A. N. Sergeev, Representations of the Lie superalgebras $\mathfrak{gl}(n,m)$ and $Q(n)$ on the space of tensors, *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 1984, Volume 18, Issue 1, 80–81

Функциональный анализ и его приложения,
1984, т. 18, вып. 1, 80—81
УДК 519.46

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СУПЕРАЛГЕБР ЛИ $\mathfrak{gl}\,(n,m)$ И $Q(n)$ В ПРОСТРАНСТВЕ ТЕНЗОРОВ

А. Н. Сергеев

В дальнейшем основное поле всегда **C**. Известно (см. [1]), что все неприводимые конечномерные представления простых алгебр Ли серии A_n можно получить, разлагая тензорные степени тождественного представления. В настоящей работе, следуя методу Г. Вейля, мы изучаем разложение тензорных степеней тождественного представления супералгебр Ли $\mathfrak{gl}\,(n, m)$ и $Q\,(n)$. В качестве следствия получаем формулу для характеров неприводимых конечномерных представлений супералгебры $Q\,(n)$, входящих в тензорную алгебру тождественного представления. Кроме того, результаты настоящей работы объясняют использование диаграмм Юнга для описания подпредставлений супергруппы Ли $GL\,(n, m)$ в тензорной алгебре, как это сделано в [7, 8].

Пусть A — свободная коммутативная суперфлгебра, порожденная семейством образующих $\{x_i\}_{i\in I}$. Определим для $x = (x_1, \ldots, x_k)$ элемент $p\,(x)$ по правилу $p\,(x) = (p\,(x_1), \ldots, p\,(x_k))$, где $p\,(x)_i$ — четность x_i. Если S_k — симметрическая группа порядка k и $\sigma \in S_k$, то $c\,(p\,(x), \sigma)$ определяется из соотношения $c\,(p\,(x), \sigma)\, x_1 \ldots x_k = x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(k)}$. Легко проверить, что c является коциклом, т. е. $c\,(p\,(x), \sigma\tau) = c\,(\sigma^{-1}p\,(x), \tau)\, c\,(p\,(x), \sigma)$. Пусть V — тождественное представление $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}\,(n, m)$ и W его k-я тензорная степень, ρ_k — соответствующее представление $\mathfrak{g}$ и $U\,(\mathfrak{g})$ (универсальная обертывающая алгебра супералгебры $\mathfrak{g}$). Группа S_k действует в W по правилу $\pi\,(\sigma)\,(v_1 \otimes \ldots \otimes v_k) = c\,(\sigma^{-1}\,(p\,(v)), \sigma)\, v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma^{-1}(n)}$. Разложение модуля W на неприводимые $\mathfrak{g}$ подмодули основано на следующем результате, который доказывает также его полную приводимость.

Т е о р е м а 1. $\pi\,(S_k)^! = \rho_k\,(U\,(\mathfrak{g}))$ (! — обозначение для коммутанта).

Для описания разложения модуля W введем следующие объекты (см. [2]): μ — разбиение k_1, ν — разбиение k_2, причем $k = k_1 + k_2$, λ — разбиение k. Через S^λ обозначим неприводимый S_k-модуль, соответствующий λ, а через V^λ — соответствующий ему неприводимый $\mathfrak{g}$ подмодуль в W. Определим теперь модули над S_k по правилу $M^\lambda = [\lambda_1] \ldots [\lambda_t]$, $M^{\mu,\tau} = [\mu_1] \ldots [\mu_r]\,[1^{(\nu_1)}] \ldots [1^{(\nu_s)}]$. Кроме того, пусть $m\,(\lambda, \eta)$ и $n\,(\mu, \nu, \lambda)$ — кратности вхождения модулей S^λ и S^η в модули M^λ и $M^{\mu,\nu}$ соответственно. Наконец, через $\{l\}$ ($l \in \mathbf{N}$) и $\{\lambda\}$ обозначим след матрицы $\operatorname{diag}\,(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ в l-й симметрической степени пространства V и в модуле V^λ соответственно.

Л е м м а 1. $\{\lambda_1\} \ldots \{\lambda_t\} = \sum m\,(\lambda, \eta)\,\{\eta\}$. *Следовательно, справедлива детерминантная форма* $\{\lambda\} = \det \mid \{\lambda_i - i + j\} \mid$. Явное выражение для функции $\{\lambda\}$ дает

Л е м м а 2. $\{\lambda\} = \sum n\,(\mu, \nu, \lambda)\, \omega\,(x_1^{\mu_1} \ldots x_n^{\mu_n} y_1^{\nu_1} \ldots y_m^{\nu_m})$, *здесь* ω — *симметризация по группе* $S_n \times S_m$.

Из теоремы 1, лемм 1, 2, следует справедливость следующей теоремы, которая описывает разложение W на неприводимые $\mathfrak{g}$ модули.

Т е о р е м а 2. *Модуль* $V^\lambda \neq 0$ *тогда и только тогда, когда* $\lambda_{n+1} \leqslant m$, *кратность его вхождения в* W *равна размерности* S^λ, *его старший вес равен* $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \langle\lambda_1' - n\rangle, \ldots, \langle\lambda_m' - n\rangle)$, *где* λ_i'-*длина* i-*го столбца диаграммы* λ *и* $\langle l\rangle = l$, *если* $l \geqslant 0$ *и* $l = 0$ — *в противном случае. Кроме того, числа* $n\,(\mu, \nu, \lambda)$ *задают кратность веса* (μ, ν) *в модуле* V^λ.

С л е д с т в и е. Полилинейные $\mathfrak{g}$ инвариантные формы p-векторов из V и q-векторов из V^* существуют, если только $p = q$. В этом случае они являются линейными комбинациями инвариантов вида $\langle u_1, v_1\rangle \ldots \langle u_p, v_p\rangle$, где $u_i \in V$, $v_j \in V^*$, а $\langle\ ,\ \rangle$ — скалярное произведение вектора и ковектора.

З а м е ч а н и е. Тензорное произведение модулей V^λ и V^η, очевидно, вполне приводимо, и его разложение на неприводимые модули задается правилом Литлвуда — Ричардсона для пары диаграмм λ и η.

Пусть теперь $\mathfrak{g} = Q\,(n)$, P — нечетный оператор из коммутанта $\mathfrak{g}$ в V: $P^2 = -1$, H_k — группа с образующими $a_1, \ldots, a_k$, ε и соотношениями $a_i^2 = \varepsilon$, $a_i a_j = \varepsilon a_j a_i$, $i \neq j$ и $\varepsilon^2 = 1$. $G_k = S_k \circ H_k$ — полупрямое произведение при естественном действии S_k на H_k. Соответствия $\varphi\,(a_i) = 1 \otimes \ldots \otimes P \otimes \ldots \otimes 1$ (P стоит на i-м месте) и $\varphi\,(\varepsilon) = -1$, задают представление H_k в W. Вместе с представлением S_k в W это определяет представление ψ группы G_k в W. Следующий результат аналогичен теореме 1 и доказывает полную приводимость W как $\mathfrak{g}$-модуля.

Т е о р е м а 3. $\psi\,(G_k)^! = \rho_k\,(U\,(\mathfrak{g}))$.

Характеры неприводимых однородных (в смысле четности) представлений G_k, при которых ε переходит в -1, сводятся к проективным характерам S_k, изучавшимся И. Шуром (см. [3]). Каждому разбиению числа k на нечетные слагаемые α соответствуют два четных класса сопряженных элементов в G_k; если один из них C, то другой εC (только на этих классах однородные характеры отличны от нуля). Неприводимые однородные представления, переводящие ε в -1, будем нумеровать разбиениями λ числа k на попарно неравные слагаемые. Пусть V^λ — неприводимый $\mathfrak{g}$-подмодуль в W, соответствующий λ, $n_i(\alpha)$ — число частей α, равных i, $q(\alpha)=\sum n_i(\alpha)$, $|\lambda|$ — число ненулевых частей λ, $\delta(\lambda)=0$, если $|\lambda|$ четно и 1 — в противном случае, $\|\lambda\|=(|\lambda|-\delta(\lambda))/2$, $\Theta^\lambda_\alpha = 2^{q(\alpha)-\|\lambda\|}X^\lambda_\alpha(-1)$ ($X^\lambda_\alpha(t)$ — коэффициенты разложения обобщенных степенных сумм по функциям Холла — Литлвуда (см. [5])). Будем говорить, что представление абсолютно неприводимо, если его коммутант сводится к скалярам. Теория проективных характеров группы S_k (см. [3—5]) позволяет описать неприводимые однородные характеры G_k.

Лемма 3. *Если λ пробегает множество разбиений k на попарно различные слагаемые, то Θ^λ_α образуют полный набор неприводимых однородных характеров G_k. Соответствующее представление абсолютно неприводимо, если и только если $\delta(\lambda)=0$.*

Пусть $\{\lambda\}$ обозначает след матрицы $\operatorname{diag}(x_1,\ldots,x_n,x_1,\ldots,x_n)$ в модуле V^λ, тогда несложное вычисление показывает, что

$$\{\lambda\}=\frac{2^{|\lambda|-\|\lambda\|}}{\Delta(x)}\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma)\,\sigma\left(x_1^{\lambda_1+n-1}\ldots x_n^{\lambda_n}\prod_{i_1>1}\left(1+\frac{x_{i_1}}{x_1}\right)\ldots\prod_{i_m>m}\left(1+\frac{x_{i_m}}{x_m}\right)\right),\quad (1)$$

где $\Delta(x)=\prod_{i<j}(x_i-x_j)$, $m=|\lambda|$.

Положим $\mathfrak{h}=\mathfrak{h}_{\bar 0}\oplus\mathfrak{h}_{\bar 1}$ — подалгебра Картана, состоящая из диагональных матриц в $\mathfrak{g}_{\bar 0}$ и $\mathfrak{g}_{\bar 1}$, X_β и F_β — четный и нечетный элементы веса β относительно $\mathfrak{h}_{\bar 0}$. Определим $\bar\beta\in\mathfrak{h}^*_{\bar 1}$ по правилу $[h,F_\beta]=\bar\beta(h)X_\beta$, $h\in\mathfrak{h}_{\bar 1}$ и j — нечетная невырожденная билинейная форма на $\mathfrak{h}^*$, соответствующая инвариантной нечетной билинейной форме на $\mathfrak{g}$. Теорема 3, лемма 3 и формула (1) показывают, что справедлива следующая

Теорема 4. *Модуль $V^\lambda\neq 0$, если и только если $\lambda_{n+1}=0$, его старший вес равен λ и*

$$ch\,V^\lambda = 2^{|\lambda|-\|\lambda\|}\sum\operatorname{sgn} w\cdot w\left\{e^{\lambda+\rho}\prod_{j(\bar\beta,\lambda)\neq 0}(1+e^{-\beta})\right\}1\Big/\sum\operatorname{sgn} w\cdot e^{w\rho},$$

где β — положительный корень, ρ — полусумма положительных корней и суммирование ведется по элементам группы Вейля алгебры Ли $\mathfrak{g}_{\bar 0}$. Модуль V^λ абсолютно неприводим тогда и только тогда, когда $\delta(\lambda)=0$.

Замечание. Из результатов [6] следует, что ограничение любой инвариантной полиномиальной функции на $\mathfrak{h}_{\bar 0}$ равно нулю, поэтому V^λ однозначно определяется своим обыкновенным характером.

ЦИТИРУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Вейль Г.* Классические группы, их инварианты и представления. М.: ИЛ, 1947. 2. *Джеймс Г.* Теория представлений симметрических групп. М.: Мир, 1982. 3. *Schur I.*— J. Reine Angew. Math., 1911, Bd 139, S. 155—250. 4. *Morris A. O.*— Proc. London Math. Soc., 1962, v. 12, № 3, p. 55—76. 5. *Morris A. O.*— Lect. Notes Math., 1977, v. 579, p. 136—154. 6. *Sergeew A. N.*— C. r. de l'Acad. bulgare de Sci., 1982, v. 35, p. 573—576. 7. *Balantekin A.*, *Bars I.*— J. Math. Phys., 1981, v. 22, p. 1149—1162. 8. *Balantekin A.*, *Bars I.*— J. Math. Phys., 1982, v. 22, p. 1810—1818.

Московский государственный университет

Поступило в редакцию 11 апреля 1983 г.