно, свободная группа $\mathcal{F}$ правоупорядочиваема (и даже линейно упорядочиваема [6]). В силу теорем 3,4 группа всех автоморфизмов Φ кольца $Z[\mathcal{F}]$ изоморфна полупрямому произведению $\tilde{\Phi}\Theta$ группы всех автоморфизмов $\tilde{\Phi}$ группы $\mathcal{F}$ на группу устойчивости Θ ряда $\mathcal{F}^* \supset \mathcal{P} \supset \{e\}$, где $\mathcal{F}^*$ – группа обратимых элементов кольца $Z[\mathcal{F}]$, а $\mathcal{P} = \{-e\}$. Мы должны доказать лишь, что группа Θ изоморфна полному прямому произведению в точности τ циклических групп второго порядка.

Рассмотрим множество $\mathcal{X}=\{x_\alpha, -x_\alpha\}(\alpha\in\mathcal{J})$, состоящее из неизвестных x_α, свободно порождающих группу $\mathcal{F}$, и им противоположных элементов в кольце $Z[\mathcal{F}]$. Подстановку множества $\mathcal{X}: x_\nu \to (-x_\nu), (-x_\nu)\to x_\nu, x_\alpha\to x_\alpha, (-x_\alpha)\to(-x_\alpha) (\alpha\neq\nu)$ обозначим кратко

$$\theta_\nu=(x_\nu, -x_\nu).$$

Покажем, что эта подстановка определяет (и притом единственный) автоморфизм группы $\mathcal{F}^*$.

Пусть $w^*\in\mathcal{F}^*$. Так как по теореме 2 имеет место прямое разложение $\mathcal{F}^*=\mathcal{F}\times\mathcal{P}$, то элемент w^* записывается однозначно в виде

$$w^*=wp(w\in\mathcal{F},\ p\in\mathcal{P}).$$

Элемент w обладает единственной несократимой записью через свободные порождающие $x_\alpha(\alpha\in\mathcal{J})$:

$$w=w(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_n}).$$

Положим:

$$w\theta_\nu=w(x_{\alpha_1}\theta_\nu, x_{\alpha_2}\theta_\nu, \ldots, x_{\alpha_n}\theta_\nu),\qquad w^*\theta_\nu=(w\theta_\nu)p.$$

Покажем, что отображение $w^*\to w^*\theta_\nu$ является автоморфизмом группы $\mathcal{F}^*$, который на множестве $\mathcal{X}$ будет совпадать, очевидно, с подстановкой θ_ν.

Пусть $\ell_\nu(w)$ – длина слова w относительно x_ν, т.е. число вхождений неизвестного x_ν в несократимую запись слова w. Из определения θ_ν получаем:

$$w\theta_\nu=(-1)^{\ell_\nu(w)}w$$

для всякого элемента $w\in\mathcal{F}$. Пусть

$$w_1^*=w_1p_1 \qquad (w_1\in\mathcal{F},\ p_1\in\mathcal{P}).$$

Тогда

$$(w^*w_1^*)\theta_\nu=(ww_1)\theta_\nu pp_1=(-1)^{\ell_\nu(ww_1)}ww_1pp_1.$$

Так как для любых слов w, w_1 из $\mathcal{F}$ имеет место равенство

$$(-1)^{\ell_\nu(ww_1)}=(-1)^{\ell_\nu(w)+\ell_\nu(w_1)},$$

то

$$(w^*w_1^*)\theta_\nu=(w^*\theta_\nu)(w_1^*\theta_\nu).$$

Для каждого элемента $w^*=wp(w\in\mathcal{F}, p\in\mathcal{P})$ можно указать такой элемент w_1^* из $\mathcal{F}^*$, что $w_1^*\theta_\nu=w^*$. Для этого достаточно положить $w_1^* = w\rho_1$, где $\rho_1 = \rho$, если $w\theta_\nu = w$, и $\rho_1 = -\rho$, когда $w\theta_\nu = -w$. Таким образом, отображение $w^* \to w^*\theta_\nu$ является эпиморфизмом группы $\mathcal{F}^*$. Легко проверить, однако, что ядро этого эпиморфизма равно $\{e\}$. Действительно, пусть $w^*\theta_\nu = e$. С другой стороны, имеем:

$$w^*\theta_\nu = w\left[(-1)^{\ell_\nu(w)}\rho\right].$$

Следовательно, $w = e$, $\ell_\nu(w) = 0$, $\rho = e$, откуда $w^* = e$. Итак, отображение $w^* \to w^*\theta_\nu$ является автоморфизмом группы $\mathcal{F}^*$. Заметим, что $\theta_\nu \in \Theta$ и поэтому $\theta\theta_\nu = \theta_\nu\theta$ для любого элемента $\theta \in \Theta$ так как группа Θ абелева.

Рассмотрим полное прямое произведение

$$\bar{\Theta} = \Pi\{\theta_\nu\} \qquad (\nu \in \mathcal{F})$$

τ циклических групп 2-го порядка, порожденных автоморфизмами $\theta_\nu (\nu \in \mathcal{J})$ группы $\mathcal{F}^*$. Элементы группы $\bar{\Theta}$ будем записывать кратко $(\theta_\nu^{\delta_\nu})$, где $\delta_\nu = 0$ или 1. Покажем, что $\Theta \cong \bar{\Theta}$.

Пусть $\theta \in \Theta$. Тогда для каждого $\nu \in \mathcal{J}$ имеет место равенство

$$x_\nu\theta = x_\nu\theta_\nu^{\delta_\nu},$$

где $\delta_\nu = 0$, если $x_\nu\theta = x_\nu$, и $\delta_\nu = 1$, если $x_\nu\theta = -x_\nu$. Соответствие

$$\eta: \theta \to (\theta_\nu^{\delta_\nu})$$

определяет изоморфизм группы Θ в группу $\bar{\Theta}$. Действительно, если θ' – другой элемент из Θ, причем $x_\nu\theta' = x_\nu\theta_\nu^{\delta'_\nu}$, то

$$x_\nu(\theta\theta') = (x_\nu\theta)\theta' = x_\nu\theta_\nu^{\delta_\nu}\theta' = x_\nu\theta'\theta_\nu^{\delta_\nu} = x_\nu\theta_\nu^{\delta_\nu + \delta'_\nu}.$$

Отсюда получаем:

$$(\theta\theta')\eta = (\theta_\nu^{\delta_\nu + \delta'_\nu}) = (\theta\eta)(\theta'\eta).$$

Если $\theta\eta = (\varepsilon)$, где (ε) – единичный элемент группы $\bar{\Theta}$, то для каждого $\nu \in \mathcal{J}$ будем иметь $\delta_\nu = 0$ и поэтому $x_\nu\theta = x_\nu$. Следовательно, θ будет тождественным автоморфизмом группы $\mathcal{F}^*$. Нам остается показать, что для каждого элемента $\bar{\theta} = (\theta_\nu^{\delta_\nu})$ из $\bar{\Theta}$ существует такой автоморфизм θ из Θ, для которого $\theta\eta = \bar{\theta}$.

Группа $\bar{\Theta}$ изоморфна группе тех взаимно однозначных отображений множества $\mathcal{X}$ на себя, которые оставляют инвариантным каждое его двухэлементное подмножество вида $\{x_\nu, -x_\nu\}$. Поэтому каждый элемент $\bar{\theta} = (\theta_\nu^{\delta_\nu})$ из $\bar{\Theta}$ определяет взаимно однозначное отображение множества $\mathcal{X}$ на себя, которое для каждого $\nu \in \mathcal{J}$ либо оставляет элементы x_ν ,$-x_\nu$ неподвижными, либо переводит их один в другой. Мы будем обозначать это отображение также $\bar{\theta}$. Пусть $w^*\in\mathcal{F}^*$, $w^*=wp$ $(w\in\mathcal{F}, p\in\mathcal{P})$ и $w=w(x_{\alpha_1},\ldots,x_{\alpha_n})$ - несократимая запись элемента w через свободные порождающие x_α $(\alpha\in\mathcal{I})$. Положим:

$$w\theta=w(x_{\alpha_1}\bar{\theta},\ldots,x_{\alpha_n}\bar{\theta}), \quad w^*\theta=(w\theta)p.$$

Так как $x_\nu\bar{\theta}=x_\nu\theta_\nu^{\delta_\nu}$ и подстановку θ_ν множества $\mathcal{X}$ можно продолжить, по доказанному, до автоморфизма θ_ν группы $\mathcal{F}^*$, то

$$w\theta=w(x_{\alpha_1}\theta_{\alpha_1}^{\delta_{\alpha_1}},\ldots,x_{\alpha_n}\theta_{\alpha_n}^{\delta_{\alpha_n}})=w\theta(\alpha,\delta),$$

где $\theta(\alpha,\delta)=\theta_{\alpha_1}^{\delta_{\alpha_1}}\ldots\theta_{\alpha_n}^{\delta_{\alpha_n}}$ - автоморфизм группы $\mathcal{F}^*$.Следовательно, если $w_1=w_1(x_{\alpha_1},\ldots,x_{\alpha_n})$ - другой элемент из $\mathcal{F}$, то

$$(ww_1)\theta=(ww_1)\theta(\alpha,\delta)=(w\theta)(w_1\theta).$$

Таким образом, для любых двух элементов w^*, w_1^* группы $\mathcal{F}^*$ будем иметь: $(w^*w_1^*)\theta=(w^*\theta)(w_1^*\theta)$. Так как автоморфизм $\theta(\alpha,\delta)\in\Theta$, то, полагая $x^*=wp'$, где $p'=\pm p$ в зависимости от того, будет ли элемент $w\theta(\alpha,\delta)$ равным w или $-w$, получим: $x^*\theta=(w\theta)p'=$ $=wp=w^*$. Мы доказали, таким образом, что θ есть эпиморфизм группы $\mathcal{F}^*$.

Наконец, если $w^*\theta=e$, то легко установить, что $w^*=e$. Действительно, имеем:

$$w\theta=w(x_{\alpha_1}\theta_{\alpha_1}^{\delta_{\alpha_1}},\ldots,x_{\alpha_n}\theta_{\alpha_n}^{\delta_{\alpha_n}})=(-1)^{\ell}w,$$

где

$$\ell=\ell_{\alpha_1}(w)\delta_{\alpha_1}+\ldots+\ell_{\alpha_n}(w)\delta_{\alpha_n}.$$

Равенство $w[(-1)^{\ell}p]=e$ дает: $w=e$, $\ell=0$, $p=e$, откуда $w^*=e$. Итак, θ есть автоморфизм группы $\mathcal{F}^*$, совпадающий с отображением $\bar{\theta}$ на множестве $\mathcal{X}$. Поскольку $\theta\in\Theta$, то для случая $A=\{e\}$ теорема 6 доказана.

Пусть A - произвольный нормальный делитель свободной группы $\mathcal{F}$, удовлетворяющий условиям теоремы 6, т.е. $A\subseteq\mathcal{F}_2$ и фактор-группа $\mathcal{F}/A$ правоупорядочиваема. По теореме 2 обратимые элементы кольца $\mathcal{Z}[\mathcal{F}/A]$ имеют вид $\pm Aw$, где w - произвольный элемент из $\mathcal{F}$. Следовательно, группа обратимых элементов этого кольца есть фактор-группа $\mathcal{F}^*/A$ (где $\mathcal{F}^*$ - группа обратимых элементов кольца $\mathcal{Z}[\mathcal{F}]$) . Таким образом, доказательство теоремы 6 в общем случае сводится (в силу теорем 3, 4) к рассмотрению группы устойчивости ряда

$$(\mathcal{F}^*/A)\supset(\mathcal{P}A/A)\supset\{e\}.$$

Покажем, однако, что группа устойчивости этого ряда (будем обозначать её Θ_0) изоморфна группе устойчивости Θ ряда

$$\mathcal{F}^* \supset \mathcal{P} \supset \{e\} .$$

Заметим, что каждый элемент f из $\mathcal{F}_2$ переходит в себя при любом автоморфизме θ из Θ . Действительно, элемент f записывается в виде произведения конечного числа коммутаторов элементов из $\mathcal{F}$. Однако если w_1 , $w_2 \in \mathcal{F}$, то $w_i\theta = w_i\rho_i$, где $\rho_i \in \mathcal{P}$, $i = 1,2$. Отсюда

$$(w_1, w_2)\theta = (w_1\rho_1, w_2\rho_2) = (w_1, w_2),$$

а поэтому также $f\theta = f$. Так как $A \subseteq \mathcal{F}_2$, то, в частности, $A\theta = A$ при любом $\theta \in \Theta$. Таким образом, каждый автоморфизм θ из Θ индуцирует автоморфизм θ_0 группы $\mathcal{F}^*/A$ по правилу

$$(Aw^*)\theta_0 = A(w^*\theta),$$

где w^* - произвольный элемент группы $\mathcal{F}^*$.

Отображение $\theta \to \theta_0$ будет изоморфизмом группы Θ в группу Θ_0 , так как если $A(w\theta) = Aw$ для каждого элемента $w \in \mathcal{F}$, то элемент $w^{-1}(w\theta)$ принадлежит пересечению $A \cap \mathcal{P} = \{e\}$ при любом w из $\mathcal{F}$, т.е. θ будет тождественным автоморфизмом группы $\mathcal{F}^*$. Нам остается установить лишь, что отображение $\theta \to \theta_0$ является эпиморфизмом. Пусть θ_0 - произвольный элемент из группы Θ_0. Для каждого $\nu \in \mathcal{I}$ имеем: $(Ax_\nu)\theta_0 = Ax_\nu\rho_\nu$, где $\rho_\nu \in \mathcal{P}$. Следовательно,

$$(Ax_\nu)\theta_0 = A(x_\nu\theta_\nu^{\delta_\nu}),$$

где $\delta_\nu = 0$ при $\rho_\nu = e$ и $\delta_\nu = 1$ при $\rho_\nu = -e$. По доказанному, существует автоморфизм θ группы $\mathcal{F}^*$ из Θ , определяемый отображением $\bar\theta = (\theta_\nu^{\delta_\nu})(\nu \in \mathcal{I})$ множества $\mathcal{X}$ на себя. Если $w^* \in \mathcal{F}^*$, $w^* = w\rho\,(w \in \mathcal{F}, \rho \in \mathcal{P})$, то

$$A(w^*\theta) = A(w\theta)\rho = A(w\bar\theta)\rho = (Aw)\theta_0\rho = (Aw^*)\theta_0 \;^{*)}.$$

Таким образом, автоморфизм θ группы $\mathcal{F}^*$, принадлежащий группе Θ , индуцирует в $\mathcal{F}^*/A$ заданный автоморфизм $\theta_0 \in \Theta_0$.

Теорема 6 доказана.

Содержание теоремы 6 проиллюстрируем следующим примером . Пусть $\mathcal{F}$ - абсолютно свободная группа. Следуя Ф.Холлу (см. [8]), для произвольных целых чисел $c \geqslant 2$, $d \geqslant 0$ определим

$$\mathcal{F}(c,d) = \mathcal{F}_c\,\mathcal{F}^{(d)},$$

---

*) Здесь $w(x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_n})\bar\theta = w(x_{\alpha_1}\bar\theta, \ldots, x_{\alpha_n}\bar\theta)$.

где $\mathcal{F}_c$ - c -й член нижнего центрального ряда $\mathcal{F}\supset\mathcal{F}_2\supset\mathcal{F}_3\supset\ldots$ группы $\mathcal{F}$, а $\mathcal{F}^{(d)}$ - d -й член производного ряда $\mathcal{F}\supset\mathcal{F}'\supset\mathcal{F}''\supset\ldots$ при $d>0$ и $\mathcal{F}^{(0)}=\{e\}$. Далее, определим индуктивно

$$\mathcal{F}(c_1,d_1;\ldots;c_n,d_n)=\mathcal{F}(c_1,d_1;\ldots;c_{n-1},d_{n-1})(c_n,d_n) \quad (n>1, c_i\geqslant 2, d_i\geqslant 0).$$

При $d_1=d_2=\ldots=d_n=0$ фактор-группа $\mathcal{F}/\mathcal{F}(c_1,d_1;\ldots;c_n,d_n)$ называется свободной полинильпотентной группой. Справедливо следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $\mathcal{F}$ - абсолютно свободная группа произвольного ранга τ ; $c_1,\ldots,c_n$ - целые числа, большие 1 ; $d_1,\ldots,d_n$ - неотрицательные целые числа и $n\geqslant 1$. Если фактор-группа $\mathcal{F}/A$ группы $\mathcal{F}$ по некоторому нормальному делителю A обладает нормальной системой с абелевыми факторами (т. е. является произвольной RN -группой), то группа всех автоморфизмов Φ группового кольца

$$Z[\mathcal{F}/A(c_1,d_1;\ldots;c_n,d_n)]$$

изоморфна полупрямому произведению группы всех автоморфизмов $\tilde{\Phi}$ группы $\mathcal{F}/A(c_1,d_1;\ldots;c_n,d_n)$ на полное прямое произведение τ циклических групп второго порядка.

Действительно, так как $n\geqslant 1$, $c_1\geqslant 2$, то

$$A(c_1,d_1;\ldots;c_n,d_n)\subseteq A_2\subseteq \mathcal{F}_2$$

В силу теоремы 2 из [7] группа $\mathcal{F}/A_2$ обладает нормальной системой, все факторы которой являются свободными абелевыми группами. По теореме Ф.Холла (см. [8]), фактор-группа $A_2/A(c_1,d_1;\ldots;c_n,d_n)$ допускает конечный нормальный ряд с абелевыми факторами без кручения. По теореме М.И.Зайцевой [I] фактор-группа

$$\mathcal{F}/A(c_1,d_1;\ldots;c_n,d_n)$$

правоупорядочиваема. Так как $A(c_1,d_1;\ldots;c_n,d_n)\subseteq\mathcal{F}_2$, то к группе $\mathcal{F}/A(c_1,d_1;\ldots;c_n,d_n)$ применима теорема 6.

Поступила в редакцию
8.X.1964 г.

Литература

I. Зайцева М.И. Правоупорядоченные группы, Уч. зап. Шуйск. госпедин-та, 6 (I958), 205-226.

2. Kaplansky J. Problems in the theory of rings, Publ. Nat.Acad. Sci. - Nat. Res. Council, № 502 (1957), 1-3.

3. Бовди А.А. О скрещенных произведениях полугруппы и кольца, ДАН СССР, I37, № 6 (I96I), I267-I269.

4. Смирнов Д.М. Об одном классе бесконечных групп, Уч. зап. Ивановск. госпедин-та, физ.-матем. науки, 5 (I954), 57-60.

5. Мальцев А.И. Об изоморфном представлении бесконечных групп матрицами, Матем. сб., 8 (50) (I940), 405-422.

6. Шимбирева Е.П. К теории частично упорядоченных групп, Матем. сб., 20 (62) (I947), I45-I75.

7. Смирнов Д.М. Об обобщенно разрешимых группах и их групповых кольцах, ДАН СССР, I55, № 3 (I964), 535-537.

8. Baumslag G. Wreath products and extensions, Math. Zeitschr., 81, № 4 (1963), 286-299.