Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

П. А. Вельмисов, Б. В. Логинов, Метод групповых преобразований в некоторых двухточечных граничных задачах, описывающих формы изгиба стержней,
Матем. моделирование, 1995, том 7, номер 5, 37–38

https://www.mathnet.ru/mm1703

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.9.173
23 июня 2025 г., 00:33:43

МЕТОД ГРУППОВЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ В НЕКОТОРЫХ ДВУХТОЧЕЧНЫХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧАХ, ОПИСЫВАЮЩИХ ФОРМЫ ИЗГИБА СТЕРЖНЕЙ

© *П.А. Вельмисов, Б.В. Логинов*

Ульяновский Технический Университет, Ульяновск

Предложен метод определения решений двухточечных краевых задач (КЗ) для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), описывающих изгибные формы упругих тел в задачах аэроупругости [1]. Он позволяет свести решение КЗ к задаче Коши [2,3] при различных условиях в граничных точках $x=0$, $x=\ell$.

Опишем метод на конкретном примере КЗ, соответствующем задаче о дивергенции пластины-полосы, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа и опирающейся на упругое основание с нелинейной реакцией:

$$Dy^{(4)}+Ny^{(2)}+\lambda y^{(1)}+\sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1}y^{2k+1}=0,$$
$$y''(0)=0,\quad y'''(0)=0,\quad y(\ell)=0,\quad y'(\ell)=0. \tag{1}$$

Рассмотрим вспомогательную задачу

$$L(y,\mu)\equiv Dy^{(4)}+Ny^{(2)}+\lambda y^{(1)}+\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k a_{2k+1}y^{2k+1}=0,$$
$$y''(0)=0,\quad y'''(0)=0,\quad y(\ell)=1-\mu,\quad y'(\ell)=0 \tag{2}$$

при λ, близких к первому собственному значению линейной КЗ, соответствующей (1). При $\mu=1$ (2) совпадает с (1), а при $\mu=0$ является линейной. Можно показать, что при применении группы растяжений

$$y=a^{\alpha_1}w,\qquad x=a^{\alpha_2}t \tag{*}$$

для инвариантности (2) надо принять $\alpha_2=0(x=t)$, $\mu^*=\mu a^{2\alpha_1}$. Тогда получим

$$L(w,\mu^*)=0,\quad w''(0)=0,\quad w'''(0)=0,\quad w'(\ell)=0\ . \tag{3}$$

Для выбора конкретного преобразования (*) удобно положить $y(0)=a$. Тогда $\alpha_1=1$, $w(0)=1$. Связь между задачей (3) с дополнительным условием $w(0)=1$ и вспомогательной задачей (2) определяется условием $aw(\ell,\mu^*)=1-\mu^*a^{-2}$. Получаем первое уравнение аналога уравнения разветвления (АУР) задачи (1)

$$F_1(\mu^*)=w(\ell,\mu^*)=0\ , \tag{4}$$

что означает с учетом условия $w(0)=1$ эквивалентность (1) и (2).

Повторяя прием, применяем группу растяжений

$$w=bz,\quad t=\tau \tag{**}$$

ко второй вспомогательной задаче

$$L(w,\mu^*\nu)=0,\quad w(0)=1,\quad w'(\ell)=1-\nu,\quad w''(0)=0,\quad w'''(0)=0\ . \tag{5}$$

Получаем $\nu^*=b^2\nu$, $bz'(\ell)=1-\nu^* b^{-2}$ и (μ^*,ν^*) – семейство задач Коши

$$L(z,\mu^*\nu^*)=0, \quad z(0)=(\nu^*)^{-1/2}, \quad z'(0)=1, \quad z''(0)=0, \quad z'''(0)=0, \tag{6}$$

а также второе уравнение АУР

$$F_2(\mu^*,\nu^*)=z'(\ell,\mu^*,\nu^*)=0. \tag{7}$$

Решение системы (4),(7) можно получить методом Ньютона

$$(\mu^*_{n+1},\nu^*_{n+1})=(\mu^*_n,\nu^*_n)-[F'(\mu^*_n,\nu^*_n)]^{-1}F(\mu^*_n,\nu^*_n), \quad F=(F_1,F_2) \ .$$

Матрица F' и вектор F на каждой итерации вычисляются методом Рунге-Кутта, примененным к нормальной системе, соответствующей задаче Коши (6).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пановко Я.Г.*, *Губанова И.И.* Устойчивость и колебания упругих систем. М.: Наука, 1979, 384 с.
2. *На Ц.* Вычислительные методы решения прикладных граничных задач. М.: Мир, 1982, 294 с.
3. *Азизова А.А.*, *Кузнецов А.В.*, *Логинов Б.В.* Метод групповых преобразований при расчетах форм изгиба стержней. В сб. "Краевые задачи для уравнений смешанных типов", Ташкент, "Фан", 1991, с.43-49.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОУПРУГИХ ПЛАСТИН ПРИ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

© *П.А. Вельмисов*

Ульяновский Технический Университет, Ульяновск

Исследуется устойчивость движения вязкоупругой пластины, являющейся стенкой канала, в котором протекает жидкость. Математическая постановка задачи имеет вид

$$z_{xx}+z_{yy}=0, \quad z(0,y,t)=z(x_0,y,t)=0, \quad x\in(0,x_0), \quad y\in(0,y_0),$$

$$z_y(x,0,t)=0, \quad z_y(x,y_0,t)=\bar{w}\ +2V\dot{w}'+V^2w'', \quad x\in(0,x_0)\ ,$$

$$M\bar{w}+D\left[w''''-\int_0^t R_1(\tau,t)w''''(x,\tau)d\tau\right]+Pw''+\beta_0\left[w-\int_0^t R_2(\tau,t)w(x,\tau)d\tau\right]+$$

$$+\beta_1\dot{w}+\beta_2\dot{w}''''+\beta_3\bar{w}''=-\rho z(x,y_0,t), \quad x\in(0,x_0).$$

Индексы x,y снизу обозначают производные по x,y, точка – производную по t, штрих – производную по x. Исходные функции (давление жидкости $\rho z(x,y,t)$ и