Н. Б. Ильинский, С. Р. Насыров, Задача определения подземного контура по эпюре противодавления при наличии прямолинейного водоупора,
Изв. вузов. Матем., 1984, номер 2, 34–42

4. Условие Дирихле было существенно только в двух четко выделенных местах: при получении оценки (2.7) и оценки (3.2). Отметим, что оценку (2.7) можно получить для задачи Неймана, если Ω — конус (вне компакта). Есть случаи (см. замечание 5.6), когда граничные условия не требуются для вывода (3.2). Можно поэтому думать, что возможности примененного здесь метода не исчерпаны. Он применим к эллиптическим операторам высших порядков при условиях Дирихле. Принцип предельного поглощения в таких задачах рассматривался в [10], но оценки были получены лишь для ограниченных весов, что недостаточно для наших целей.

5. Определенным методическим преимуществом является возможность связать волновыми операторами H и H_1 прямо, а не через оператор H_0. Теоремы 3.3, 4.2 о в. о. (3.6) позволяют сделать это для двух областей класса $\mathfrak{M}(a)\setminus\mathfrak{M}$, хотя указать естественные примеры трудно. Вместе с тем такой „прямой" подход может быть полезен в задачах, где для H, H_1 нет общего простого „невозмущенного" оператора H_0.

6. *Сопоставление с работой* [2]. Задача рассеяния для оператора $-\Delta+q$ решена в [2] для любых областей класса $\mathfrak{M}$ без дополнительных геометрических ограничений. Методика [2] вряд ли допускает перенесение на случай переменных старших коэффициентов и областей класса $\mathfrak{M}(a)$. На потенциал наложены существенно большие ограничения по сравнению с (2.17). Наконец, случай $m=2$ остался в [2] не исследованным (одна важная лемма о в. о. доказана лишь при $m\geqslant 3$). Метод работы [2] основан на исследовании координатной асимптотики при условиях излучения. Построена амплитуда рассеяния, с ее помощью введено и изучено обобщенное преобразование Фурье. Эти результаты имеют самостоятельное значение. Через „преобразование Фурье" явно вычисляются в. о. (6.1), полнота которых следует из теоремы разложения. В. о. вида (3.6) затем выражаются через в. о. (6.1). Вычисления в большой степени опираются на особенности рассматриваемого класса задач. Систематически используется геометрия областей класса $\mathfrak{M}$, специальный вид уравнения и граничных условий. По сравнению с [2] схема данной работы ближе к общим методам теории рассеяния.

ЛИТЕРАТУРА

12. Ильин Е. М. Принцип предельного поглощения и рассеяние на некомпактных препятствиях, I.— Изв. вузов. Матем., 1984, № 1, с. 46—55.

13. Яфаев Д. Р. Волновые операторы для уравнения Шрёдингера.— ТМФ, 1980, т. 45, № 2, с. 224—234.

14. Weder R. Scattering theory for obstacles with infinite boundaries.— Lect. Notes in Phys., 1982, v. 153, p. 158—161.

15. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 3.— М., 1982.— 443 с.

г. Ленинград

Поступила 03.12.1982

Н. Б. Ильинский, С. Р. Насыров

УДК 517.958

ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОДЗЕМНОГО КОНТУРА ПО ЭПЮРЕ ПРОТИВОДАВЛЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ПРЯМОЛИНЕЙНОГО ВОДОУПОРА

Задача построения подземного контура плотины по эпюре противодавления рассматривалась в работах [1]—[3]. При неограниченной глубине водопроницаемого слоя, а также при наличии дренирующего основания удается построить область, соответствующую области фильтрации в плоскости функции Жуковского, и методом конформных отображений исследовать существование решения.

В данной работе рассматривается случай, когда область фильтрации ограничена горизонтальным водоупором, залегающим на глубине T; при этом область в плоскости функции Жуковского построить не удается. Исследование проводится методом непрерывности Вайнштейна (см. [4], [5]); доказывается существование решения для некоторых классов эпюр. Для достаточно гладких эпюр устанавливается теорема единственности. Приводится алгоритм приближенного метода решения.

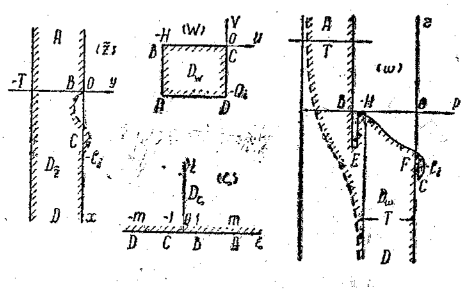

Рис. 1.

1. Будем придерживаться тех же предположений и обозначений, что и в [3]. Через $z = x + iy$ обозначим точки физической плоскости, а через $w = \varphi + i\psi$ — функцию комплексного потенциала. Введем функцию Жуковского $\omega(z) = w(z) - iz$ и обозначим $\tilde{z} = -iz$.

Будем считать, что фильтрация происходит под действием заданного напора H, причем расход равен Q. Пусть $m = \lambda^{-1}$, где λ определяется из соотношения $2Q/H = K(\sqrt{1-\lambda^2})/K(\lambda)$ ($K(\lambda)$ — полный эллиптический интеграл с модулем λ). Тогда область фильтрации $D_{\tilde{z}}$ и соответствующие ей области в плоскостях w и ω можно отобразить конформно на полуплоскость D_ζ таким образом, чтобы точки A, B, C, D перешли соответственно в точки $-m, -1, 1, m$ (см. рис. 1). Заметим, что границы областей $D_{\tilde{z}}$ и D_ω определены не полностью: в $D_{\tilde{z}}$ неизвестен участок CB, а в D_ω — участок AD.

Если точка $\omega_0 = p_0 + ir_0$ лежит на участке границы AD области D_ω, соответствующем водоупору, то $\omega_0 = w_0 + \tilde{z}_0$, где w_0 и $\tilde{z}_0$ лежат на соответствующих участках границ областей D_w и $D_{\tilde{z}}$. Значит, если в плоскости ζ точке w_0 соответствует точка ξ_0, $|\xi_0| > m$, то $\operatorname{Re}\omega_0 = \operatorname{Re}\omega(\xi_0) = \operatorname{Re} w(\xi_0) - T$, $\operatorname{Im}\omega_0 = -\operatorname{Re} z(\xi_0) - Q$. Так как функция $w(\zeta)$ нам известна, то легко определить, что $\operatorname{Re}\omega(\xi) = H(\xi, m) - H/2 - T$, $|\xi| \geqslant m$, где

$$H(\xi, m) = \frac{Hm}{2} \int\limits_{\substack{+\infty \\ (-)}}^{\xi} \frac{d\tau}{(\tau^2 - m^2)^{1/2} (\tau^2 - 1)^{1/2}} \Big/ K(1/m), \tag{1}$$

причем нижний предел в интеграле есть $+\infty$, если $\xi > 0$, и $-\infty$, если $\xi < 0$. Кроме того, т. к. $\operatorname{Re} z(\xi)$ возрастает, то $\operatorname{Im}\omega(\xi)$ убывает. Значит, участок AD в плоскости ω, соответствующий водоупору, является графиком убывающей кривой $r = r(p)$, $-(T+H) < p < -T$, причем $r(p) \to +\infty$ при $p \to -(T+H)$, $r(p) \to -\infty$ при $p \to -T$.

Как и в [3], можно показать, что остальная часть границы области D_ω определяется с точностью до двух разрезов BE и FC. В дальнейшем будем считать, что эпюра противодавления (приведенного) не возрастает, т. е. разрез FC невозможен.

Таким образом, первоначальная задача свелась к задаче определения в полуплоскости D_ζ функции $\omega(\zeta)$, отображающей ее на область D_ω, причем часть границы D_ω, соответствующая участку $|\xi| \leqslant m$, известна, а на $|\xi| > m$ задана вещественная часть $\omega(\xi)$ по формуле (1).

2. Как и в [5], для доказательства разрешимости задачи применим метод непрерывности Вайнштейна (см. [4]).

Пусть заданная эпюра есть невозрастающая $(n-1)$-звенная ломаная $p = p(x)$, причем $p(x) < H$, $0 < x \leqslant l$. Тогда в плоскости функции Жуковского соответствующая область D_ω имеет, вообще говоря, разрез BE (рис. 2).

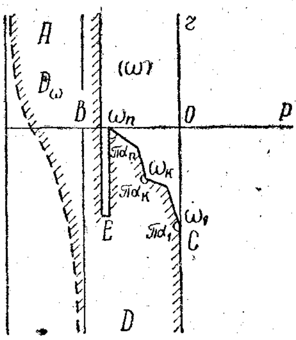

Рис. 2.

Пусть $-1=\xi_1<\xi_2<\ldots<\xi_{n-1}<\xi_n=1$ — прообразы вершин $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ ломаной BC в плоскости ω. Введем множество $\Delta=\{(x_2, \ldots, x_{n-1})\in \boldsymbol{R}^{n-2} \mid -1< x_2<\ldots<x_{n-1}<1\}$. Тогда вектор $\boldsymbol{\xi}=(\xi_2, \ldots, \xi_{n-1})\in\Delta$. Функция $\omega'(\xi)$ удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$p'(\xi)+k_j r'(\xi)=0, \quad \xi_j\leqslant\xi\leqslant\xi_{j+1}, \quad j=\overline{1, n};$$
$$p'(\xi)=0, \quad 1\leqslant|\xi|\leqslant m; \quad p'(\xi)=h(\xi, m), \quad |\xi|\geqslant m, \tag{2}$$

где $p+k_j r=b_j$ — уравнение прямой, на которой лежит j-е звено $\widehat{\omega_j\omega_{j+1}}$ полигонального участка границы D_ω, а

$$h(\xi, m)=\frac{\partial}{\partial\xi}H(\xi, m)=\frac{Hm}{2}(\xi^2-m^2)^{-1/2}(\xi^2-1)^{-1/2}/K(1/m). \tag{3}$$

Нетрудно показать, что для того, чтобы решение краевой задачи (2) было производной решения нашей задачи, необходимо, чтобы оно на бесконечности имело нуль второго порядка, а в окрестности точки ξ_j имело порядок $\beta_j=\alpha_j-1$, где $\alpha_j\pi$ — угол между двумя прямолинейными участками границы D_ω, соединяющимися в точке ω_j. Кроме того, в окрестности точек $\xi=\pm m$ должно выполняться разложение $\omega(\zeta)=\pm\dfrac{T}{\pi i}\dfrac{1}{\zeta\mp m}+o\left(\dfrac{1}{|\zeta\mp m|}\right)$.

Пусть $\Pi(\zeta, \boldsymbol{\xi})=\prod\limits_{j=1}^{n}(\zeta-\xi_j)^{\beta_j}$, причем ветвь $\Pi(\zeta, \boldsymbol{\xi})$ выбрана так, что $\Pi(\xi, \boldsymbol{\xi})>0$, $\xi>1$. Так как $\sum\limits_{j=1}^{n}\beta_j=-1$, то $|\Pi(\zeta, \boldsymbol{\xi})|\sim|\zeta|^{-1}$ на бесконечности.

Решение задачи (2), удовлетворяющее перечисленным выше требованиям, имеет вид

$$\frac{d\omega(\zeta)}{d\zeta}=\frac{d\omega(\zeta, \boldsymbol{\xi}, m)}{d\zeta}=\frac{\Pi(\zeta, \boldsymbol{\xi})}{\pi i}A(\zeta, \boldsymbol{\xi}, m),$$
$$A(\zeta, \boldsymbol{\xi}, m)=\int\limits_{|\tau|\geqslant m}\frac{h(\tau, m)\,d\tau}{\Pi(\tau, \boldsymbol{\xi})(\tau-\zeta)}+\frac{T}{\Pi(m, \boldsymbol{\xi})(\zeta-m)}-\frac{T}{\Pi(-m, \boldsymbol{\xi})(\zeta+m)}. \tag{4}$$

Можно показать, что при достаточно большом m

$$A(\zeta, \boldsymbol{\xi}, m)>0, \quad \zeta\in(-m, 1], \quad \boldsymbol{\xi}\in\Delta. \tag{5}$$

Пусть m выбрано таким образом, что это условие выполнено. Тогда для любого фиксированного $\boldsymbol{\xi}\in\Delta$ функция $\omega(\zeta)=\omega(\zeta, \boldsymbol{\xi}, m)$, которая определяется из (4) при начальном условии $\omega(-1, \boldsymbol{\xi}, m)=\omega_1$, удовлетворяет всем требованиям, кроме следующего: полигональный $(n-1)$-звенный участок границы области $\omega(D_\zeta, \boldsymbol{\xi}, m)$, вообще говоря, не совпадает с заданным, хотя их соответственные стороны параллельны. Покажем, что существует единственное $\boldsymbol{\xi}\in\Delta$ такое, что и это требование будет удовлетворено.

Введем в рассмотрение множество $\boldsymbol{L}$ ломаных L, удовлетворяющих условию: два звена L суть лучи, идущие один—из точки ω_1 вниз, другой—из некоторой точки $\tilde{\omega}_n$ вверх, $\operatorname{Re}\tilde{\omega}_n=-H$, остальные $(n-1)$ звена соединяют ω_1 и $\tilde{\omega}_n$, причем ее звенья параллельны соответствующим звеньям известного полигонального участка CB границы области D_ω, и углы в соответствующих вершинах есть $\alpha_1\pi, \ldots, \alpha_{n-1}\pi, (\alpha_n+1)\pi$. На $\boldsymbol{L}$ можно ввести структуру $(n-2)$-мерного многообразия, отображая многоугольник, ограниченный L и лежащий слева от L, на верхнюю полуплоскость так, чтобы ∞, ω_1 и $\tilde{\omega}_n$

перешли соответственно в $-m$, -1 и 1. Тогда прообразы вершин ломаной $-1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < 1$ задают локальные координаты на $\boldsymbol{L}: L \to \boldsymbol{t} = \boldsymbol{t}(L) = (t_2, \ldots, t_{n-1}) \in \Delta$. Это отображение, очевидно, определено и взаимно однозначно на всем $\boldsymbol{L}$.

Определим, наконец, отображение $\Phi: \Delta \to \Delta$, действующее по следующему правилу. Для $\boldsymbol{\xi} \in \Delta$ определяем область $z(D_\zeta, \boldsymbol{\xi}, m)$. Отбрасывая разрез BE и участок границы, соответствующий участку $|\xi| \geqslant m$ при отображении $\omega(\zeta, \boldsymbol{\xi}, m)$, получаем ломаную $L(\boldsymbol{\xi})$, принадлежащую $\boldsymbol{L}$. Наконец, $\Phi(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{t}(L(\boldsymbol{\xi}))$, где $\boldsymbol{t}(L)$ — отображение, определенное выше. Если мы покажем, что Φ взаимно однозначно, то тем самым будет установлено, что решение задачи единственно и дается формулой (4), где $\boldsymbol{\xi} = \Phi^{-1}(\boldsymbol{t}(L))$, L — известный участок границы области D_ω (без разреза BE).

Из анализа (4) и интеграла Кристоффеля—Шварца нетрудно заключить, что отображение Φ непрерывно дифференцируемо. Покажем, что Φ локально однолистно, т. е. его якобиан отличен от нуля в Δ.

Придадим $\boldsymbol{\xi}$ приращение $\delta\boldsymbol{\xi}$, и пусть при этом $\delta\boldsymbol{t} = \delta\Phi(\boldsymbol{\xi}) = (\partial\Phi(\boldsymbol{\xi})/\partial\xi)\,\delta\boldsymbol{\xi} = 0$, где $\partial\Phi(\boldsymbol{\xi})/\partial\xi$ — матрица Якоби отображения Φ. Это означает, что $L(\boldsymbol{\xi})$ и $L(\boldsymbol{\xi} + \delta\boldsymbol{\xi})$ совпадают с точностью до малых более высокого порядка, чем $\|\delta\boldsymbol{\xi}\|$. Тогда функция $\delta\omega(\zeta, \boldsymbol{\xi}, m) = \delta p(\zeta) + i\delta r(\zeta)$ удовлетворяет краевым условиям

$$\delta p(\xi) + k_j \delta r(\xi) = 0, \quad \xi_j \leqslant \xi \leqslant \xi_{j+1}, \quad j = \overline{1,\ n-1}; \quad \delta p(\xi) = 0, \quad |\xi| \geqslant 1. \tag{5}$$

Из (4) следует, что $\delta\omega$ должна иметь порядок β_j в точках ξ_j, $j = \overline{2,\ n-1}$, а в точках ξ_1 и ξ_n — соответственно α_1 и α_n. Вне окрестностей точек ξ_j, $j = \overline{1,\ n}$, она ограничена. Значит, $\delta\omega(\zeta) = \Pi(\zeta, \boldsymbol{\xi})(\zeta - \xi_1)(\zeta - \xi_n)P(\zeta)$, где $P(\zeta)$ — полином. Но $\delta\omega(\zeta)$ ограничена на бесконечности тогда и только тогда, когда $P(\zeta) \equiv 0$, т. е. $\delta\omega(\zeta) \equiv 0$. Значит, $\delta\xi_j = 0$, $j = \overline{2,\ n-1}$, что следует из (4). Из этого следует, что $\dfrac{\partial\Phi}{\partial\xi}(\boldsymbol{\xi})$ не вырождена, т. е. Φ локально однолистна.

Покажем теперь, что если последовательность векторов $\boldsymbol{\xi}^{(l)} \in \Delta$ стремится к границе Δ, то $\boldsymbol{t}^{(l)} = \Phi(\boldsymbol{\xi}^{(l)})$ также стремится к границе Δ. Пусть, напр., $\xi_k^{(l)}, \ldots, \xi_r^{(l)} \to \tilde{\xi} \in (-1,\ 1)$, $l \to \infty$, $2 \leqslant k < r < n-1$. Если $\boldsymbol{t}^{(l)} \overset{\text{не}}{\to} \partial\Delta$, то можно считать, что $t_k^{(l)} \to \tilde{\tilde{\xi}} \in (-1,\ 1)$, $l \to \infty$. Точки $t_j^{(l)}$ являются образами точек $\xi_j^{(l)}$ при конформном отображении g_l полуплоскости в себя, которое является суперпозицией функции $\omega(\zeta, \boldsymbol{\xi}^{(l)}, m)$ и функции, обратной к интегралу Кристоффеля—Шварца, отображающего D_ζ на область, ограниченную $L(\boldsymbol{\xi}^{(l)})$. Без ограничения общности можно считать, что $\xi_k^{(l)} = t_k^{(l)}$, иначе применим к g_l дробно-линейное преобразование S_l, переводящее -1, $t_k^{(l)}$, 1 соответственно в -1, $\xi_k^{(l)}$, 1. Тогда отображение g_l переводит D_ζ в себя, причем D_ζ и $g_l(D_\zeta)$ имеют общий участок границы—отрезок $[-1,\ 1]$, и на нем есть три неподвижные точки -1, $\xi_k^{(l)}$, 1. Поэтому по теореме Положего [6] точка $\xi_k^{(l)}$ „притягивающая", т. е. $t_j^{(l)}$, $j \neq k$, находится ближе к $t_k^{(l)}$, чем $\xi_j^{(l)}$ к $t_k^{(l)} = \xi_k^{(l)}$. Отсюда следует, что $t_j^{(l)} \to \tilde{\tilde{\xi}}$, $k \leqslant j \leqslant r$, т. е. $\boldsymbol{t}^{(l)} \to \partial\Delta$. Если $\xi_2^{(l)}, \ldots, \xi_r^{(l)} \to -1$, то применяем теорему Положего для точек $-m$, -1, 1.

Наконец, пусть $\xi_k^{(l)}, \ldots, \xi_{n-1}^{(l)} \to 1$, $l \to \infty$. Можно считать, что $\xi_j^{(l)} \to \tilde{\xi}_j \in [-1,\ 1)$, $j < k$, причем $-1 = \tilde{\xi}_1 < \tilde{\xi}_2 < \ldots < \tilde{\xi}_{k-1} < 1$. Тогда $\Pi(\zeta, \boldsymbol{\xi}^{(l)})$ сходится равномерно на компактных подмножествах в $\bar{D}_\zeta \setminus \{-1,\ \tilde{\xi}_2, \ldots, \tilde{\xi}_k, 1\}$ к некоторой функции

$\tilde{\Pi}(\zeta) = \prod\limits_{j=1}^{k-1} (\zeta - \tilde{\xi}_j)^{\beta_j} (\zeta - 1)^{\sum\limits_{l=k}^{n} \beta_l}$. Тогда $\omega(\zeta, \boldsymbol{\xi}^{(l)}, m)$ сходится равномерно на компактах в $D_\zeta \bigcup (-1, 1) \setminus \{\tilde\xi_2, \ldots, \tilde\xi_{k-1}\}$ к функции $\tilde\omega(\zeta)$, которая находится из формулы (4), где вместо $\Pi(\zeta, \xi)$ нужно подставить $\tilde\Pi(\zeta)$. Функция $\tilde\omega(\zeta)$ отображает D_ζ на область, которая по строению аналогична областям $\omega(D_\zeta, \xi, m)$, только число звеньев граничной ломаной у нее меньше. Так как $\omega(\zeta, \xi^{(l)}, m)$ сходится к $\tilde\omega(\zeta)$ равномерно в малой окрестности отрезка $[\tilde\xi_{k-1}+\varepsilon, 1-\varepsilon]$, то по теореме Радо [7] между любой частью $(k-1)$-го звена граничной ломаной области $\tilde\omega(D_\zeta)$ и некоторыми участками $(k-1)$-ых звеньев ломаных, лежащих на границе $\omega(D_\zeta, \xi^{(l)}, m)$, можно установить взаимно однозначное соответствие таким образом, что соответственные точки при $l\to\infty$ сколь угодно близки. Это означает, что $(k-1)$-е звенья этих ломаных при $l\to\infty$ содержат точки, сколь угодно близкие к прямой $\operatorname{Re}\omega = -H$, а т. к. эпюра не возрастает, то длины k-ых звеньев стремятся к нулю при $l\to\infty$. Но тогда $t^{(l)}$ обязана стремиться к $\partial\Delta$.

Этим самым мы показали, что Φ определяет безграничное накрытие Δ. Так как Δ односвязно, то Φ однолистно ([8], гл. II, § 3, п. 9). Итак, доказана

Теорема 1. *Если эпюра противодавления $p=p(x)$ является невозрастающей ломаной, причем $p(x)<H$, $0<x\leqslant l$, то при достаточно большом заданном расходе Q задача имеет единственное решение.*

3. Если эпюра $p(x)$ не возрастает, причем $p(x)<H$, $0<x\leqslant l$, то можно доказать теорему существования, аппроксимируя ее ломаными, удовлетворяющими условиям теоремы 1. Заметим, что величина m_0, при которой справедливо неравенство (5), может быть выбрана независимо не только от ξ, но и от α_j, $j=\overline{1, n}$.

Пусть $\omega_s(\zeta)$ есть последовательность функций, являющихся решениями для аппроксимирующих эпюр. Оно нормально, поэтому можно считать, что $\omega_s(\zeta)$ сходится равномерно внутри D_ζ к функции $\omega(\zeta)$. Используя теоремы Каратеодори о сходимости областей к ядру [7], можно показать, что $\omega(\zeta)\not\equiv\infty$, $\operatorname{Re}\omega(\xi)=H(\xi, m)$, $|\xi|\geqslant m$, и $\omega(\zeta)$ отображает участок $|\xi|\leqslant m$ на заданную часть границы области D_ω (с некоторым разрезом BE). Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

Теорема 2. *Существует такое Q_0, зависящее только от T и H, что при фиксированном расходе $Q\geqslant Q_0$ для любой монотонной эпюры $p=p(x)$, $0\leqslant x\leqslant l$, такой, что $p(x)<H$, $0<x\leqslant l$, задача построения ПК по эпюре противодавления имеет решение.*

4. В предыдущих пунктах теорема существования доказана для достаточно больших Q. При этом функция $\omega(\zeta)$ отображает полуплоскость на область D_ω, имеющую разрез BE (см. рис. 1). Однако наибольший интерес представляют решения, для которых разрез BE отсутствует, т. к. это обеспечивает отсутствие разреза вблизи границы верхнего бьефа в физической плоскости (см. [3]). Поэтому исследуем поведение решения при изменении m. Как и в п. 2, будем варьировать $\xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$, добиваясь того, чтобы $\delta t_2=\ldots=\delta t_{n-1}=0$, но при условии, что и m может меняться. Тогда для $\delta\omega$ имеем следующие условия:

$$\begin{gathered}\delta p(\xi)+k_j r(\xi)=0,\ \xi_j\leqslant\xi\leqslant\xi_{j+1},\ j=\overline{1, n-1};\\ \delta p(\xi)=0,\ 1\leqslant|\xi|\leqslant m;\ \delta p(\xi)=(\partial H(\xi, m)/\partial m)\,\delta m,\ |\xi|\geqslant m,\end{gathered}\tag{6}$$

где $H(\xi, m)$ определено формулой (1). Решение $\delta\omega$ задачи (6) отыскивается в том же классе функций, только в точках $\xi=\pm m$ функция $\delta\omega$ должна иметь разложение

$$\delta\omega(\zeta)=-\frac{T}{\pi i}\,\frac{\delta m}{\zeta\mp m}+o\left(\frac{1}{|\zeta\mp m|}\right),$$

как следует из (4). Тогда нетрудно видеть, что

$$\delta\omega(\zeta) = \frac{\Pi(\zeta, \xi)}{\pi i}(\zeta^2 - 1)\,\delta m\, D(\zeta, \xi, m),$$

$$D(\zeta, \xi, m) = \int\limits_{|\tau| \geqslant m} \frac{(\partial H(\tau, m)/\partial m)\,d\tau}{\Pi(\tau, \xi)(\tau^2 - 1)(\tau - \zeta)} - \frac{T}{m^2 - 1}\left(\frac{1}{\Pi(m, \xi)(\zeta - m)} + \frac{1}{\Pi(-m, \xi)(\zeta + m)}\right). \tag{7}$$

Используя (4) и (7), получаем, что равенство $(d/d\zeta)(\delta\omega) = \delta(d\omega/d\zeta)$ равносильно системе уравнений

$$\delta\xi_j = \delta m(1 - \xi_j^2)\,D(\zeta, \xi, m)/A(\zeta, \xi, m). \tag{8}$$

Система (8) является не только необходимым, но и достаточным условием равенства $\delta t = 0$. Действительно, пусть $\mathfrak{M} = \{(m, \xi) \in R^{n-1} \mid m > 1, \ \xi \in \Delta, A(\xi, \xi, m) > 0$ при $-m < \xi < 1\}$. Тогда мы имеем отображение $\Psi : \mathfrak{M} \to \Delta$, определяемое аналогично Φ. При фиксированном m_0 отображение $\Psi(m_0, \xi)$ локально однолистно. Поэтому Ψ в любой точке $\mathfrak{M}$ имеет ранг $n-2$. По теореме о неявной функции прообразом точки при отображении Ψ является некоторая кривая, причем касательное направление к ней в точке (m, ξ) является единственным направлением, вдоль которого выполняется равенство $(d/d\zeta)(\delta\omega) = \delta(d\omega/d\zeta)$, т. е. совпадает с (8).

С другой стороны, (8) можно рассматривать как систему дифференциальных уравнений, определяющих эту кривую.

Пусть $(m^{(0)}, \xi^{(0)})$ — точка из $\mathfrak{M}$, которая является прообразом t при отображении Ψ, причем если $m^{(0)}$ достаточно велико, то $\xi^{(0)}$ определяется единственным образом в силу теоремы 1. Рассмотрим решение системы (8), удовлетворяющее начальным условиям $\xi(m^{(0)}) = \xi^{(0)}$. Идя по траектории $(m, \xi(m))$, соответствующей этому решению, из точки $(m^{(0)}, \xi^{(0)})$ в сторону увеличения m, мы нигде не выйдем на границу $\mathfrak{M}$. Это доказывается аналогично тому, как в п. 1 устанавливалось, что если $\xi^{(l)} \to \partial\Delta$, то соответствующие $t^{(l)} = \Phi(\xi^{(l)}) \to \partial\Delta$. При этом множество $\{\xi(m), \ m \geqslant m_0\}$ опишет как раз те (единственные при фиксированном m) параметры, при которых формула (4) дает решения нашей задачи.

Точно так же можно показать, что идя в сторону уменьшения m, можно придти только к той части границы, которая описывается условием $A(\xi_0, \xi, m) = 0$ для некоторого $-m < \xi_0 \leqslant 1$ или к $m = 1$.

Пусть $T > H$. Тогда второй случай невозможен. Действительно, длина разреза BE непрерывно зависит от ξ и m, а при изменении ξ, m вдоль траектории системы (8) полигональная часть границы (кроме BE) остается неизменной. При этом модули m областей $\omega(D_\zeta, \xi(m), m)$ относительно точек A, B, C, D ограничены снизу модулем $\tilde{m}_0$ области, получающейся из них отбрасыванием разреза BE и заменой криволинейного участка AD прямой $p = -T$. Поэтому при некотором $m^{(1)} \geqslant \tilde{m}$ разрез BE исчезнет, а при этом $A(1, \xi(m^{(1)}), m^{(1)}) = 0$, что и требовалось показать. При дальнейшем уменьшении m мы либо опять вернемся в $\mathfrak{M}$, либо начнет расти разрез BF — продолжение $(n-1)$-й стороны ломаной CB, как нетрудно видеть из анализа $\delta\omega(\zeta)$ с учетом (8). В принципе не исключена возможность, что траектория $(m, \xi(m))$ снова возвратится в $\mathfrak{M}$.

Если теперь $p = p(x)$ — произвольная невозрастающая эпюра, то аппроксимируя ее невозрастающими ломаными, получаем, что справедлива

Теорема 3. *Пусть $T > H$ и эпюра $p = p(x)$ не возрастает. Если $p(x) < H$, $0 < x \leqslant l$, то для любой конечной длины разреза BE в плоскости функции Жуковского существует решение задачи. Решение существует также в случае, когда $p(x) = H$ в окрестности нуля.*

5. Если эпюра $p = p(x)$ из достаточно хорошего класса, то при фиксированном расходе Q решение единственно. Докажем, напр., следующее утверждение.

Теорема 4. *Если эпюра $p = p(x)$ удовлетворяет условиям:*

1) *отрезок $[0, l]$ можно разбить на конечное число отрезков $[a_k, a_{k+1}]$ таких, что на $[a_k, a_{k+1}]$ либо производная $p'(x)$ гёльдерова, либо существует обратная функция $x = q_k(p)$, причем $q'_k(p)$ гёльдерова;*

2) *$p(x) < H$ в окрестности нуля, причем график эпюры подходит к оси ординат под углом, не равным $\pi/2$,*

то задача при фиксированном расходе имеет не более одного решения. Если выполняется условие 1), *то существует не более одного решения без разреза BE в плоскости функции Жуковского.*

Доказательство. Функция $z(\zeta) = x(\zeta) + iy(\zeta)$ удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$\begin{gathered} p(x(\xi)) + y(\xi) = H/2 + H(m/\xi, m), \ |\xi| \leqslant 1; \\ y(\xi) = 0, \ 1 \leqslant |\xi| \leqslant m; \quad y(\xi) = -T, \ |\xi| \geqslant m. \end{gathered} \tag{9}$$

Из условий теоремы следует, что участку $(-m, m)$ при отображении $\omega(\zeta)$ соответствует кусочно-гладкая кривая без нулевых углов. Поэтому, используя [9] (лемма 10.1), получаем, что $\omega(\xi)$ гёльдерова на $[-1, 1]$. Значит, $z(\xi) = i(\omega(\xi) - w(\xi))$ также гёльдерова на $[-1, 1]$.

Как и в [10], составим граничные условия для разности $Z(\zeta) = z_1(\zeta) - z_2(\zeta)$ двух решений задачи (9) и покажем, что $Z(\zeta) \equiv 0$. Пусть $Z(\zeta) = X(\zeta) + iY(\zeta)$. Тогда

$$\tilde{a}(\xi) X(\xi) + Y(\xi) = 0, \ |\xi| \leqslant 1; \ Y(\xi) = 0, \ |\xi| \geqslant 1, \tag{10}$$

где $\tilde{a}(\xi) = [p(x_1(\xi)) - p(x_2(\xi))]/[x_1(\xi) - x_2(\xi)]$.

Заметим, что без ограничения общности можно считать, что существует такое $\varepsilon > 0$, что условие 1) теоремы выполняется для интервалов $[a_1, a_2 + \varepsilon], \ldots, [a_k - \varepsilon, a_{k+1} + \varepsilon], \ldots, [a_{n-1} - \varepsilon, a_n]$. Действительно, пусть, напр., на $[a_{k-1}, a_k]$ гёльдеровой является функция $p'(x)$, а на $[a_k, a_{k+1}]$ — производная локально обратной функции $q'_k(p)$. Тогда $p'(a_k) = 1/q'_k(p(a_k)) \neq 0, \infty$. Поэтому на некотором интервале $[a_k, a_k + \varepsilon_k]$ имеем $|q'_k(p(x))| \geqslant m_k > 0$. Тогда для любых $x_1, x_2 \in [a_k, a_k + \varepsilon_k]$ имеем $|p'(x_1) - p'(x_2)| = |1/q'_k(p(x_1)) - 1/q'_k(p(x_2))| \leqslant m_k^{-2} |q'_k(p(x_2)) - q'_k(p(x_1))|$, и т. к. q'_k гёльдерова, а p дифференцируема, причем $|p'(x)| \leqslant m_k^{-1}$ на $[a_k, a_k + \varepsilon_k]$, то $p'(x)$ гёльдерова на $[a_{k-1}, a_k + \varepsilon_k]$. Теперь можно изменить a_k таким образом, чтобы наше предположение было справедливым.

Рассмотрим множества $U_1 = \{\xi \in [-1, 1] \,\big|\, |x_1(\xi) - x_2(\xi)| > \varepsilon/8\}$ и $U_2 = \{\xi \in [-1, 1] \,\big|\, |x_1(\xi) - x_2(\xi)| < \varepsilon/4\}$. Ясно, что $\tilde{a}(\xi)$ гёльдерова на U_1. Если теперь $\xi_1, \xi_2 \in U_2$, причем $|\xi_1 - \xi_2| < r(\varepsilon/4)$, где $r(\delta)$ — модуль непрерывности функции $x_1(\xi)$ на $[-1, 1]$, то пусть $x(\xi, t) = x_1(\xi) + t(x_1(\xi) - x_2(\xi))$. Тогда $|x(\xi_1, t) - x_1(\xi_1)| < \varepsilon/4, 0 \leqslant t \leqslant 1, |x(\xi_2, t) - x_1(\xi_1)| < |x_1(\xi_2) - x_1(\xi_1)| + t|x_1(\xi_1) - x_2(\xi_1)| < \varepsilon/2, 0 \leqslant t \leqslant 1$. Это означает, что $x(\xi_1, t)$ и $x(\xi_2, t)$ лежат на интервале длины меньшей, чем ε, с центром в точке $x_1(\xi_1)$, т. е. находятся внутри одного из интервалов $[a_1, a_2 + \varepsilon], \ldots, [a_k - \varepsilon, a_{k+1} + \varepsilon], \ldots, [a_{n-1} - \varepsilon, a_n]$.

Если на этом интервале гёльдерова $p'(x)$, то $\tilde{a}(\xi_i) = \int\limits_0^1 p'(x(\xi_i, t))\,dt$, откуда следует гёльдеровость $\tilde{a}(\xi)$ на множестве $U_2 \cap U_3$, где $U_3 = \{\xi \in [-1, 1] \,|\, x_1(\xi) \in (a_k - \varepsilon/2, a_{k+1} + \varepsilon/2)$, причем $p'(x)$ гёльдерова на $[a_k, a_{k+1}]\}$. В противном случае

$$1/\tilde{a}(\xi_i) = \int\limits_0^1 q'_k \{p(x_1(\xi_i)) + t[p(x_1(\xi_i)) - p(x_2(\xi_i))]\}\,dt$$

для некоторого k, откуда с учетом гёльдеровости $q'_k(p)$ и $p(x(\xi))$ следует гёльдеровость $1/\tilde{a}(\xi)$ на множестве $U_2 \cap U_4$, где $U_4 = \{\xi \in [-1, 1] \mid x_1(\xi) \in (a_k - \varepsilon/2, a_{k+1} + \varepsilon/2)$, причем $q'_k(p)$ гёльдерова на отрезке $p([a_k, a_{k+1}])\}$.

Итак, отрезок $[-1, 1]$ есть объединение двух открытых в $[-1, 1]$ множеств, на одном из которых гёльдерова $\tilde{a}(\xi)$, на другом — $1/\tilde{a}(\xi)$.

Из (10) следует, что $Z(\zeta)$ можно продолжить по принципу симметрии в нижнюю полуплоскость вдоль $\{\xi \mid |\xi| \geqslant 1\}$. С помощью функции $\zeta(\eta) = (1/2)(\eta + 1/\eta)$ сведем задачу к восстановлению в единичном круге $\{\eta \mid |\eta| < 1\}$ аналитической функции $Z(\zeta(\eta))$, удовлетворяющей на границе $\{\eta = e^{i\theta} \mid 0 \leqslant \theta < 2\pi\}$ краевому условию задачи Гильберта

$$a(\theta) X(\zeta(e^{i\theta})) + b(\theta) Y(\zeta(e^{i\theta})) = 0, \ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \tag{11}$$

где $a(\theta) = \tilde{a}(\cos\theta)(1 + \tilde{a}^2(\cos\theta))^{-1/2}$, $b(\theta) = (1 + \tilde{a}^2(\cos\theta))^{-1/2}$.

Из предыдущего ясно, что $a(\theta)$ и $b(\theta)$ гёльдеровы. Так как $a^2(\theta) + b^2(\theta) = 1$, $b(\theta) \geqslant 0$, то индекс задачи (11) равен нулю. В этом случае решение (11) дается формулой (см. [11], с. 281):

$$Z(\zeta(\eta)) = iC \exp\left[\frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\tau|=1} v(\tau) \frac{\tau+\eta}{\tau-\eta} \frac{d\tau}{\tau}\right],$$

где C вещественно, $v(e^{i\theta}) = \operatorname{arctg}[b(\theta)/a(\theta)]$. Но т. к. $Z(-1) = Z(1) = 0$, то $C = 0$, т. е. $Z(\zeta) \equiv 0$. Итак, $z_1(\zeta) \equiv z_2(\zeta)$.

6. В заключение приведем алгоритм приближенного решения задачи. Пусть эпюра $p = p(x)$, $0 \leqslant x \leqslant l$, удовлетворяет условиям 1) и 2) теоремы 4. Из (9) следует, что первоначальная задача эквивалентна решению сингулярного интегрального уравнения для функции $\hat{x}(\theta) = x(\cos\theta) = \operatorname{Re} z(\zeta(e^{i\theta}))$:

$$p[\hat{x}(\theta)] + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \hat{x}(\gamma) \operatorname{ctg} \frac{\gamma - \theta}{2} d\gamma = \hat{H}(\theta), \ 0 \leqslant \theta < \pi, \tag{12}$$

где $\hat{H}(\theta) = H(m/\cos\theta, \ m) + H/2 - (2T/\pi) \operatorname{arctg}(\sin\theta/\sqrt{m^2 - 1})$. Продолжим $\hat{x}(\theta)$ четным образом на $(-\pi, 0)$. Тогда она может быть представлена рядом Фурье

$$\hat{x}(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos k\theta. \tag{13}$$

Используя условие $\hat{x}(0) = 0$, найдем $a_0 = -\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Тогда (13) запишется в виде

$$\hat{x}(\theta) = -\sum_{k=1}^{n} a_k (1 - \cos k\theta) + r_1^{(n)}(\theta), \tag{14}$$

где $r_1^{(n)}(\theta)$ — остаточный член. Уравнение (12) с учетом (14) будет иметь вид

$$\begin{gathered} \sum_{k=1}^{n} a_k \sin k\theta = p[\hat{x}(\theta)] - \hat{H}(\theta) - r_2^{(n)}(\theta), \\ r_2^{(n)}(\theta) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \sin k\theta. \end{gathered} \tag{15}$$

Выбирая за узловые точки $\theta_l = 2\pi l/(2n+1)$, $l = \overline{1, n}$, из (15) найдем (см. [10]):

$$a_j = \frac{4}{2n+1} \sum_{l=1}^{n} \{p[\hat{x}(\theta_l)] - \hat{H}(\theta_l) - r_2^{(n)}(\theta_l)\} \sin j\theta_l, \quad j = \overline{1, n}. \tag{16}$$

Подставив a_j в формулу (14) при $\theta=\theta_l$, переставив порядок суммирования и учитывая, что $j\theta_l=l\theta_j$, получим следующую систему:

$$x(\theta_l)=\sum_{j=1}^{n}\{p[x(\theta_j)]d_{jl}-R_{jl}\}+r^{(n)}(\theta_l),\ l=\overline{1,\ n},$$

где

$$d_{jl}=\frac{4}{2n+1}\{\widetilde{D}_n(\theta_j)-\frac{1}{2}[\widetilde{D}_n(\theta_{j+l})+\widetilde{D}_n(\theta_{j-l})]\},$$

$$R_{jl}=\sum_{j=1}^{n}\hat{H}(\theta_j)d_{jl},\ r^{(n)}(\theta_l)=r_1^{(n)}(\theta_l)-\sum_{j=1}^{n}r_2^{(n)}(\theta_j)d_{jl},$$

$\widetilde{D}_n=\sum_{k=1}^{n}\sin k\theta$ — сопряженное ядро Дирихле. Пренебрегая остаточным членом, будем иметь

$$x(\theta_l)=\sum_{j=1}^{n}p[x(\theta_j)]d_{jl}-R_{jl},\ l=\overline{1,\ n}. \tag{17}$$

Функции, стоящие в правой части (17), непрерывны по x и ограничены числом, зависящим только от n. По принципу Шаудера решение этой системы существует для любого n.

Для получения численного решения нелинейной системы (17) можно воспользоваться каким-либо известным приближенным методом, напр., методом скорейшего спуска (см., напр., [12], § 11).

ЛИТЕРАТУРА

1. Глущенко А. А. Об одном методе решения обратных задач теории фильтрации.— Прикл. механ., 1965, т. 1, вып. 10, с. 103—109.
2. Бородин В. М., Ильинский Н. Б. Построение подземного контура плотины по эпюре фильтрационного противодавления.— Тр. семин. по краев. задачам. Казань, 1968, вып. 5, с. 12—19.
3. Ильинский Н. Б., Насыров С. Р. О задаче построения контура флютбета по эпюре противодавления.— Изв. вузов. Матем., 1982, № 2, с. 16—23.
4. Weinstein A. Nonlinear problems in the theory of fluid motion with free boundaries.— Proceedings of sumposia in appl. math., 1949, v. 1, p. 1—18.
5. Монахов В. Н. Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений.— Новосибирск, 1977.— 424 с.
6. Положий Г. Н. О движении граничных точек отображаемых областей.— УМН, 1952, т. VII, вып. 6, с. 203—205.
7. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного.— М., 1966.—624 с.
8. Спеньер Э. Алгебраическая топология.— М., 1971.— 680 с.
9. Pommerenke Ch. Univalent functions.— Göttingen, 1975.— 376 p.
10. Салимов Н. Б. Обратная задача напорной фильтрации в области с криволинейным водоупором.— Тр. семин. по краев. задачам. Казань, 1968, вып. 5, с. 187—196.
11. Гахов Ф. Д. Краевые задачи.— 3-е изд.— М., 1977.—640 с.
12. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. Т. 2.— 2-е изд.— М., 1962.— 639 с.

г. Казань

Поступила 31.03.1982