Н. А. Широков, Внутренние множители аналитических функций переменной гладкости в замкнутом круге, *Алгебра и анализ*, 2020, том 32, выпуск 5, 145–181

Алгебра и анализ
Том 32 (2020), №5

ВНУТРЕННИЕ МНОЖИТЕЛИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ПЕРЕМЕННОЙ ГЛАДКОСТИ В ЗАМКНУТОМ КРУГЕ

© Н. А. ШИРОКОВ

Пусть $p(\zeta)$ положительная функция, заданная на единичной окружности $\mathbb{T}$ и удовлетворяющая условию

$$|p(\zeta_2) - p(\zeta_1)| \leqslant \frac{c_0}{\log \frac{e}{|\zeta_2-\zeta_1|}},\ \zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{T},$$

$p_- = \min_{\zeta\in\mathbb{T}} p(\zeta)$. Пусть, далее, $0 < \alpha < 1$, $r \geqslant 0$, $r \in \mathbb{Z}$ и выполняется условие $p_- > \frac{1}{\alpha}$. Определим класс аналитических в единичном круге $\mathbb{D}$ функций следующим образом: $f \in H^{p(\cdot)}_{r+\alpha}$, если справедливо неравенство

$$\sup_{0<\rho<1} \sup_{0<|\theta|<\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{f^{(r)}(\rho e^{i(\lambda+\theta)}) - f^{(r)}(\rho e^{i\lambda})}{|\theta|^\alpha} \right|^{p(e^{i\lambda})} d\lambda < \infty.$$

В работе доказаны следующие основные результаты.

Теорема 1. *Пусть $f \in H^{p(\cdot)}_{r+\alpha}$, I — внутренняя функция, $f/I \in H^1$. Тогда $f/I \in H^{p(\cdot)}_{r+\alpha}$.*

Теорема 2. *Пусть $f \in H^{p(\cdot)}_{r+\alpha}$, I — внутренняя функция $f/I \in H^\infty$. Предположим, что кратность любого нуля $z_0 \in \mathbb{D}$ функции f в $\mathbb{D}$ не меньше $r+1$. Тогда $fI \in H^{p(\cdot)}_{r+\alpha}$.*

Пусть $X \subset H^p$ — класс функций, аналитических в единичном круге $\mathbb{D}$, H^p — стандартный класс Харди в $\mathbb{D}$.

В. П. Хавин [1] сформулировал следующий общий вопрос: пусть $f \in X$, $f \not\equiv 0$, I — внутренняя функция и $f/I \in H^1$. Будет ли выполняться свойство $f/I \in X$? Это качество класса X В. П. Хавин назвал (F)-свойством. До работы [1] В. П. Хавина имелись отдельные результаты У. Рудина [2], Л. Карлесона [3], Б. И. Коренблюма и В. С. Королевича [4], в которых — применяя упомянутый термин — (F)-свойство было установлено, соответственно, для алгебры C_A функций, аналитических в $\mathbb{D}$ и непрерывных

Ключевые слова: пространства Лебега переменной гладкости, внешне-внутренняя факторизация Неванлинны, внутренние функции.

Работа была поддержана грантом РФФИ 17-01-00607.

в $\overline{\mathbb{D}}$, для функций с конечным интегралом Дирихле $\int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 dm_2(z)$, для функций f из класса $H_r^2 : f^{(r)} \in H^2$, определяемого условием $f^{(r)} \in H^2$.

Далее последовал ряд работ других математиков, (упомянем В. П. Гурария [7], Е. М. Дынькина [8]), где (F)-свойство подтверждалось или опровергалось для новых классов аналитических функций. В. П. Хавин в своей работе [1] проверил (F)-свойство для функций из классов $H_r^p = \{f \in H^1 : f^{(r)} \in H^p, 1 < p < \infty\}$.

Проверка наличия в X (F)-свойства — необходимый первый шаг для полного описания свойств внешне-внутренней факторизации Неванлинны в X. Для ряда классов с гладкостью, аналогичной гёльдеровской, это удалось сделать [9–11]. Отметим, что в [10] были рассмотрены классы $H_{r+\alpha}^p$, $0 < \alpha < 1$, определяемые следующим образом: $f \in H_{r+\alpha}^p$, если $f^{(r)} \in H^1$ и

$$\sup_{0<\theta<2\pi} \int_{\mathbb{T}} \left| \frac{f^{(r)}(ze^{i\theta}) - f^{(r)}(z)}{\theta^\alpha} \right|^p |dz| < \infty, \tag{1}$$

Символом $\mathbb{T}$ в (1) и далее обозначена единичная окружность.

В определении (1) показатель p был постоянным, поскольку долгое время в определении различных классов функций использовались пространства L^p только с постоянными показателями. В последние 25 лет в математический обиход были введены пространства $L^{p(\cdot)}$ с переменными показателями, что позволило существенно расширить список важных функциональных классов. Этому направлению посвящено большое количество работ, мы для ссылок будем использовать монографию Д. В. Крус-Урибе и А. Фьоренца [12]. Основная цель данной работы — рассмотреть классы аналитических в $\mathbb{D}$ функций f, для которых выполнен аналог условия (1) с переменным $p(\cdot)$ и выяснить влияние наличия внутреннего множителя I у f на скорость ее убывания вблизи спектра I подобно тому, как это выяснялось в [9, глава 1], и в [10].

Работа организована следующим образом. В §1 приводятся основные определения и формулировки теорем, в §2 содержатся результаты о приближении полиномами в рассматриваемых классах функций, §3 посвящен псевдоаналитическому продолжению по Е. М. Дынькину в изучаемом контексте, в §4 приведены следствия из свойств псевдоаналитического продолжения, в §5 выясняются ограничения на скорость убывания функций из соответствующих классов в окрестности множеств их нулей, в §6 заканчивается доказательство теорем. Нумерация формул в каждом пункте своя.

§1. Определения и формулировки теорем

Пусть $p(z)$ — положительная функция, определенная на $\mathbb{T}$, и удовлетворяющая условию

$$|p(z_2) - p(z_1)| \leqslant \frac{c_0}{\log \frac{e}{|z_2 - z_1|}}, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{T} \tag{1.1}$$

с некоторой постоянной $c_0 > 0$, $p_- = \min_{z\in\mathbb{T}} p(z)$. Пусть $0 < \alpha < 1$. Предполагаем также, что $p_- > \frac{1}{\alpha}$. Для целого $r \geqslant 0$ через $H^{p(\cdot)}_{r+\alpha}$ обозначим класс функций f, аналитических в $\mathbb{D}$, для которых выполнено условие

$$\sup_{0<\rho<1} \sup_{0<|\theta|\leqslant\pi} \int_{\mathbb{T}} \left(\frac{|f^{(r)}(\rho z e^{i\theta}) - f^{(r)}(\rho z)|}{|\theta|^\alpha} \right)^{p(z)} |dz| < \infty. \tag{1.2}$$

Ясно, что для класса $H^{p(\cdot)}_{r+\alpha}$, определенного в (1.2), справедливо включение $H^{p(\cdot)}_{r+\alpha} \subset H^{p_-}_{r+\alpha}$, где класс $H^{p_-}_{r+\alpha}$ можно трактовать с помощью определения (1.2) для $p(z) \equiv p_-$, а можно применять определения из [8] или [10]. При наложенных на p_- и α ограничениях класс $H^{p_-}_{r+\alpha}$ лежит в классе Гельдера порядка $\sigma > r$, что с помощью результатов из [10] и [12] приводит к эквивалентному, как окажется в дальнейшем, определению: $f \in H^{p(\cdot)}_{r+\alpha}$, если $f^{(r)} \in C_A$ и

$$\sup_{0<|\theta|\leqslant\pi} \int_{\mathbb{T}} \left(\frac{|f^{(r)}(z e^{i\theta}) - f^{(r)}(r)|}{|\theta|^\alpha} \right)^{p(z)} |dz| < \infty. \tag{1.3}$$

Теорема 1. *Пусть $f \in H^{p(\cdot)}_{r+\alpha}$, I — внутренняя функция, $f/I \in H^1$. Тогда $f/I \in H^{p(\cdot)}_{r+\alpha}$.*

Теорема 1 расширяет список классов аналитических функций, для которых выполняется (F)-свойство.

При действиях с внешне-внутренней факторизацией Неванлинны естественно возникают ситуации, когда на внутренний множитель аналитической функции требуется эту функцию не поделить, а умножить.

Было выяснено [9, глава 1], что для классов, обладающих (F)-свойством, умножение функции на свой внутренний делитель может вывести из соответствующего класса. Оказалось, что для умножения на внутренний сомножитель с условием принадлежности произведения рассматриваемому классу на расположение нулей функции в круге следует накладывать ограничения. Это может быть требование на достаточную кратность такого нуля, либо предположение m-густоты этих нулей, введенной К. М. Дьяконовым [13], где m связано с гладкостью функции, либо их в определенном смысле неразреженность (см. [14]). Для классов $H^{p(\cdot)}_{r+\alpha}$ требование высокой кратности нуля функции в круге гарантирует сохранение класса гладкости произведения.

Теорема 2. *Пусть* $f \in H^{p(\cdot)}_{r+\alpha}$, *и кратность каждого нуля функции* f *в* $\mathbb{D}$ *не меньше* $r+1$. *Пусть далее,* I *— внутренняя функция, такая, что* $f/I \in H^1$. *Тогда* $fI \in H^{p(\cdot)}_{r+\alpha}$.

§2. Приближение функций из класса $H^{p(\cdot)}_{r+\alpha}$

Прежде всего установим следующее

Утверждение 1. *Условия* (1.2) *и* (1.3) *для показателей* $p(z)$, *удовлетворяющих соотношению* (1.1) *при* $p_- > \frac{1}{\alpha}$ *эквивалентны.*

Доказательство. Уже было отмечено, что определение (1.2) влечет $H^{p(\cdot)}_{r+\alpha} \subset H^{p_-}_{r+\alpha}$, поэтому из результатов [10] следует, что $f^{(r)} \in C_A$. Пусть f удовлетворяет (1.2), положим

$$C_1 = \sup_{0<\rho<1} \sup_{0<|\theta|\leqslant\pi} \int_{\mathbb{T}} \left(\frac{|f^{(r)}(\rho z e^{i\theta}) - f^{(r)}(\rho z)|}{|\theta|^\alpha} \right)^{p(z)} |dz|.$$

Фиксируем θ_0, $|\theta_0| > 0$, тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\rho_\varepsilon < 1$, что

$$\int_{\mathbb{T}} \left(\frac{|f^{(r)}(z e^{i\theta_0}) - f^{(r)}(z)}{|\theta_0|^\alpha} \right)^{p(z)} |dz| < \int_{\mathbb{T}} \left(\frac{|f^{(r)}(\rho_\varepsilon z e^{i\theta_0}) - f^{(r)}(\rho_\varepsilon z)|}{|\theta_0|^\alpha} \right)^{p(z)} |dz| + \varepsilon,$$

что влечет

$$\int_{\mathbb{T}} \left(\frac{|f^{(r)}(z e^{i\theta_0}) - f^{(r)}(z)}{|\theta_0|^\alpha} \right)^{p(z)} |dz| < C_1 + \varepsilon;$$

в силу произвольности θ_0 и ε получаем

$$\sup_{0<|\theta_0|\leqslant\pi} \int_{\mathbb{T}} \left(\frac{|f^{(r)}(z e^{i\theta_0}) - f^{(r)}(z)|}{|\theta_0|} \right)^{p(z)} |dz| \leqslant C_1 \tag{2.1}$$

Положим теперь для импликации (1.3) $\Rightarrow$ (1.2)

$$\sup_{0<|\theta|\leqslant\pi} \int_{\mathbb{T}} \left(\frac{|f^{(r)}(z e^{i\theta}) - f^{(r)}(z)|}{|\theta|^\alpha} \right)^{p(z)} |dz| = C_2$$

Фиксируем ρ, $0<\rho<1$, и $\theta_0 \neq 0$. В силу предположения (1.3) для функции

$$\varphi_{\theta_0}(z) \overset{\text{def}}{=} \frac{f^{(r)}(ze^{i\theta_0}) - f^{(r)}(z)}{|\theta_0|^\alpha}$$

выполняется $\varphi_{\theta_0} \in H^{p-}$, поэтому для $\zeta \in \rho\mathbb{T}$ значение функции φ_{θ_0} выражается интегралом Коши через свои значения на единичной окружности $\mathbb{T}$. Ядро интеграла Коши удовлетворяет условиям, налагаемым на ядра сингулярных интегралов в [12, глава 3] и $p_- > 1$. Поэтому существует постоянная A, не зависящая от функции φ_θ и ρ такая, что

$$\int_{\mathbb{T}} |\varphi_{\theta_0}(\rho z)|^{p(z)} |dz| \leqslant A \int_{\mathbb{T}} |\varphi_{\theta_0}(z)|^{p(z)} |dz|,$$

что влечет соотношение

$$\int_{\mathbb{T}} |\varphi_{\theta_0}(\rho z)|^{p(z)} |dz| \leqslant AC_2. \tag{2.2}$$

Переходя в неравенстве (2.2) к супремуму вначале по θ_0, а затем по ρ, приходим к оценке $C_1 \leqslant AC_2$. Вместе с неравенством (2.1) эта оценка заканчивает доказательство утверждения.

Рассмотрим теперь одно условие на функцию $f \in C_A$, которое окажется еще одним определением класса $H^{p(\cdot)}_{r+\alpha}$. Предположим, что существует постоянная $c_{21} > 0$, зависящая от f, для которой выполняется условие

$$\sup_{0<|\theta|\leqslant\pi} \int_{\mathbb{T}} \left| \frac{\sum\limits_{k=0}^{r+1} (-1)^k C^k_{r+1} f(ze^{ik\theta})}{c_{21}|\theta|^{\alpha+r}} \right|^{p(z)} |dz| \leqslant 1, \tag{2.3}$$

где C^k_{r+1} — биномиальные коэффициенты. □

Лемма 1. *Предположим, что для функции* $f \in \mathrm{C}_A$ *выполнено условие* (2.3). *Тогда существует такое* $b(\alpha, r) > 0$, *что при* $n \geqslant 1$ *можно найти полином* V_n, $\deg V_n \leqslant n$, *для которого будет справедлива оценка*

$$\int_{\mathbb{T}} \left(\frac{n^{\alpha+r} |f(z) - V_n(z)|}{b(\alpha, r) c_{21}} \right)^{p(z)} |dz| \leqslant 1. \tag{2.4}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что достаточно указать полином V_n степени $\leqslant (2r+2)n$, для которого можно найти величину $b(\alpha, r)$. Для того чтобы утверждение леммы 1 было справедливо для полиномов V_n с $\deg V_n \leqslant n$, достаточно заменить $b(\alpha, r)$ на $(2(r+1))^{\alpha+r} b(\alpha, r)$.

Положим

$$P_{n,r}(\theta) = c_{n,r}\Big(\frac{\sin(n+\frac{1}{2})\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\Big)^{2r+2}, \tag{2.5}$$

число $c_{n,r}$ выбрано из условия

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} P_{n,r}(\theta)d\theta = 1. \tag{2.6}$$

Соотношения (2.5) и (2.6) влекут

$$c_{n,r} \underset{r}{\asymp} \frac{1}{n^{2r+1}} \tag{2.7}$$

Пусть

$$\pi_{n,r,k}(e^{i\lambda}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int\limits_{-\pi}^{\pi} P_{n,r}(\theta) f(e^{i(\lambda+k\theta)})\,d\theta. \tag{2.8}$$

Поскольку (2.5) позволяет записать $P_{n,r}(\theta)$ в виде

$$P_{n,r}(\theta) = \sum_{\nu=-(2r+2)n}^{(2r+2)n} A_{n,\nu,r}e^{i\nu\theta}, \tag{2.9}$$

то из того, что $f \in C_A$, из определения (2.8) следует, что $\pi_{n,r,k}$ — полином от $e^{i\lambda}$ степени $\leqslant (2r+2)n/k$ — это получается подстановкой (2.9) в (2.8).

Теперь определим

$$V_n(e^{i\lambda}) = \sum_{k=1}^{r+1}(-1)^{k-1}C_{r+1}^k \pi_{n,r,k}(e^{i\lambda}). \tag{2.10}$$

С учетом сказанного о полиномах $\pi_{n,r,k}$ заключаем, что $V_n(e^{i\lambda})$ — полином от $e^{i\lambda}$ степени $\leqslant (2r+2)n$. Используя (2.6), (2.8) и (2.10), получаем равенство $f(e^{i\lambda} - V_n(e^{i\lambda}) = \int_{-\pi}^{\pi} P_{n,r}(\theta)\sum_{k=0}^{r+1}(-1)^k C_{r+1}^k f(e^{i(\lambda+k\theta)})\,d\theta$, поэтому с определяемой ниже постоянной c имеем

$$\begin{aligned} &\int\limits_{-\pi}^{\pi}\bigg(\frac{n^{\alpha+r}|f(e^{i\lambda}) - V_n(e^{i\lambda})|}{c}\bigg)^{p(e^{i\lambda})} d\lambda \\ &\leqslant \int\limits_{-\pi}^{\pi}\bigg(\frac{n^{\alpha+r}}{c}\int\limits_{-\pi}^{\pi} P_{n,r}(\theta)\Big|\sum_{k=0}^{r+1}(-1)^k C_{r+1}^k f(e^i(\lambda+k\theta))\Big|d\theta\bigg)^{p(e^{i\lambda})} d\lambda. \end{aligned} \tag{2.11}$$

В соотношении (2.11) положим $c = c_{2.1} \cdot \bar{c}_{n,r+\alpha}$, где

$$\bar{c}_{n,r+\alpha} = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |\theta|^{\alpha+r} \cdot n^{\alpha+r} \cdot P_{n,r}(\theta)\, d\theta. \tag{2.12}$$

Применяя результаты из [12, глава 1], получаем неравенство для правой части (2.11):

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{n^{\alpha+r}}{\bar{c}_{n,r+\alpha}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} P_{n,r}(\theta) \frac{|\sum\limits_{k=0}^{r+1}(-1)^k C_{r+1}^k f(e^{i(\lambda+k\theta)})|}{c_{2.1}}\, d\theta \right)^{p(e^{i\lambda})} d\lambda \\
&\leqslant \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{n^{\alpha+r}|\theta|^{\alpha+r}}{\bar{c}_{n,r+\alpha}} P_{n,r}(\theta) \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{|\sum\limits_{k=0}^{r+1}(-1)^k C_{r+1}^k f(e^{i(\lambda+k\theta)})|}{c_{2.1}|\theta|^{\alpha+r}} \right)^{p(e^{i\lambda})} d\lambda \right) d\theta \\
&\leqslant \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{n^{\alpha+r}}{\bar{c}_{n,r+\alpha}} P_{n,r}(\theta) d\theta = 1.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

При выводе (2.13) мы учли условие (2.3).

Положим теперь

$$b(\alpha, r) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{n \geqslant 1} \bar{c}_{n,r+\alpha}. \tag{2.14}$$

Учитывая соотношения (2.7) и (2.12), с некоторой постоянной c_{r_1} получаем неравенство $\bar{c}_{n,r+\alpha} \leqslant \int_{\pi}^{\pi} |\theta|^{\alpha+r} \cdot n^{r+\alpha} \cdot c_{r_1} \cdot \frac{1}{n^{2r+1}} \left(\frac{\sin(n+\frac{1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}} \right)^{2r+2} d\theta \leqslant c_{r_2}$, то есть $b(\alpha, r) \leqslant c_{r_2}$. Учитывая (2.14) и оценку (2.13), получаем оценку (2.4). Лемма 1 доказана. □

Лемма 2. *Пусть $f \in C_A$, $f^{(r)} \in C_A$ и выполнено условие* (1.3). *Тогда выполняется условие* (2.3) *с некоторой постоянной c_{21}.*

Доказательство. Для случая $r = 0$ выражения (1.3) и (2.3) совпадают, поэтому полагаем $r \geqslant 1$. Далее, выражения в (1.3) и в (2.3) для функций $f(z)$ и $f(z) + Az^r$ совпадают, поэтому, не умаляя общности, можно считать, что $f(1) = 0$. Далее, условие (1.3) влечет, что существует некоторое $c_{1.1} > 0$, такое, что справедливо неравенство

$$\sup_{0<|\theta|\leqslant\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} \left(\frac{|f^{(r)}(ze^{i\theta}) - f^{(r)}(z)|}{c_{1.1}|\theta|^{\alpha}} \right)^{p(z)} |dz| \leqslant 1 \tag{2.15}$$

Поскольку $p_- > \frac{1}{\alpha}$, то (2.15) и [8] влекут существование такого $c_{2.2} > 0$, что для $z_1, z_2 \in \mathbb{T}$ выполняется $|f^{(r)}(z_2) - f^{(r)}(z_1)| \leqslant c_{2.2} \cdot c_{1.1} \cdot |z_2 - z_1|^{\alpha - \frac{1}{p_1}}$, $z_1, z_2 \in \mathbb{T}$, откуда, учитывая, что $f(1) = 0$, находим, что

$$|f^{(r)}(z)| \leqslant c_{2.2} \cdot c_{1.1} \cdot 2^{\alpha - \frac{1}{p_1}} \tag{2.16}$$

Продолжим доказательство леммы. Пусть $F(\theta) = f(e^{i\theta})$, тогда

$$\begin{aligned} F'(\theta) &= ie^{i\theta} f'(e^{i\theta}), \\ F''(\theta) &= -e^{i\theta} f'(e^{i\theta}) - e^{2i\theta} f''(e^{i\theta}), \\ F^{(r)}(\theta) &= a_{r_1} e^{i\theta} f'(e^{i\theta}) + \dots a_{rr} e^{ir\theta} f^{(r)}(e^{i\theta}), \end{aligned} \tag{2.17}$$

в равенстве (2.17) $a_{rr} = i^r$. Из соотношений (2.17) с некоторыми постоянными $b_{r\nu}$ получаем равенство

$$f^{(r)}(e^{i\theta}) = e^{-ir\theta}(b_{r1} F'(\theta) + \dots + b_{rr} F^{(r)}(\theta)). \tag{2.18}$$

Для функции $f^{(\nu)}(e^{i\theta})$ при $1 \leqslant \nu < r$ справедливы равенства, аналогичные (2.18), с постоянными $b_{\nu\mu}$.

Положим $P(\lambda, \theta) = F(\lambda) + \sum_{k=1}^{r-1} \frac{F^{(k)}(\lambda)}{k!}(\theta - \lambda)^k$, тогда

$$\sum_{k=0}^{r} (-1)^k C_r^k P(\lambda, k\theta) = 0,$$

поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{r+1} (-1)^k C_{r+1}^k F(\lambda + k\theta) &= \sum_{k=0}^{r} (-1)^k C_r^k F(\lambda + k\theta) \\ &\quad - \sum_{k=0}^{r} (-1)^k C_r^k F(\lambda + k\theta + \theta) - \sum_{k=0}^{r} (-1)^k C_r^k (P(\lambda, k\theta) \\ &\quad - P(\lambda + \theta, k\theta) = \sum_{k=0}^{r} (-1)^k C_r^k (F(\lambda + k\theta) - P(\lambda, k\theta)) \\ &\quad - \sum_{k=0}^{r} (-1)^k C_r^k (F(\lambda + k\theta + \theta) - P(\lambda + \theta, \theta)) \end{aligned} \tag{2.19}$$

$$= \sum_{k=0}^{r} (-1)^k C_r^k \frac{1}{(r-1)!} \int_0^{k\theta} (k\theta - t)^{r-1} F^{(r)}(\lambda + t)\, dt$$

$$- \sum_{k=0}^{r} (-1)^k C_r^k \frac{1}{(r-1)!} \int_0^{k\theta} (k\theta - t)^{r-1} F^{(r)}(\lambda + \theta + t)\, dt$$

$$= \sum_{k=0}^{r} (-1)^k C_r^k \frac{1}{(r-1)!} \int_0^{k\theta} (k\theta - t)^{r-1} (F^{(r)}(\lambda + t) - F^{(r)}(\lambda + \theta + t))\, dt$$

Принимая во внимание определение $F(\theta) = f(e^{i\theta})$ и соотношение (2.17), из (2.19) заключаем, что справедливо равенство

$$\sum_{k=0}^{r+1} (-1)^k C_{r+1}^k f\big(e^{i(\lambda+k\theta)}\big) = \sum_{k=0}^{r} (-1) C_r^k \frac{1}{(r-1)!} \int_0^{k\theta} (k\theta - t)^{r-1} \big(a_{r_1} e^{i(\lambda+t)} f'(e^{i(\lambda+t)})$$

$$\cdots + a_{rr} e^{ir(\lambda+t)} f^{(r)}(e^{i(\lambda+t)})\big) - (a_{r_1} e^{i(\lambda+\theta+t)} f'(e^{i(\lambda+\theta+t)})$$

$$+ a_{rr} e^{ir(\lambda+\theta+t)} f^{(r)}(e^{i(\lambda+\theta+t)}))\big)\, dt \tag{2.20}$$

$$= \sum_{k=0}^{r} (-1)^k C_r^k \frac{1}{(r-1)!} \int_0^{k\theta} (k\theta - t)^{r-1} \sum_{\nu=1}^{r} a_{r\nu} e^{i\nu(\lambda+t)} (f^{(\nu)}(e^{i(\lambda+t)})$$

$$- f^{(\nu)}(e^{i(\lambda+\theta+t)}))\, dt + \sum_{k=0}^{r} (-1)^k C_r^k \frac{1}{(r-1)!} \int_0^{k\theta} (k\theta - t)^{r-1}$$

$$\times \sum_{\nu=1}^{r} a_{r\nu} (e^{i\nu(\lambda+t)} - e^{i\nu(\lambda+t+\theta)}) f^{(\nu)}(e^{i(\lambda+\theta+t)})\, dt.$$

При $k = 0$ слагаемые в обеих суммах в (2.20) равны нулю, поэтому суммирование в (2.20) проводится от $k = 1$ до $k = r$. Положим

$$\Big| g_\theta(e^{i\lambda}) = \sup_{0<|l|\leqslant\pi} \frac{1}{|l|} \int_0^{l} \Big| f^{(r)}(e^{i(\lambda+t)}) - f^{(r)}(e^{i(\lambda+\theta+t)}) \Big| |dt| \tag{2.21}$$

Тогда при $1 \leqslant k \leqslant r$ получаем оценку

$$\Big| \int_0^{k\theta} (k\theta - t)^{r-1} a_{rr} e^{ir(\lambda+t)} (f^{(r)}(e^{i(\lambda+t)}) - f^{(r)(e^{i(\lambda+\theta+t)}} dt \Big| \tag{2.22}$$

$$\leqslant (k|\theta|)^{r-1} \int_0^{k\theta} \Big| f^{(r)}(e^{i(\lambda+t)}) - f^{(r)}(e^{i(\lambda+\theta+t)}) \Big| dt \leqslant (k|\theta|)^r g_\theta(e^{i\lambda}) \qquad \square$$

Из результатов [12, глава 3], определим (2.21) и неравенства (2.15) следует, что существует постоянная $c_{2.3}$ такая, что справедливо неравенство

$$\int\limits_{\mathbb{T}} \Big(\frac{g_\theta(z)}{c_{1.1}\cdot c_{2.3}\cdot |\theta|^\alpha}\Big)^{p(z)}\ |dz| \leqslant 1, \tag{2.23}$$

поэтому (2.22) и (2.23) влекут оценку

$$\int\limits_{\mathbb{T}} \left|\frac{\int\limits_0^{k\theta}(k\theta-t)^{r-1}a_{rr}e^{i(\lambda+t)}(f^{(r)}(e^{i(\lambda+t)})-f^{(r)}(e^{i(\lambda+\theta+t)})\,dt}{c_{1.1}\cdot c_{2.3}\cdot k^r|\theta|^{r+\alpha}}\right|^{p(e^{i\lambda}} dt \leqslant 1 \tag{2.24}$$

Далее, учитывая (2.16), находим, что

$$\begin{gathered}\Big|\int\limits_0^{k\theta}(k\theta-t)^{r-1}a_{rr}(e^{ir(\lambda+t)}-e^{ir(\lambda+t+\theta)})f^{(r)}(e^{i(\lambda+\theta+t)})dt\Big| \\ \leqslant k^r|\theta|^{r+1}\max_{z\in\overline{\mathbb{D}}}|f^{(r)}(z)| \leqslant c_{1.1}\cdot c_{2.2}\cdot 2^{\lambda-\frac{1}{p-}}k^r|\theta|^{r+1}.\end{gathered} \tag{2.25}$$

Для слагаемых с $\nu < r$ в суммах (2.20) получаются оценки, аналогичные (2.24) и (2.25), и, таким образом, тождество (2.20), оценки (2.24) и (2.25) заканчивают доказательство леммы 2.

Следствие. *Пусть функция f лежит в классе C_A и удовлетворяет условию* (1.3), *полиномы $V_n(z)$ построены для f в* (2.8) *и* (2.10). *Тогда существует постоянная $c_{2.4}$ такая, что при $n\in\mathbb{N}$ выполняется условие*

$$\int\limits_{\mathbb{T}} \left(\frac{n^{\alpha+r}|f(z)-V_n(z)|}{c_{2.4}}\right)^{p(z)}|dz| \leqslant 1. \tag{2.26}$$

Соотношение (2.26) следует из лемм 1 и 2.

§3. Псевдоаналитическое продолжение функций $f\in H^{p(\cdot)}_{r+\alpha}$

Лемма 3. *Пусть $\pi_n(z)$ — полином,* $\deg\pi_n\leqslant n$. *Для $z\in\mathbb{C}\setminus\bar{\mathbb{D}}$ положим*

$$\pi_n^*(z) = \max_{|\zeta-z|\leqslant\frac14(|z|-1)}|\pi_n(\zeta)| \tag{3.1}$$

Пусть $M>0$ таково, что справедлива оценка

$$\int\limits_{\mathbb{T}} \left(\frac{\pi_n(z)}{M}\right)^{p(z)}|dz| \leqslant 1. \tag{3.2}$$

Тогда существует постоянная $c_{3.1}$, не зависящая от π_n и такая, что для $c>1$ и $\widetilde{c}=c+\frac{1}{4}(c-1)$ выполняется соотношение

$$\int\limits_{c\mathbb{T}} \left(\frac{\pi_n^*(z)}{\widetilde{c}^n c_{3.1} M}\right)^{p\left(\frac{z}{c}\right)} \frac{1}{c}|dz| \leqslant 1. \tag{3.3}$$

Доказательство. Пусть $v_n(z)=\frac{1}{M}\frac{\pi_n(z)}{z^{n+1}}$. Тогда при $|z|>1$ имеем

$$v_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{T}}\frac{v_n(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta.$$

Тогда условие (3.3) и результаты [12, глава 3], влекут существование постоянной $c_{3.10}$ такой, что для любого $c>1$ справедливо неравенство

$$\int\limits_{c\pi} \left(\frac{v_n^*(z)}{c_{3.10}}\right)^{p\left(\frac{z}{c}\right)} \frac{1}{c}|dz| \leqslant \int\limits_{\mathbb{T}} |v_n(z)|^{p(z)}|dz| \leqslant 1, \tag{3.4}$$

где в (3.4) при $z\in\mathbb{C}\setminus\bar{\mathbb{D}}$ мы определили $v_n^*(z)\overset{\text{def}}{=}\max_{|\zeta-z|\leqslant\frac{1}{4}(|z|-1)}|v_n^*(\zeta)|$ Поскольку при $z\in c\mathbb{T}$, $c>1$, выполнена оценка $|v_n(z)|\leqslant\frac{1}{M}\frac{|\pi_n(z)|}{\widetilde{c}^{n+1}}$, то $v_n^*(z)\geqslant\frac{1}{M\widetilde{c}^{n+1}}\pi_n^*(z)$, и справедливо неравенство (3.3), в котором в знаменателе стоит постоянная $\widetilde{c}^{n+1}c_{3.10}M$. Далее в процессе доказательства будут использоваться $c\leqslant 2$, поэтому можно полагать $c_{3.1}=\frac{9}{4}c_{3.10}$. Лемма доказана. □

Лемма 4. *Пусть функция $f\in C_A$ и удовлетворяет условию (1.3) или (2.3). Тогда существует ее продолжение f_0 в $\mathbb{C}$ со следующими свойствами:*

$$f_0\in C(\mathbb{C}),\quad f_0|_{\overline{\mathbb{D}}}=f,\quad f_0\in C^1(\mathbb{C}\setminus\mathbb{D}) \tag{3.5}$$

$$f_0(z)\equiv 0\quad \textit{при}\quad z\in\mathbb{C}\setminus 2\overline{\mathbb{D}}. \tag{3.6}$$

Существует постоянная $c_{3.2}$, зависящая от f и p, но не зависящая от $\rho>1$, для которой справедливо соотношение

$$\int\limits_{\rho\mathbb{T}} \left(\frac{|f'_{0\bar{z}}(z)|}{c_{3.2}(\rho-1)^{r+\alpha-1}}\right)^{p\left(\frac{z}{\rho}\right)} \frac{1}{\rho}|dz| \leqslant 1. \tag{3.7}$$

Доказательство. Будем следовать конструкции Е. М. Дынькина [8]. По лемме 1 или следствию из леммы 2 для функции f можно найти полином V_{2^n}, $\deg V_{2^n}\leqslant 2^n$, для которого с некоторой постоянной $c_{3.3}$ справедливо неравенство

$$\int\limits_{\mathbb{T}} \left(\frac{2^{n(\alpha+r)}|f(z)-V_{2^n}(z)|}{c_{3.3}}\right)^{p(z)} |dz| \leqslant 1. \tag{3.8}$$

Поскольку $V_{2^{n+1}} - V_{2^n} = (V_{2^{n+1}} - f) - (V_{2^n} - f)$, то применяя оценку (3.8) к V_{2^n} и $V_{2^{n+1}}$, с некоторой постоянной $c_{3.4}$ получим неравенство

$$\int\limits_{\mathbb{T}} \left(\frac{|V_{2^{n+1}}(z)-V_{2^n}(z)|\cdot 2^{(n+1)(r+\alpha)}}{c_{3.4}}\right)^{p(z)} |dz| \leqslant 1. \tag{3.9}$$

Определим следующую функцию $f_1(z)$:

$$f_1(z) = \begin{cases} V_{2^n}(z), & 2^{-n-1} < |z|-1 \leqslant 2^{-n}, \\ 0, & |z| > \frac{3}{2} \end{cases} \tag{3.10}$$

Обозначим $\overline{B}_t(z) = \{\zeta : |\zeta - z| \leqslant t\}$, и пусть

$$f_0(z) = \frac{1}{|\overline{B}_{\frac{1}{4}(|z|-1)}(z)|} \int\limits_{\overline{B}_{\frac{1}{4}(|z|-1)}(z)} f_1(\zeta)\,dm_2(\zeta), \tag{3.11}$$

где m_2 — 2-мера Лебега, $|\overline{B}\dots| = m_2\overline{B}\dots$. Пусть $\pi_{2^{n+1}} = V_{2^{n+1}} - V_{2^n}$, тогда лемма 3 для $\pi^*_{2^{n+1}}$, определенного, как в (3.1), при $1 < c \leqslant 2$, $\widetilde{c} = 1 + \frac{1}{4}(c-1)$, и соотношение (3.9) приводят к неравенству

$$\int\limits_{c\mathbb{T}} \left(\frac{\pi^*_{2^{n+1}}(z) 2^{(n+1)(r+\alpha)}}{\widetilde{c}^{2^{n+1}}\cdot c_{3.1}\cdot c_{3.4}}\right)^{p\left(\frac{z}{c}\right)} \frac{1}{c}|dz| \leqslant 1. \tag{3.12}$$

Из (3.12), в частности, следует оценка

$$\int\limits_{c\mathbb{T}} \left(\frac{|V_{2^{n+1}}(z)-V_{2^n}(z)| 2^{(n+1)(r+\alpha)}}{\widetilde{c}^{2^{n+1}}\cdot c_{3.1}\cdot c_{3.4}}\right)^{p\left(\frac{z}{c}\right)} \frac{1}{c}|dz| \leqslant 1. \tag{3.13}$$

В частности, при $1 < c \leqslant 1 + 2^{-n-1}$ имеем

$$\int\limits_{c\mathbb{T}} \left|\frac{(V_{2^{n+1}}(z)-V_{2^n}(z)) 2^{(n+1)(r+\alpha)}}{e^{5/4}\cdot c_{3.1}\cdot c_{c.4}}\right|^{p\left(\frac{z}{c}\right)} \frac{1}{c}|dz| \leqslant 1. \tag{3.14}$$

Определение (3.11) влечет, что $f_0 \in C^1(\mathbb{C}\setminus\overline{\mathbb{D}})$, а из следствия из леммы 2, определений (3.10) и (3.11) и оценки (3.14) следует, что $f_0(z) \to f(z_0)$ при

$z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ и $z \to z_0 \in \mathbb{T}$. Из (3.10) и (3.11) следует, что $f_0(z) = 0$ при $z \in \mathbb{C} \setminus 2\overline{\mathbb{D}}$. Пусть $2^{-n-1} < |z| - 1 \leqslant 2^{-n}$, $n \geqslant 1$. Справедливо соотношение

$$f'_{0\bar{z}}(z) = (f_0(z) - V_{2^n}(z))'_{\bar{z}} = \left(\frac{1}{|B_{\frac{1}{4}(|z|-1)}(z)|} \int (f_1(\zeta) - V_{2^n}(\zeta)) dm_2(\zeta)\right)'_{\bar{z}},$$

поэтому

$$\begin{aligned}
|f'_{0\bar{z}}(z)| &\leqslant \left| \operatorname{grad} \left(\frac{1}{|\overline{B}_{\frac{1}{4}(|z|-1)}(z)|} \int\limits_{B_{\frac{1}{4}(|z|-1)}(z)} (f_1(\zeta) - V_{2^n}(\zeta)) dm_2(\zeta) \right) \right| \\
&\leqslant c' \cdot \sup_{\zeta \in \overline{B}_{\frac{1}{4}(|z|-1)}(z)} |f_1(\zeta) - V_{2^n}(\zeta)| \cdot \frac{1}{|z|-1} \\
&\leqslant c' \max \Big(\max_{\zeta \in \overline{B}_{\frac{1}{4}(|z|-1)}(z)} |V_{2^{n+1}}(\zeta) - V_{2^n}(\zeta)|, \qquad (3.15) \\
&\qquad \max_{\zeta \in \overline{B}_{\frac{1}{4}(|z|-1)}(z)} |V_{2^n}(\zeta) - V_{2^{n-1}}(\zeta)| \Big) \cdot \frac{1}{|z|-1} \\
&= c' \cdot \frac{1}{|z|-1} \max((V_{2^{n+1}} - V_{2^n})^*(\zeta), (V_{2^n} - V^*_{2^{n-1}}(\zeta))
\end{aligned}$$

Соотношение (3.7) следует из оценки (3.15) и леммы 3. □

Лемма 5. *Пусть функция $f \in C_A$ удовлетворяет условиям* (3.5), (3.6) *и* (3.7)*. Тогда f удовлетворяет условиям* (1.3) *и* (2.3).

Доказательство. Поскольку в лемме 2 установлено, что условие (1.3) влечет условие (2.3), достаточно проверить, что функция f удовлетворяет условию (1.3). Из выполнения свойств (3.5), (3.6) и (3.7) следует, что для функции f можно написать формулу Грина:

$$f(z) = -\frac{1}{\pi} \int\limits_{2\mathbb{D} \setminus \overline{\mathbb{D}}} \frac{f'_{0\bar{\zeta}}(\zeta)}{\zeta - z} dm_2(\zeta), \ z \in \overline{\mathbb{D}} \qquad (3.16')$$

тогда при $z \in \mathbb{D}$ получаем

$$f^{(r)}(z) = -\frac{r!}{\pi} \int\limits_{2\mathbb{D} \setminus \overline{\mathbb{D}}} \frac{f'_{0\bar{\zeta}}(\zeta)}{(\zeta - z)^{r+1}} dm_2(\zeta). \qquad (3.16)$$

Будем проверять условие (1.3) для $\theta > 0$, случай $\theta < 0$ рассматривается аналогично.

Положим $v(\zeta) = f'_{0\bar\zeta}(\zeta)$, (3.7) влечет оценку

$$\int\limits_{\rho\mathbb{T}} \Big(\frac{|v(z)|}{c_{3.2}(\rho-1)^{r+\alpha-1}}\Big)^{p\left(\frac{z}{\rho}\right)} \frac{1}{\rho}|dz| \leqslant 1, \quad 1<\rho\leqslant 2. \tag{3.17}$$

Не умаляя общности, считаем, что $c_{3.2}\geqslant 1$. Выберем p_0 следующим образом: $\dfrac{1}{\alpha} < p_0 < p_-$, и положим

$$\begin{gathered} V(\lambda,x) = |v((1+x)e^{i\lambda}|x^{1-r-\alpha}, 0<x\leqslant 1,\\ V^*(\theta_0,x) = \sup_{0<k\leqslant\pi}\Big(\frac{1}{2k}\int\limits_{-k}^{k} V^{p_0}(\theta_0+\lambda,x)d\lambda\Big)^{\frac{1}{p_0}} \end{gathered} \tag{3.18}$$

Обозначая максимальную функцию Харди–Литтлвуда для функции φ через $M\varphi$, из (3.18) заключаем, что $V^{*p_0}(\theta_0,x) = MV^{p_0}(\theta_0,x)$, поэтому из результатов [12, глава 3] следует, что при $0<x\leqslant 1$ с некоторыми постоянными $c_{3.5}$ и $c_{3.6}$ справедливы оценки

$$\begin{gathered} \int\limits_{\mathbb{T}}\Big(\frac{V^*(\lambda,x)}{c_{3.6}}\Big)^{p(e^{i\lambda})} d\lambda = \int\limits_{\mathbb{T}}\Big(\frac{V^*(\lambda,x))^{p_0}}{c_{3.5}}\Big)^{\frac{p(e^{i\lambda})}{p_0}} d\lambda\\ \leqslant \int\limits_{\mathbb{T}}\Big(\frac{(V(\lambda,x))^{p_0}}{c_0\cdot c_{3.5}}\Big)^{\frac{p(e^{i\lambda})}{p_0}} d\lambda \leqslant \int\limits_{(1+x)\mathbb{T}} \Big(\frac{|v(z)|}{c_{3.4}x^{r+\alpha-1}}\Big)^{p\left(\frac{z}{1+x}\right)} \frac{1}{1+x}|dz| \leqslant 1, \end{gathered} \tag{3.19}$$

где постоянная c_0 в (3.19) взята из [12, глава 3], при оценке максимальной функции.

Пусть $z_0 = e^{i\lambda}$, положим

$$H_\theta(z,z_0) = \frac{1}{\theta^\alpha}\int\limits_{(2\mathbb{D}\setminus\overline{\mathbb{D}})\cap B_{2\theta}(z_0)} \frac{|v(\zeta)|}{|\zeta-z|^{r+1}}\,dm_2(\zeta), z\in \overline{B}_\theta(z_0)\cap\overline{\mathbb{D}}. \tag{3.20}$$

Дальнейшие рассуждения проводим по аналогии с [10].

Пусть $\frac{1}{p_0}+\frac{1}{p_0'} = 1$, тогда для оценки $H_\theta(z,z_0)$ получаем

$$H_\theta(z,e^{i\lambda}) \leqslant \frac{2}{\theta^\alpha}\int\limits_{\lambda-\theta}^{\lambda+\theta}\int\limits_0^{2\theta} \frac{|v((1+x)e^{it})|}{|(1+x)e^{it}-z|^{r+1}}\,dtdx$$

$$\leqslant \frac{2}{\theta^\alpha}\int\limits_0^{2\theta} dx\Bigg(\int\limits_{-\theta}^{\theta} |v((1+x)e^{i(\lambda+t)})x^{1-\alpha-r}|^{p_0} dt\Bigg)^{\frac{1}{p_0}}\Bigg(\int\limits_{-\theta}^{\theta} \frac{x^{\alpha+r-1}}{(|x|+|t|)^{r+1}}\Bigg)^{p_0'} dt\Bigg)^{\frac{1}{p_0'}}$$

$$\leqslant \frac{c}{\theta^\alpha}\int\limits_0^{2\theta} x^{\alpha-1-\frac{1}{p_0}}\Bigg(\int\limits_{-\theta}^{\theta} (|v((1+x)e^{i(\lambda+t)})|x^{1-\alpha-r})^{p_0}\, dt\Bigg)^{\frac{1}{p_0}} dx, \quad (3.21)$$

поскольку при $0 < x \leqslant 2\theta$ выполнено соотношение

$$\Bigg(\int\limits_{-\theta}^{\theta}\bigg(\frac{x^{\alpha+r-1}}{(x+|t|)^{r+1}}\bigg)^{p_0'} dt\Bigg)^{\frac{1}{p_0'}} \leqslant cx^{\alpha-1-\frac{1}{p_0}}.$$

Учтем, что определение (3.18) влечет оценку

$$\Bigg(\int\limits_{-\theta}^{\theta} |v((1+x)e^{i(\lambda+t)})x^{1-\alpha-r}|^{p_0}\, dt\Bigg)^{\frac{1}{p_0}} \leqslant c\theta^{\frac{1}{p_0}} \leqslant c\theta^{\frac{1}{p_0}}V^*(\lambda,x), \qquad (3.22)$$

и тогда из (3.21) и (3.22) заключаем, что

$$H_\theta(z,e^{i\lambda}) \leqslant c\frac{1}{\theta^\alpha}\int\limits_0^{2\theta} V^*(\lambda,x)x^{\alpha-1-\frac{1}{p_0}}\cdot\theta^{\frac{1}{p_0}} = c\int\limits_0^{2\theta} V^*(\lambda,x)\big(\frac{x}{\theta}\big)^{\alpha-\frac{1}{p_0}}\frac{dx}{x}. \quad (3.23)$$

Пусть $\sigma = \alpha - \frac{1}{p_0} > 0$. Проверим, что справедливо неравенство

$$\int\limits_0^{2\pi}\Bigg(\int\limits_0^{2\theta} V^*(\lambda,x)\big(\frac{x}{\theta}\big)^{\sigma}\frac{dx}{x}\Bigg)^{p(e^{i\lambda})} d\lambda \leqslant c_{3.7}. \qquad (3.24)$$

Пусть $\frac{1}{p(e^{i\lambda})} + \frac{1}{p'(e^{i\lambda})} = 1$. Неравенство Гельдера для пространств $L^{p(\cdot)}$ [12, глава 1], и неравенство (3.19) приводят к следующим соотношениям

$$\int\limits_0^{2\pi}\Bigg(\int\limits_0^{2\theta} V^*(\lambda,x)\Big(\frac{x}{\theta}\Big)^{\sigma}\frac{dx}{x}\Bigg)^{p(e^{i\lambda})} d\lambda$$

$$\leqslant c\int_0^{2\pi}\Bigg(\int\limits_0^{2\theta} V^{*p(e^{i\lambda})}(\lambda,x)\Big(\frac{x}{\theta}\Big)^{\sigma}\frac{dx}{x}\Bigg)\cdot\Bigg(\int\limits_0^{2\theta}\Big(\frac{x}{\theta}\Big)^{\sigma}\frac{dx}{x}\Bigg)^{\frac{p(e^{(i\lambda)}}{p'(e^{i\lambda})}} d\lambda$$

$$\leqslant c\int\limits_0^{2\pi}\Bigg(\int\limits_0^{2\theta} V^{*p(e^{i\lambda})}(\lambda,x)\Big(\frac{x}{\theta}\Big)^{\sigma}\frac{dx}{x}\Bigg)\cdot\Bigg(\int\limits_0^{2\theta}\Big(\frac{x}{\theta}\Big)^{\sigma}\frac{dx}{x}\Bigg)^{\frac{p_+}{p_+'}} d\lambda$$

$$\leqslant c' \int_0^{2\pi} \bigg(\int_0^{2\theta} V^{*p(e^{i\lambda})}(\lambda, x) \Big(\frac{x}{\theta}\Big)^{\sigma} \frac{dx}{x} \bigg) d\lambda$$

$$= c' \int_0^{2\theta} \Big(\frac{x}{\theta}\Big)^{\alpha} \bigg(\int_0^{2\pi} V^{*p(e^{i\lambda})}(\lambda, x) d\lambda \bigg) \frac{dx}{x} \leqslant c_{3,8} \int_0^{2\theta} \Big(\frac{x}{\theta}\Big)^{\sigma} \frac{dx}{x} = c_{3.7},$$

что и дает оценку (3.24). В предыдущих строках мы использовали обозначение $p_+ = \max_{z\in\mathbb{T}} p(z)$, $\frac{1}{p_+} + \frac{1}{p'_+} = 1$.

В дальнейших рассуждениях пусть $z_0(\theta) = e^{i(\lambda+\theta)}$, где по-прежнему $z_0 = e^{i\lambda}$. Тогда (3.16) влечет равенство

$$f^{(r)}(z_0(\theta)) - f^{(r)}(z_0)$$

$$= \frac{r!}{\pi} \int_{B_{2\theta}(z_0)} \frac{f'_{0\bar{\zeta}(\zeta)}}{(\zeta - z_0)^{r+1}}\, dm_2(\zeta) - \frac{r!}{\pi} \int_{B_{2\theta}} \frac{f'_{0\bar{\zeta}(\zeta)}}{(\zeta - z_0(\theta))^{r+1}}\, dm_2(\zeta) + \frac{r!}{\pi} \sum_{2^n\theta\leqslant 4n\geqslant 1} (z_0 - z_0(\theta))$$

$$\times \int_{B_{2^{n+1}}\theta(z_0)\setminus B_{2^n\theta}(z)} f'_{0\bar{\zeta}}(\zeta) \Big(\frac{(\zeta - z_0(\theta))^r + (\zeta - z_0(\theta))^{r-1}(\zeta - z_0) + \ldots + (\zeta - z_0)^r}{(\zeta - z_0)^{r+1}(\zeta - z_0(\theta))^{r+1}} \Big) dm_2(\zeta)$$

$$\stackrel{\mathrm{def}}{=} T_1(\lambda,\theta) - T_2(\lambda,\theta) + T_3(\lambda,\theta). \tag{3.25}$$

Применяя обозначение (3.20), получаем следующие неравенства:

$$\frac{1}{\theta^{\alpha}} |T_1(\lambda,\theta)| \leqslant c H_{\theta}(z_0, z_0) \tag{3.26}$$

$$\frac{1}{\theta^{\alpha}} |T_2(\lambda,\theta)| \leqslant c H_{\theta}(z_0, z_0) \tag{3.27}$$

Тогда (3.23), (3.24), (3.26) и (3.27) влекут оценки

$$\int_0^{2\pi} \left| \frac{T_j(\lambda,\theta)}{\theta^{\alpha}} \right|^{p(e^{i\lambda})} d\lambda \leqslant c_{3.9}, \quad j = 1, 2. \tag{3.28}$$

Опять применяя обозначение (3.20), для слагаемого $T_3(\lambda,\theta)$ находим оценку

$$\frac{1}{\theta^{\alpha}} |T_3(\lambda,\theta)| \leqslant c\theta^{1-\alpha} \sum_{2^n\theta\leqslant 4n\geqslant 1} \int_{B_{2^{n+1}\theta}(z_0)\setminus B_{2^n\theta}(z_0)} \frac{|f'_{0\bar{\zeta}}(\zeta)|}{|\zeta - e^{i\lambda}|^{r+2}}\, dm_2(\zeta)$$

$$\leqslant c\theta^{1-\alpha} \sum_{2^n\theta\leqslant 4n\geqslant 1} \frac{1}{2^n\theta} \cdot \big(2^{n+1}\theta\big)^{\alpha} \cdot \big(\frac{1}{2^{n+1}\theta}\big)^{\alpha} \int_{B_{2^{n+1}\theta(z_0)\setminus B_{2^n\theta}(z_0)}} \frac{|v(\zeta)|}{|\zeta - z_0|^{r+1}} dm_2(\zeta)$$

$$= c \sum_{2^n\theta\leqslant 4 n\geqslant 1} \frac{1}{2^{n(1-\alpha)}} H_{2^{n+1}\theta}(z_0, z_0). \tag{3.29}$$

Из неравенств (3.24), (3.29) и неравенства Гельдера [12, глава 1], находим, что выполняется следующая оценка

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \left|\frac{T_3(\lambda,\theta)}{\theta^\alpha}\right|^{p(e^{i\lambda})} d\lambda \\
&\leqslant c\int_0^{2\pi} \sum_{\substack{2^n\theta\leqslant 4\\ n\geqslant 1}} \frac{1}{2^{n(1-\alpha)}} H^{p(e^{i\lambda})}_{2^{n+1}\theta}(e^{i\lambda}, e^{i\lambda}) \Bigg(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n(1-\alpha)p'(e^{i\lambda})}}\Bigg)^{\frac{p(e^{i\lambda})}{p'(e^{i\lambda})}} d\lambda \\
&\leqslant c\int_0^{2\pi} \sum_{\substack{n\geqslant 1\\ 2^n\theta\leqslant 4}} \frac{1}{2^{n(1-\alpha)}} H^{p(e^{i\lambda})}_{2^{n+1}\theta}(e^{i\lambda}, e^{i\lambda}) \Bigg(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n(1-\alpha)p'_+}}\Bigg)^{\frac{p_+}{p'_+}} d\lambda \\
&\leqslant c' \sum_{\substack{n\geqslant 1\\ 2^n\theta\leqslant 4}} \frac{1}{2^{n(1-\alpha))}} \int_0^{2\pi} H^{p(e^{i\lambda})}_{2^{n+1}\theta}(e^{i\lambda}, e^{i\lambda}) d\lambda \leqslant c'\cdot c_{3.7} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n(1-\alpha)}} = c_{3.11}
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Объединяя соотношения (3.25), (3.28) и (3.30), находим, что

$$\int_0^{2\pi} \left|\frac{f^{(r)}(e^{i(\lambda+\theta)}) - f^{(r)}(e^{i\lambda})}{\theta^\alpha}\right|^{p(e^{i\lambda})} d\lambda \leqslant c_{3.12},$$

что и доказывает лемму 5. □

Лемма 6. *Пусть функция* $f \in C_A$, $0<\alpha<1$, $r\geqslant 0$. *Тогда условия* (1.3) *или* (2.3) *эквивалентны условию*

$$\int_0^{2\pi} \big((1-\rho)^{1-\alpha}|f^{(r+1)}(\rho e^{i\lambda})|\big)^{p(e^{i\lambda})} d\lambda \leqslant c_{3.13}, \tag{3.31}$$

постоянная $c_{2.1}$ *не зависит от* ρ, $0<\rho<1$.

Предположим, что функция f удовлетворяет условию (2.3), поскольку условие (1.3) влечет условие (2.3). Тогда для f справедливо представление (3.16'), и тогда для $z=\rho e^{i\lambda}$ имеем

$$f^{(r+1)}(z) = -\frac{(r+1)!}{\pi} \int_{2\mathbb{D}\setminus\overline{\mathbb{D}}} \frac{f'_{0\bar\zeta}(\zeta)}{(\zeta-z)^{r+2}}\, dm_2(\zeta). \tag{3.32}$$

Обозначая $f'_{0\bar\zeta}(\zeta) = v(\zeta)$, для функции v справедливо условие (3.17). Пусть $z_0 = e^{i\lambda}$, $z = \rho z_0$, $l = 1-\rho$. Тогда можно написать оценки:

$$|f^{(r+1)}(z)| \leqslant c \int\limits_{B_{2l}(z_0)} \frac{|v(\zeta)|}{|\zeta - z|^{r+2}}\, dm_2(\zeta) + c \sum_{\substack{n\geqslant 1\\ 2^n l\leqslant 4}} \int\limits_{B_{2^{n+1}l}(z_0)\setminus B_{2^n l}(z_0)} \frac{|v(\zeta)|}{|\zeta - z|^{r+2}}\, dm_2(\zeta)$$
$$= I_0(z_0, l) + \sum_{\substack{n\geqslant 1\\ 2^n l\leqslant 4}} I_n(z_0, l) \tag{3.33}$$

Из оценки (3.26) получаем следующие неравенства:

$$I_0(z_0, l) \leqslant \frac{c}{l} \int\limits_{B_{2l}(z_0)} \frac{|v(\zeta)|}{|\zeta - z|^{r+1}}\, dm_2(\zeta) \leqslant c l^{\alpha-1} H_l(z_0, z_0) \tag{3.34}$$

$$\begin{aligned} I_n(z_0, l) &\leqslant c\frac{1}{2^n l} \int\limits_{B_{2^{n+1}l}(z_0)\setminus B_{2^n l}(z_0)} \frac{|v(\zeta)|}{|\zeta - z|^{r+1}}\, dm_2(\zeta) \\ &\leqslant c\frac{1}{2^n l}(2^{n+1}l)^\alpha H_{2^{n+1}l}(z_0, z_0) = c l^{\alpha-1}\frac{1}{2^{n(1-\alpha)}} H_{2^{n+1}l}(z_0, z_0), \end{aligned} \tag{3.35}$$

теперь из (3.32)–(3.35) находим, что

$$|(1-\rho)^{1-\alpha} f^{(r+1)}(z)| \leqslant c \sum_{\substack{n\geqslant 1\\ 2^n l\leqslant 4}} \frac{1}{2^{n(1-\alpha)}} H_{2^{n+1}l}(z_0, z_0), \tag{3.36}$$

и из (3.30) и (3.36) получаем оценку

$$\int\limits_{\mathbb{T}} \big|(1-\rho)^{1-\alpha} f^{(r+1)}(\rho z_0)\big|^{p(z_0)} |dz_0| \leqslant c_{3.14}, \tag{3.37}$$

которая дает импликацию в лемме 6 в одну сторону.

Для проверки справедливости импликации в другую сторону предположим, что для функции $f \in C_A$ выполнено условие (3.31). Пусть

$$F(\theta + ih) = f(e^{i(\theta+ih)}), \quad h \geqslant 0, \tag{3.38}$$

и

$$M\varphi(\theta + ih) = \sup_{k>0} \frac{1}{2k} \int\limits_{\theta-k}^{\theta+k} |\varphi(\lambda + ih)|\, d\lambda. \tag{3.39}$$

Заметим, что

$$h^{1-\alpha} M\varphi(\theta + ih) = M(h^{1-\alpha}\varphi(\theta + ih)). \tag{3.40}$$

Рассуждая аналогично (2.19)–(2.22), получим

$$\Big|\sum_{\nu=0}^{r+1}(-1)^\nu C_{r+1}^\nu F(\theta+\nu\tau+ih)\Big|\leqslant c_r|\tau|^{r+1}MF^{(r+1)}(\theta+ih), \tag{3.41}$$

и (3.40) и (3.41) влекут

$$\begin{aligned}|\tau|^{-\alpha-r}\Big|\sum_{\nu=0}^{r+1}(-1)^\nu C_{r+1}^\nu F(\theta+\nu\tau+ih)\Big| &\leqslant c_r|\tau|^{1-\alpha}MF^{(r+1)}(\theta+ih)\\ &= c_r\Big(\frac{|\tau|}{h}\Big)^{1-\alpha}M(h^{1-\alpha}F^{(r+1)}(\theta+ih)).\end{aligned} \tag{3.42}$$

Используя определение (3.38) и оценку (3.42), находим, что

$$\begin{aligned}&|\tau|^{-\alpha-r}\Big|\sum_{\nu=0}^{r+1}(-1)^\nu C_{r+1}^\nu f(e^{-h}\cdot e^{i(\theta+\nu\tau)})\Big|\\ &\qquad\leqslant c_r'\big(\frac{|\tau|}{h}\big)^{1-\alpha}M(h^{1-\alpha}f^{(r+1)}(e^{-h}\cdot e^{i\theta}))+c_{3.15}\big(\frac{|\tau|}{h}\big)^{1-\alpha}.\end{aligned} \tag{3.43}$$

Применяя к оценке (3.43) условие (3.31) и конструкцию приближения (2.9), (2.10) из леммы 1 для $n\geqslant\frac{1}{2h}$ найдем полином $\pi_n(z,h)$, $\deg\pi_n\leqslant n$ и постоянную $c_{3.15}$ такие, что справедлива оценка

$$\int_0^{2\pi}\Big(\frac{n^{\alpha+r}|f(e^{-h}e^{i\theta})-\pi_n(e^{i\theta},h)|}{c_{3.15}}\Big)^{p(e^{i\theta})}d\theta\leqslant 1. \tag{3.44}$$

Пусть $\rho_n=e^{-2^{-n}}$, $\Pi_n(\rho_n z)=\pi_{2^n}(z,2^{-n})$. Из (3.44) и результатов [12, глава 3], следует, что существует постоянная $c_{3.16}$ такая, что при $0<s\leqslant 1$

$$\int_0^{2\pi}\Big(\frac{2^{n(\alpha+r)}|f(s\rho_n e^{i\theta})-\Pi_n(s\rho_n e^{i\theta})|}{c_{3.16}}\Big)^{p(e^{i\theta})}d\theta\leqslant 1, \tag{3.45}$$

в частности,

$$\int_0^{2\pi}\Big(\frac{2^{n(\alpha+r)}|f(\rho_{n+1}^2 e^{i\theta})-\Pi_{n+1}(\rho_{n+1}^2 e^{i\theta})|}{2^{\alpha+r}\cdot c_{3.16}}\Big)^{p(e^{i\theta})}d\theta\leqslant 1 \tag{3.46}$$

Поскольку $\rho_{n+1}^2=\rho_n$ и

$$(f(\rho_n z)-\Pi_n(\rho_n z))+(\Pi_{n+1}(\rho_{n+1}^2 z)-f(\rho_{n+1}^2 z)=\Pi_{n+1}(\rho_n z)-\Pi_n(\rho_n z),$$

то существует постоянная $c_{3.17}$, для которой выполнена оценка

$$\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{2^{n(\alpha+r)}|\Pi_{n+1}(\rho_n e^{i\theta})-\Pi_n(\rho_n e^{i\theta})|}{c_{3.17}}\right)^{p(e^{i\theta})}d\theta\leqslant 1. \tag{3.47}$$

Рассуждая аналогично лемме 3, из оценки (3.47) получаем, что существует постоянная $c_{3.18}$ такая, что имеем соотношение

$$\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{2^{n(\alpha+r)}|\Pi_{n+1}(\rho_n^{-1} e^{i\theta})-\Pi_n(\rho_n^{-1} e^{i\theta})|}{c_{3.18}}\right)^{p(e^{i\theta})}d\theta\leqslant 1. \tag{3.48}$$

В частности, (3.48) влечет существование постоянной $c_{3.19}$ такой, что

$$\int\limits_0^{2\pi}\left(2^{n(\alpha+r)}|\Pi_{n+1}(\rho_n^{-1} e^{i\theta})-\Pi_n(\rho_n^{-1} e^{i\theta})|\right)^{p_-}d\theta\leqslant c_{3.19} \tag{3.49}$$

Положим $Q_n(z)=\Pi_{n+1}(z)-\Pi_n(z)$. Из (3.49) при $0<t\leqslant\rho_n^{-1}$ заключаем, что

$$\int\limits_0^{2\pi}|Q_n(te^{i\theta})|^{p_-}d\theta\leqslant c_{3.19}\cdot 2^{-n(\alpha+r)p_-},$$

в частности, при $0\leqslant m\leqslant n$, получаем неравенство

$$\left(\int\limits_0^{2\pi}|Q_m(\rho_n^{-1}e^{i\theta},|^{p_-}d\theta\right)^{\frac{1}{p_-}}\leqslant c_{3.19}\cdot 2^{-m(\alpha+r)}. \tag{3.50}$$

Для производной Q'_m оценка (3.50) влечет соотношение

$$\left(\int\limits_0^{2\pi}|Q'_m(\rho_n^{-1}e^{i\theta})|^{p_-}d\theta\right)^{\frac{1}{p_-}}\leqslant c_{3.20}\cdot 2^m\cdot 2^{-m(\alpha+r)}\leqslant c_{3.20}\cdot 2^{m(1-\alpha)}. \tag{3.51}$$

Из неравенства (3.51) выводим, что при $0<\alpha<1$ имеем

$$\begin{aligned}\left(\int\limits_0^{2\pi}|\Pi'_{n+1}(\rho_n^{-1}e^{i\theta})|^{p_-}d\theta\right)^{\frac{1}{p_-}}&=\left(\int\limits_0^{2\pi}|\sum_{m=0}^n Q'_m(\rho_n^{-1}e^{i\theta})|^{p_-}d\theta\right)^{\frac{1}{p_-}}\\ \leqslant\sum_{m=0}^n\left(\int\limits_0^{2\pi}|Q'_m(\rho_n^{-1}e^{i\theta})|^{p_-}d\theta\right)^{\frac{1}{p_-}}&\leqslant c_{3.20}\sum_{m=0}^n 2^{m(1-\alpha)}\leqslant c_{3.21}2^{n(1-\alpha)}.\end{aligned} \tag{3.52}$$

В случае $\alpha = 1$ неравенства (3.50)–(3.52) принимают вид

$$\left(\int_0^{2\pi} |\Pi'_{n+1}(\rho_n^{-1}e^{i\theta})|^{p_-} d\theta\right)^{\frac{1}{p_-}} \leqslant c'_{3.21}\, n. \tag{3.53}$$

Пусть $M_n = c_{3.21}2^{n(1-\alpha)}$, если $0 < \alpha < 1$, и $M_n = c'_{3.2}n$, если $\alpha = 1$. Если $0 < \theta_2 - \theta_1 \leqslant \pi$, $\zeta_j = \rho_n^{-1}e^{i\theta_j}$, $j = 1, 2$, $\smile \zeta_1, \zeta_2$ — кратчайшая из дуг окружности $\frac{1}{\rho_n}\mathbb{T}$ с концами ζ_1 и ζ_2. Тогда имеем

$$\begin{aligned} |\Pi_{n+1}(\zeta_2) - \Pi_{n+1}(\zeta_1)| &= |\int_{\smile\zeta_1,\zeta_2} \Pi'_{n+1}(\zeta)d\zeta) \\ &\leqslant 2\left(\int_0^{2\pi} |\Pi'_{n+1}(\rho_n^{-1}e^{i\theta})|^{p_-} d\theta\right)^{\frac{1}{p_-}} \cdot (\theta_2 - \theta_1)^{\frac{1}{p'_-}} \\ &\leqslant 2M_n(\theta_2 - \theta_1)^{\frac{1}{p'_-}}. \end{aligned} \tag{3.54}$$

Из леммы П. М. Тамразова [13, глава 2], и (3.54) следует, что для z_1, $z_2 \in \rho_n^{-1}\mathbb{D}$ выполнено соотношение

$$|\Pi_{n+1}(z_2) - \Pi_{n+1}(z_1)| \leqslant 2M_n \cdot c|z_2 - z_1|^{\frac{1}{p'_-}}. \tag{3.55}$$

В частности, при $|z_2 - z_1| \leqslant c' \cdot 2^{-n}$ при $0 < \alpha < 1$ из (3.52) и (3.55) находим, что, в силу $\alpha > \frac{1}{p_-}$,

$$\begin{aligned} &|\Pi_{n+1}(z_2) - \Pi_{n+1}(z_1)| \leqslant 2 \cdot c_{3.21} \cdot 2^{n(1-\alpha)} \cdot c''2^{-\frac{n}{p'_-}} \\ &= c'_0 2^{n\left(\frac{1}{p_-} - \alpha\right)} \underset{n\to\infty}{\to} 0. \end{aligned} \tag{3.56}$$

Если же $\alpha = 1$, то (3.53) и (3.55) дают соотношение

$$|\Pi_{n+1}(z_2| - \Pi_{n+1}(z_1)| \leqslant c''_0 2^{-n} \cdot n \underset{n\to\infty}{\to} 0. \tag{3.57}$$

Определим функцию $f_1(z)$ следующим образом:

$$f_1(z) = \begin{cases} f(z), \ z \in \overline{\mathbb{D}} \\ \Pi_{n+1}(z), \ z \in \rho_n^{-1}\overline{\mathbb{D}} \setminus \rho_{n+1}^{-1}\overline{\mathbb{D}} \\ 0, \ z \in \mathbb{C} \setminus \rho_0^{-1}\overline{\mathbb{D}} \end{cases} \tag{3.58}$$

Из соотношений (3.56), (3.57) и определения (3.58) следует, что $f_1 \in C(\overline{\mathbb{D}})$. Далее, как и в (3.11), полагаем

$$f_0(z) = \frac{1}{|B_{\frac{1}{4}(|z|-1)}(z)|} \int\limits_{\bar{B}_{\frac{1}{4}(|z|-1)}(z)} f_1(\zeta) dm_2(\zeta), \ z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}. \tag{3.59}$$

Повторяя рассуждения леммы 4, получаем, что при $z \in \overline{\mathbb{D}}$ можно применить формулу Грина,

$$f(z) = -\frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbb{C}\setminus\overline{\mathbb{D}}} \frac{f'_{0\bar{\zeta}}(\zeta)}{\zeta - z} dm_2(\zeta), \tag{3.60}$$

и, используя оценку (3.48), установим, что существует постоянная $c_{3.22}$, для которой при $\rho > 1$ выполняется соотношение

$$\int\limits_{\rho\mathbb{T}} \left(\frac{|f'_{0\bar{\zeta}}(\zeta)|}{(\rho-1)^{\alpha+r-1}} \right)^{p\left(\frac{\zeta}{\rho}\right)} \frac{1}{\rho} |d\zeta| \leqslant c_{3.22}. \tag{3.61}$$

Теперь соотношение (1.3) следует из (3.60), (3.61) и леммы 5. Лемма 6 доказана.

§4. Следствия из свойств псевдоаналитического продолжения функций из класса $H^{p(\cdot)}_{r+\alpha}$

Определим разделенные разности $f[z_1, z_2, \ldots, z_m]$ для функции $f \in C_A$, следуя [15, глава 3]. Пусть z_1, $z_2 \in \overline{\mathbb{D}}$, $z_1 \neq z_2$. Положим

$$f[z_1, z_2] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2}.$$

Если $f' \in C_A$, то при $z_1 = z_2$ полагаем $f[z_1, z_1] = f'(z)$. Если $f[z_1, \ldots, z_m]$ определена при $z_j \in \overline{\mathbb{D}}$, $z_j \neq z_k$, $j \neq k$, j, $k = 1, \ldots, m$, то при $z_{m+1} \neq z_j$, $1 \leqslant j \leqslant m|$, полагаем

$$f[z_1, \ldots, z_m, z_{m+1}] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f[z_1, \ldots z_{m-1}, z_m] - f[z_1, \ldots, z_{m-1}, z_{m+1}]}{z_m - z_{m+1}},$$

в случае $z_{m+1} = z_m$, $z_m \in \overline{\mathbb{D}}$, $z_m \neq z_j$, $1 \leqslant j \leqslant m-1$, и для $f' \in C_A$ полагаем

$$f[z_1, \ldots z_m, z_m] \stackrel{\text{def}}{=} f'_{z_m}[z_1, \ldots, z_{m-1}, z_m].$$

Применяя определение $f[z_1, \ldots z_m]$ к функции f такой, что $f^{(r)} \in C_A$, $r \geqslant 1$, можно считать что точки $z_j \in \overline{\mathbb{D}}$ выбраны без каких-либо ограничений.

Пусть функция $f\in C_A$. Определим следующую характеристику $\Delta^\alpha f(\zeta,h)$ для $\zeta\in\mathbb{T}$ и $h>0$:

$$\Delta^\alpha f(\zeta,h)\overset{\text{def}}{=}\max_{\substack{z_0^{(j)}\in\bar B_h(\zeta)\cap\overline{\mathbb{D}}\\ j=1,2}}\frac{1}{h^\alpha}|f(z_0^{(1)})-f(z_0^{(2)})|. \tag{4.1}$$

Для $r\geqslant 1$ и $f^{(r)}\in C_A$ полагаем

$$\Delta^{r+\alpha} f(\zeta,h)\overset{\text{def}}{=}\max_{\substack{z_k^{(j)}\in\bar B_h(\zeta)\cap\overline{\mathbb{D}}\\ 0\leqslant k\leqslant r\\ j=1,2}}\frac{1}{h^\alpha}|f[z_0^{(1)},\dots z_r^{(1)}]-f[z_0^{(2)},\dots z_r^{(2)}]|. \tag{4.2}$$

Для характеристик $\Delta^{r+\alpha}f$, $r\geqslant 0$, справедливо следующее утверждение.

Лемма 7. *Пусть функция f удовлетворяет условию* (1.3). *Тогда существует постоянная $c_{4.1}$, не зависящая от h, $0<h\leqslant 2$, такая, что выполняется оценка*

$$\int_{\mathbb{T}}|\Delta^{r+\alpha}f(\zeta,h)|^{p(\zeta)}|d\zeta|\leqslant c_{4.1}. \tag{4.3}$$

Доказательство. Для функции f справедливо представление ($3.16'$) со свойством (3.17). Предполагая вначале, что точки $z_k^{(1)}$ попарно различны и точки $z_k^{(2)}$ попарно различны, из представления ($3.16'$) из определений (4.1) или (4.2) получаем формулу

$$f[z_0^{(j)},\dots z_r^{(j)}]=-\frac{1}{\pi}\int_{2\mathbb{D}\setminus\mathbb{D}}\frac{f'_{0\bar\zeta}(\zeta)}{(\zeta-z_0^{(j)})\dots(\zeta-z_r^{(j)})}\,dm_2(\zeta), \tag{4.4}$$

в (4.4) $j=1$ или $j=2$. Поскольку определения (4.1) и (4.2) и свойство (3.17) показывают, что левая часть равенства (4.4) непрерывна в $\underbrace{\overline{D}\times\overline{D}\times\dots,\times\overline{D}}_{r+1}=\overline{\Omega}_r$, и правая часть непрерывна в $\overline{\Omega}_r$, то это показывает, что (4.4) справедливо для любых наборов $(z_0^{(j)},\dots z_r^{(j)})$ из множества Ω_r.

Предположим временно, что $z_k^{(1)}\neq z_k^{(2)}$ при $0\leqslant k\leqslant r$. Тогда равенство (4.4) влечет соотношение

$$\begin{gathered}\frac{1}{h^\alpha}\Big(f\big[z_0^{(1)},\dots,z_r^{(1)}]-f[z_0^{(2)},\dots,r_r^{(2)}\big]\Big)=\sum_{k=0}^{r}\frac{z_{r-k}^{(1)}-z_{r-k}^{(2)}}{\pi h^\alpha}\\ \times\int_{B_{2h}(\zeta)}\frac{f'_{0\bar\zeta}(t)}{(t-z_0^{(1)})\dots(t-z_{r-k}^{(1)})(t-z_{r-k}^{(2)})\dots(t-z_r^{(2)})}\,dm_2(t).\end{gathered} \tag{4.5}$$

Если для каких-то индексов k имеется равенство $z_{r-k}^{(1)} = z_{r-k}^{(2)}$, то соответствующие слагаемые в правой части (4.5) обращаются в нуль. Учтем, что при $|t| > 1$, $z_j^{(k)} \in \overline{\mathbb{D}}$

$$\frac{1}{|(t - z_0^{(k)}) \dots (t - z_r^{(k)})|} \leqslant \frac{1}{r+1} \sum_{j=0}^{r} \frac{1}{|t - z_j^{(k)}|^{r+1}}, \tag{4.6}$$

а при $t \in (\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}) \cap \overline{B}_{2h}(\zeta)$, $z_j^{(k)} \in \overline{B}_h(\zeta) \cap \mathbb{D}$ имеем

$$\frac{1}{|(t - z_0^{(1)}) \dots (t - z_{r-k}^{(2)}) \dots (t - z_r^{(2)})|} \leqslant \frac{c}{|t - \zeta|^{r+2}}. \tag{4.7}$$

Принимая во внимание равенство (4.5), условие (3.17) и неравенства (4.6) и (4.7), мы оказываемся в условиях, при которых проводились оценки (3.16)–(3.30) при доказательстве леммы 5. Буквально повторяя вышеуказанные оценки, получаем утверждение леммы 7. $\square$

§5. Убывание функции из класса $H_{r+\alpha}^{p(\cdot)}$ в окрестности ее нулей

Определим следующую характеристику $\nu_r(z)$, связанную с внутренней функцией I, $I = BS$, где B — произведение Бляшке, S — сингулярная функция, ограниченная в $\mathbb{D}$,

$$B(z) = \prod_{n \geqslant 1} \frac{\bar{a}_n}{|a_n|} \frac{a_n - z}{1 - \bar{a}_n z}, \quad S(z) = \exp\Big(- \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \, d\mu(\zeta) \Big),$$

μ — сингулярная мера на $\mathbb{T}$. В соответствии с рассматриваемым контекстом предполагаем, что $m_1(\operatorname{supp} \mu) = 0$. Положим $Z_B = \bigcup_{n \geqslant 1} \{a_n\}$, $\operatorname{spec} I = \bar{Z}_B \cup \operatorname{supp} \mu$. Предполагаем также, что $m_1(\overline{Z}_B \cap \mathbb{T}) = 0$. Пусть

$$d_0(z) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{dist}(z, \operatorname{spec} I) \tag{5.1}$$

и при $r \geqslant 0$ определим $\nu_r(z)$:

$$\nu_r(z) = \begin{cases} 0, \ z \notin \operatorname{spec} I \\ r+1, \ z \in \operatorname{spec} I \cap \mathbb{T} \\ \text{кратность нуля } \ a_n, \ z = a_n \in \operatorname{spec} I. \end{cases} \tag{5.2}$$

Определим характеристику $d_r(z)$ при $r = 0$ в (5.1), а при $r \geqslant 1$ следующим образом:

$$d_r(z) = \sup \Big\{ \tau : \sum_{|\zeta - z| < \tau, \zeta \in \operatorname{spec} I} \nu_r(\zeta) \leqslant r \Big\}, \quad z\mathbb{T} \cap \operatorname{spec} I. \tag{5.3}$$

В определении (5.3) в случае $B_\tau(z) \cap \operatorname{spec} I = \varnothing$ сумма полагается равной нулю.

Лемма 8. *Пусть функция* $f \in C_A$, $f \not\equiv 0$ *и удовлетворяет условию* (1.3) *с* $0 < \alpha < 1$, $r \geqslant 0$, I — *внутренняя функция, и* $f/I \in H^\infty$, *характеристика* $d_r(z)$ *построена по функции* I *в* (5.1) *или* (5.3). *Тогда существует неотрицательная функция* $\psi(\zeta, \theta)$, *определенная на* $\mathbb{T} \times [0, \pi]$, *и постоянная* $c_{5.1}$, *не зависящая от* θ, *для которых справедливы следующие соотношения*:

$$\int\limits_{\mathbb{T}} \psi^{p(\zeta)}(\zeta, \theta)|d\zeta| \leqslant c_{5.1}; \tag{5.4}$$

функция $\theta^\alpha \psi(\zeta, \theta)$ *при фиксированном* $\zeta \in \mathbb{T}$ *не убывает, как функция от* θ;

$$|f(\zeta)| \leqslant d_r^{r+\alpha}(\zeta)\psi(\zeta, d_r(\zeta)), \zeta \in \mathbb{T} \setminus \operatorname{spec} I; \tag{5.5}$$

$$|f^{(\nu)}(\zeta)| \leqslant d_r^{r+\alpha-\nu}(\zeta)\psi(\zeta, d_r(\zeta)), \zeta \in \mathbb{T} \setminus \operatorname{spec} I, 1 \leqslant \nu \leqslant r. \tag{5.6}$$

Доказательство. Фиксируем $\zeta \in \mathbb{T}$ и пусть $\rho = d_r(\zeta)$. Из определений (5.1)–(5.3) следует, что существует не менее $r+1$ точки $\zeta_1, \ldots, \zeta_{r+1}$, среди которых могут быть совпадающие, принадлежащие $\bar{B}_\rho(\zeta) \cap \operatorname{spec} I$ (будем при таком подсчете точек из $\operatorname{spec} I$ считать каждую точку $z \in \operatorname{spec} I \cap \mathbb{T}$ $r+1$ раз). Поскольку уже отмечалось, что условие (1.3) и $f \in C_A$ влекут включение $f \in \Lambda^{r+\alpha-\frac{1}{p_-}}$, Λ^β — класс Гельдера порядка β, то в случае, когда $\zeta_j \in \operatorname{spec} I$ и кратность ζ_j равна $\nu+1$ (в частности, при $\zeta_j \in \mathbb{T}$ кратность ζ_j равна $r+1$), то $f(\zeta_j) = 0$ и $f^{(k)}(\zeta_j) = 0$, $1 \leqslant k \leqslant \nu$. Определение (4.1) характеристики $\Delta^{r+\alpha} f(\zeta, h)$ влечет неравенство

$$\frac{|f[\zeta, \zeta_1, \ldots, \zeta_r] - f[\zeta_1, \ldots, \zeta_{r+1}]|}{\rho^\alpha} \leqslant \Delta^{r+\alpha} f(\zeta, \rho). \tag{5.7}$$

В силу замечания о нулях функций f и $f^{(k)}$ имеем равенство

$$f[\zeta_1, \ldots, \zeta_{r+1}] = 0, \tag{5.8}$$

и, далее,

$$f[\zeta, \zeta_1, \ldots, \zeta_r] = \frac{f(\zeta)}{(\zeta - \zeta_1) \ldots (\zeta - \zeta_r)}. \tag{5.9}$$

Тогда (5.7) и (5.9) влекут оценку

$$|f(\zeta)| \leqslant \rho^\alpha |(\zeta - \zeta_1) \ldots (\zeta - \zeta_r)| \Delta^{r+\alpha} f(\zeta, \rho) \leqslant \rho^{r+\alpha} \Delta^{r+\alpha} f(\zeta, \rho). \tag{5.10}$$

Аналогично, определение (4.1) с заменой в предыдущем рассуждении точки ζ на точку $\zeta_* \in \bar{B}_\rho(\zeta) \cap \overline{\mathbb{D}}$ дает неравенство

$$|f(\zeta_*)| \leqslant \rho^{r+\alpha} \Delta^{r+\alpha} f(\zeta, \rho). \tag{5.11}$$

Пусть $\zeta_0 = \big(1 - \frac{\rho}{2}\big)\zeta$, $\gamma = \{\zeta : |\zeta - \zeta_0| = \frac{\rho}{4}\}$. Поскольку $\gamma \subset \overline{B_\rho(\zeta)} \cap \overline{\mathbb{D}}$, то для точек $\zeta_* \in \gamma$ выполняется неравенство (5.11), тогда (5.11) и формула Коши влекут соотношения

$$|f^{(k)}(\zeta_0)| \leqslant c\rho^{r+\alpha-k}\Delta^{r+\alpha}f(\zeta,\rho),\ 1 \leqslant k \leqslant r. \tag{5.12}$$

Применяя формулу Тейлора в форме

$$\begin{aligned} f^{(\nu)}(\zeta) &= \sum_{k=0}^{r-\nu} \frac{f^{(\nu+k)}(\zeta_0)}{k!} \cdot (\zeta - \zeta_0)^k \\ &\quad + \frac{1}{(r-\nu-1)!} \int\limits_{\zeta_0}^{\zeta} (\zeta - \tau)^{r-\nu-1}(f^{(r)}(\tau) - f^{(r)}(\zeta_0))\, d\tau, \nu \leqslant r-1 \end{aligned} \tag{5.13}$$

из (5.12) и (5.13) получим оценку

$$|f^{(\nu)}(\zeta)| \leqslant c\rho^{r+\alpha-\nu}\Delta^{r+\alpha}f(\zeta,\rho) + c\rho^{r-\nu-1}\int\limits_{\zeta_0}^{\zeta} |f^{(r)}(\zeta) - f^{(r)}(\zeta_0)||d\zeta| \tag{5.14}$$

Если в определении разделеных разностей $f[z_0,\dots,z_r]$ положить $z_0 = z_r = z$, то выполняется соотношение $f[z_0,\dots,z_r] = c_r f^{(r)}(z)$, поэтому

$$|f^{(r)}(\tau) - f^{(r)}(\zeta_0)| = \frac{1}{c_r}|f\underbrace{[\tau,\dots,\tau]}_{r+1} - f\underbrace{[\zeta_0,\dots,\zeta_0]}_{r+1} \leqslant c\rho^\alpha\Delta^{r+\alpha}f(\zeta,p), \tag{5.15}$$

тогда (5.14) и (5.15) дают оценку

$$|f^{(\nu)}(\zeta)| \leqslant c\rho^{\alpha+r-\nu}\Delta^{r+\alpha}f(\zeta,\rho), \quad 1 \leqslant \nu \leqslant r-1. \tag{5.16}$$

В случае $\nu = r$ из (5.12) находим, что

$$|f^{(r)}(\zeta_0)| \leqslant \rho^\alpha\Delta^{r+\alpha}f(\zeta,\rho), \tag{5.17}$$

тогда

$$\begin{aligned} |f^{(r)}(\zeta)| &\leqslant |f^{(r)}(\zeta) - f^{(r)}(\zeta_0)| + |f^{(r)}(\zeta_0)| \\ &= \frac{1}{c_r}|f\underbrace{[\zeta,\dots,\zeta]}_{r+1} - f\underbrace{[\zeta_0,\dots,\zeta_0]}_{r+1} + |f^{(r)}(\zeta_0)| \leqslant c\rho^\alpha\Delta^{\tau+\alpha}f(\zeta,\rho). \end{aligned} \tag{5.18}$$

Полагая $\psi(\zeta,h) = c'\Delta^{r+\alpha}f(\zeta,h)$, где выбор c' задается неравенствами (5.10), (5.16) и (5.18), из указанных неравенств, леммы 7 и определения (4.1) получаем утверждения (5.4)–(5.6) леммы 8. Лемма 8 доказана. □

Для формулировки следующей леммы нам понадобится еще одна характеристика. Пусть $z \in \mathbb{T}$, $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$. Положим

$$\Delta_\varepsilon^{r+\alpha} f(z,\delta) = \sup_{h \geqslant \delta} \Big(\frac{\delta}{h}\Big)^\varepsilon \Delta^{r+\alpha} f(z,h). \tag{5.19}$$

Лемма 9. *Пусть z, $\zeta \in \mathbb{T}$, $r \geqslant 0$, $z \neq \zeta$, $\tau > 0$. Тогда справедлива оценка*

$$|f(z) - f(\zeta) - \sum_{\nu=1}^{r} \frac{f^{(\nu)}(\zeta)}{\nu!}(z-\zeta)^\nu| \leqslant c_{r,\alpha} \frac{(|z-\zeta|+\tau)^{r+\alpha+\varepsilon}}{\tau^\varepsilon} \Delta_\varepsilon^{r+\alpha} f(\zeta,\tau). \tag{5.20}$$

Доказательство. Рассмотрим более сложный случай $r \geqslant 1$. Имеем следующие соотношения:

$$\left| f(z) - f(\zeta) - \sum_{\nu=1}^{r} \frac{f^{(\nu)}(\zeta)}{\nu!}(z-\zeta)^\nu \right| = \frac{1}{(r-1)!} \left| \int_\zeta^z (z-s)^{r-1} (f^{(r)}(s) \right.$$

$$\left. - f^{(r)}(\zeta)) ds \right| \leqslant \frac{1}{(r-1)!} \int\limits_{[\zeta,z] \cap \bar{B}_\tau(\zeta)} |z-s|^{r-1} \tau^\alpha \frac{|f^{(r)}(s) - f^{(r)}(\zeta)|}{\tau^\alpha} |d\zeta|$$

$$+ \frac{1}{(r-1)!} \int\limits_{[\zeta,z] \setminus \bar{B}_\tau(\zeta)} |z-s|^{r-1} \cdot |s-\zeta|^{\alpha+\varepsilon} \cdot \frac{1}{\tau^\varepsilon} \cdot \frac{\tau^\varepsilon}{|s-\zeta|^{\alpha+\varepsilon}}$$

$$\times \Delta^{r+\alpha} f(\zeta, |s-\zeta|) |ds| \leqslant c'_{r\alpha} \int_\zeta^z |z-s|^{r-1} \cdot \frac{(|s-\zeta|+\tau)^{\alpha+\varepsilon}}{\tau^\varepsilon} \Delta_\varepsilon^{r+\alpha} f(\zeta,\tau) |ds|$$

$$\leqslant c_{r,\alpha} \frac{(|z-\zeta|+\tau)^{r+\alpha+\varepsilon}}{\tau^\varepsilon} \Delta_\varepsilon^{r+\alpha} f(\zeta,\tau).$$

Оценка (5.20) получена, лемма 9 доказана. □

Определим еще несколько объектов. Пусть $z \in \mathbb{T}$, $I \in H^\infty$, I — внутренняя функция, $\rho = d_r(z)$, характеристика $d_r(z)$ построена в (5.1)–(5.3) по функции I. Если $\operatorname{spec} I \cap B_\rho(z) = \varnothing$, полагаем $b_r(\zeta,z) \equiv 1$, $\zeta \in \overline{\mathbb{D}}$; если $\operatorname{spec} I \cap B_\rho(z) \neq \varnothing$, полагаем

$$b_r(\zeta,z) = \prod_{k=1}^{m} \frac{\zeta - a_k(z)}{1 - \zeta \bar{a}_k(z)}, \quad \zeta \in \overline{\mathbb{D}},\ \operatorname{spec} I \cap B_\rho(z) = \bigcup_{k=1}^{m} \{a_k(z)\}. \tag{5.21}$$

При любом определении $b_r(\zeta,z)$ полагаем

$$I_r(\zeta,z) = I(\zeta)/b_r(\zeta,z). \tag{5.22}$$

В процессе дальнейших рассуждений в соотношении (5.36) будет определена постоянная $A_r > 1$, а в соотношении (5.49) постоянная $\sigma_r = \sigma_r(A_r) > 1$.

В нижеследующей лемме 10 предполагаем, что справедливо неравенство
$$\left|I'_{r\zeta}(\zeta,z)\big|_{\zeta=z}\right| \geqslant \frac{A_r}{d_r(z)}. \tag{5.23}$$
В формулировке леммы 10 применяем обозначения $\delta = 1/|I'_{r\zeta}(\zeta,z)|_{\zeta=z}|$, $\tau=\sigma_r\delta$. Выбор σ_r дает соотношение, как будет выяснено в (5.36),
$$\tau \leqslant \frac{1}{4}d_r(z). \tag{5.24}$$
Если (5.23) не выполняется, то лемма 10 следует из леммы 8.

Лемма 10. *Пусть* $0<\alpha<1$, $0<\varepsilon<1-\alpha$, $f/I\in H^1$. *В предположении* (5.23) *существует постоянная* $\sigma_{r,\varepsilon}>0$, *такая, что для* $z\in\mathbb{T}\setminus\operatorname{spec}I$ *справеливы оценки*
$$|f(z)| \leqslant (\sigma_{r,\varepsilon}\delta)^{r+\alpha}\Delta_\varepsilon^{r+\alpha}f(z,\delta) \tag{5.25}$$
$$|f^{(\nu)}(z)| \leqslant (\sigma_{r,\varepsilon}\delta)^{r+\alpha-\nu}\Delta_\varepsilon^{r+\alpha}f(z,\delta), \quad 1\leqslant\nu\leqslant r. \tag{5.26}$$

Доказательство. Положим $z_0=(1-\tau)z$, и пусть
$$\Gamma=\{\zeta:|\zeta-z_0|=\frac{\tau}{12}\} \tag{5.27}$$
Из (5.24) следует, что при $\zeta\in\Gamma$ выполняется условие $|\zeta-z|\leqslant\frac13 d_r(z)$. Стандартные оценки внутренних функций дают существование абсолютной постоянной c_0' такой, что выполнена оценка
$$|I_r(\zeta,z)| \leqslant \exp(-c_0'\tau\cdot|I'_{r\zeta}(\zeta,z)|_{\zeta=z}|), \quad \zeta\in\Gamma. \tag{5.28}$$

Положим
$$M=\Delta_\varepsilon^{r+\alpha}f(z,\sigma_r\delta)=\Delta_\varepsilon^{r+\alpha}f(z,\tau). \tag{5.29}$$
Постоянная σ_r будет определена ниже в соотношении (5.49). Из леммы 9 и определения (5.29) следует неравенство
$$|f(w)| \leqslant |f(z)+\sum_{\nu=1}^{r}\frac{f^{(\nu)}(z)}{\nu!}(w-z)^\nu| + |f(w)-f(z)-\sum_{\nu=1}^{r}\frac{f^{(\nu)}(z)}{\nu!}(w-z)^\nu|$$
$$\leqslant |f(z)|+\sum_{\nu=1}^{r}\frac{|f^{(\nu)}(z)|}{\nu!}|w-z|^\nu + c_{r,\alpha}\frac{(|w-z|+\tau)^{r+\alpha+\varepsilon}}{\tau^\varepsilon}M, \quad w\in\mathbb{T}. \tag{5.30}$$

□

Определим внешнюю в $\overline{\mathbb{D}}$ функцию F_0 равенством
$$|F_0(w)|=|f(z)|+\sum_{\nu=1}^{r}\frac{|f^{(\nu)}(z)|}{\nu!}|w-z|^\nu+c_{r,\alpha}\frac{(|w-z|+\tau)^{r+\alpha+\varepsilon}}{\tau^\varepsilon}M, \ w\in\mathbb{T}. \tag{5.31}$$

Если $F(w)$ — внешний множитель в факторизации Неванлинны для функции f, то из (5.30) и (5.31) заключаем, то при $w \in \overline{\mathbb{D}}$ справедлива оценка

$$|F(w)| \leqslant |F_0(w)|. \tag{5.32}$$

К функции F_0 применима лемма П. М. Тамразова [13, глава 2], которая гарантирует существование абсолютной постоянной c_{abs} такой, что справедлива оценка

$$|F_0(w)| \leqslant c_{abs}\Big(|f(z)| + \sum_{\nu=1}^{r} \frac{|f^{(\nu)}(z)}{\nu!}|w-z|^{\nu} + c_{r,\alpha}\frac{(|w-z|+\tau)}{\tau^{\varepsilon}}^{r+\alpha+\varepsilon} M\Big), \quad w \in \overline{\mathbb{D}}. \tag{5.33}$$

Оценки (5.32) и (5.33) показывают, что с некоторой постоянной $c^1_{r,\alpha}$ при $\zeta \in \Gamma$ выполняется неравенство

$$|F(\zeta)| \leqslant c^1_{r,\alpha}(|f(z)| + \sum_{\nu=1}^{r} \frac{|f^{(\nu)}(z)}{\nu!}|z_0 - z|^{\nu} + \tau^{r+\alpha}M). \tag{5.34}$$

Поскольку $f/I \in H^1$, то из (5.28) и (5.34) заключаем, что при $\zeta \in \Gamma$ имеется оценка

$$\begin{aligned} |f(\zeta)| &\leqslant |I_r(\zeta, z)| \cdot |F(\zeta)| \leqslant \exp\Big(- c_0'\frac{\tau}{\delta}\Big) \\ &\times c^1_{r,\alpha}\Big(|f(z)| + \sum_{\nu=1}^{r} \frac{|f^{(\nu)}(z)|}{\nu!}|z_0 - z)|^{\nu} + \tau^{r+\alpha}M) \\ &= c^1_{r,\alpha}\exp(-c_0'\sigma_r)(|f(z)| + \sum_{\nu=1}^{r} \frac{|f^{(\nu)}(z)|}{\nu!}|z_0 - z|^{\nu} + \tau^{r+\alpha}M). \end{aligned} \tag{5.35}$$

Отметим, что предшествующие неравенства (5.30)–(5.35) выполнялись при любом значении σ_r с единственным ограничением (5.24). Постоянная $c^1_{r,\alpha}$ не зависит от σ_r, постоянная c_0' зависит только от условия (5.24). Итак, полагаем

$$A_r = 4\sigma_r. \tag{5.36}$$

Пусть

$$c^1_{r,\alpha}\exp\big(- c_0'\sigma_r\big) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda, \tag{5.37}$$

$$N \stackrel{\text{def}}{=} |f(z)| + \sum_{\nu=1}^{r} \frac{|f^{(\nu)}(z)|}{\nu!}|z_0 - z|^{\nu} + \tau^{r+\alpha}M. \tag{5.38}$$

В обозначениях (5.37) и (5.38) при $\zeta \in \Gamma$ имеем

$$|f(\zeta)| \leqslant \lambda N \tag{5.39}$$

Из оценки (5.39) и неравенств Коши находим соотношения

$$|f(z_0)| \leqslant \lambda N \tag{5.40}$$

$$|f^{(\nu)}(z_0)| \leqslant 12^\nu \tau^{-\nu}\nu!\lambda N, \quad 1 \leqslant \nu \leqslant r. \tag{5.41}$$

Из (5.40) и (5.41) получаем неравенство

$$\begin{aligned}|f(z_0) + \sum_{\nu=1}^{r} \frac{f^{(\nu)}(z_0)}{\nu!}(z-z_0)^\nu| &\leqslant \lambda N + \sum_{\nu=1}^{r} 12^\nu \cdot \lambda N \\ &< 12^\nu \cdot \lambda N < 12^{r+1} \cdot \lambda N.\end{aligned} \tag{5.42}$$

Учтем, что для $s \in [z_0, z]$ справедливо соотношение

$$|f^{(r)}(s) - f^{(r)}(z_0)| \leqslant \tau^\alpha \Delta^{r+\alpha} f(z,\tau) \leqslant \tau^\alpha \Delta_\varepsilon^{r+\alpha} f(z,\tau). \tag{5.43}$$

Используя (5.42) и (5.43), получаем последующие оценки:

$$\begin{aligned}&\left|f(z) - f(z_0) - \sum_{\nu=1}^{r} \frac{f^{\nu}(z_0)}{\nu!}(z-z_0)^\nu\right| \\ &\quad = \frac{1}{(r-1)!}\Bigg|\int\limits_{z_0}^{z} (z-s)^{r-1}(f^{(r)}(s) \\ &\qquad - f^{(r)}(z_0))\,ds| \leqslant \frac{1}{(r-1)!}\tau^\alpha \Delta_\varepsilon^{r+\alpha} f(z,\tau) \int\limits_{z_0}^{z} |z-s)^{r-1}|ds| \\ &\quad = \frac{1}{r!}\tau^{r+\alpha}\Delta_\varepsilon^{r+\alpha} f(z,\tau), \\ &|f(z)| \leqslant \left|f(z_0) + \sum_{\nu=1}^{r} \frac{f^{(\nu)}(z_0)}{\nu!}(z-z_0)^\nu\right| \\ &\qquad + \frac{1}{r!}\tau^{r+\alpha}\Delta_\varepsilon^{r+\alpha} f(z,\tau) < 12^{r+1} \cdot \lambda N + \frac{1}{r!}\tau^{r+\alpha} M.\end{aligned} \tag{5.44}$$

Записывая для функций $f^{(\nu)}$, $1 \leqslant \nu \leqslant r$, неравенства, аналогичные (5.42) и применяя оценку (5.43), находим соотношения

$$\begin{aligned}|f^{(\nu)}(z)| &\leqslant \left|f^{(\nu)}(z_0) + \sum_{k=1}^{r-\nu} \frac{f^{(\nu+k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k\right| + |f^{(\nu)}(z) - f^{(\nu)}(z_0) \\ &- \sum_{k=1}^{r-\nu} \frac{f^{\nu+k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k\Bigg| < 12^{r+1} \cdot \tau^{-\nu}\lambda N + \frac{1}{(r-\nu)!} r^{r+\alpha-\nu} M.\end{aligned} \tag{5.45}$$

Теперь из (5.44) и (5.45) заключаем, что

$$\begin{aligned}|f(z)| &+ \sum_{\nu=1}^{r}\frac{|f^{(\nu)}(z)|}{\nu!}|z-z_0|^{\nu} < 12^{r+1}\lambda N + \frac{1}{r!}\tau^{r+\alpha}M\\ &+ \sum_{\nu=1}^{r}\Big(12^{r+1}\lambda N\cdot\tau^{-\nu} + \frac{1}{(r-\nu)!}\tau^{r+\alpha-\nu}M\Big)\frac{\tau^{\nu}}{\nu!} < 3\cdot 12^{r+1}\lambda N\\ &+ 2\tau^{r+\alpha}M = 3\cdot 12^{r+1}\lambda\Big(|f(z)| + \sum_{\nu=1}^{r}\frac{|f^{(\nu)}(z)|}{\nu!}|z-z_0|^{\nu}\Big)\\ &+ (3\cdot 12^{r+1}\lambda + 2)\cdot M\cdot\tau^{r+\alpha}.\end{aligned} \tag{5.46}$$

Осуществим теперь выбор σ_r. Находим σ_r из равенства

$$3\cdot 12^{r+1}\lambda = 3\cdot 12^{r+1}\cdot c^{1}_{r,\alpha}\exp(-c'_0\sigma_r) = \frac{1}{2}\,. \tag{5.47}$$

Теперь выбор σ_r из (5.47), а с ним и выбор λ, в применении к оценке (5.46) влекут соотношения

$$\begin{aligned}&|f(z)| + \sum_{\nu=1}^{r}\frac{|f^{(\nu)}(z)|}{\nu!}\tau^{\nu} < \frac{1}{2}\Big(|f(z)| + \sum_{\nu=1}^{r}\frac{|f^{(\nu)}(z)|}{\nu!}\tau^{\nu}\Big) + \frac{5}{2}\tau^{r+\alpha}M,\\ &|f(z)| + \sum_{\nu=1}^{r}\frac{|f^{(\nu)}(z)|}{\nu!}\tau^{\nu} < 5\tau^{r+\alpha}M,\end{aligned} \tag{5.48}$$

и (5.49) влечет оценки

$$|f(z)| < 5\tau^{r+\alpha}M \tag{5.49}$$

$$|f^{(\nu)}(z)| < 5\nu!\tau^{r+\alpha-\nu}M, \quad 1\leqslant\nu\leqslant r. \tag{5.50}$$

Для того, чтобы из оценок (5.49) и (5.50) вывести оценки (5.25) и (5.26)леммы 10, нам потребуется следующее утверждение.

Утверждение 2. *Пусть* $g(\tau) = \Delta^{r+\alpha}f(z,\tau)$, $g_\varepsilon(\tau) = \sup_{h\geqslant\tau}\frac{\tau^\varepsilon}{h^\varepsilon}g(h)$. *Тогда для* $0<x<y$ *выполнено соотношение*

$$g_\varepsilon(y) \leqslant \Big(\frac{y}{x}\Big)^{\varepsilon}g_\varepsilon(x). \tag{5.51}$$

Доказательство утверждения 2. Фиксируем $0<x<y$ и возьмем произвольное $\eta>0$. Выберем $h_0\geqslant y$ так, чтобы выполнялось соотношение

$$g_\varepsilon(y) \leqslant (1+\eta)\frac{y^\varepsilon}{h_0^\varepsilon}g(h_0);$$

далее,

$$\frac{y^\varepsilon}{h_0^\varepsilon}g(h_0)=\Big(\frac{y}{x}\Big)^\varepsilon\cdot\Big(\frac{x}{h_0}\Big)^\varepsilon g(h_0)\leqslant\Big(\frac{y}{x}\Big)^\varepsilon g_\varepsilon(x),\quad g_\varepsilon(y)\leqslant(1+\eta)\cdot\Big(\frac{y}{x}\Big)^\varepsilon g(x). \tag{5.52}$$

Из произвольности $\eta > 0$ и (5.52) следует (5.51). □

Закончим доказательство леммы 10. Поскольку

$$\tau = \sigma_r\delta = \sigma_r/\big|I'_{r(\zeta)}(\zeta,z)\big|_{\zeta=z}\big|,$$

то (5.51) влечет соотношение

$$\Delta_\varepsilon^{r+\alpha}f(z,\tau)\leqslant\sigma_r^\varepsilon\Delta_\varepsilon^{r+\alpha}f(z,\delta). \tag{5.53}$$

Теперь оценки (5.49), (5.50) и (5.53) влекут соотношения (5.25) и (5.26). Лемма 10 доказана.

§6. Доказательство теорем 1 и 2

Далее нам понадобится следующее утверждение. Положим $\psi(\zeta,\delta) = \Delta^{r+\alpha}f(\zeta,\delta)$, $\zeta\in\mathbb{T}$, $\delta>0$. Отметим, что функция $\delta^\alpha\psi(\zeta,\delta)$,

$$\delta^\alpha\psi(\zeta,\delta)=\sup_{z_k^{(j)}\in\overline{B}_\delta(\zeta)}|f[z_0^{(1)},z_1^{(1)},\dots,z_r^{(1)}]-f[z_0^{(2)},z_1^{(2)},\dots,z_r^{(2)}]|,$$

не убывает при возрастании δ. Положим

$$\psi_\varepsilon(\zeta,\delta)=\Delta_\varepsilon^{r+\alpha}f(\zeta,\delta)=\sup_{h\geqslant\delta}\Big(\frac{\delta}{h}\Big)^\varepsilon\psi(\zeta,h). \tag{6.1}$$

Лемма 11. *Пусть $0<\varepsilon<1-\alpha$. Существует постоянная $c_{6.1}$, зависящая от f, $p(\,\cdot\,)$, α и такая ε, что при $0<\delta\leqslant 2$ справедливо неравенство*

$$\int_{\mathbb{T}}\psi_\varepsilon^{p(\zeta)}(\zeta,\delta)|d\zeta|\leqslant c_{6.1}. \tag{6.2}$$

Доказательство. Напомним соотношение (4.3) в обозначении $\psi(\zeta,\delta)$:

$$\int_{\mathbb{T}}\psi(\zeta,\delta)^{p(\zeta)}|d\zeta|\leqslant c_{4.1},\quad 0<\delta\leqslant 2. \tag{6.3}$$

Как уже отмечалось, для $0<x<y$ выполнено $x^\alpha\psi(\zeta,x)\leqslant y^\alpha\psi(\zeta,y)$, что при $2^{n-1}h\leqslant x\leqslant 2^n h$ дает неравенство

$$\psi(\zeta,x)\leqslant 2^\alpha\psi(\zeta,2^n h). \tag{6.4}$$

Фиксируем $\delta>0$, выберем $h_0\geqslant\delta$ так, чтобы имелось соотношение

$$\psi_\varepsilon(\zeta,\delta)\leqslant 2\Big(\frac{\delta}{h_0}\Big)^\varepsilon\psi(\zeta,h_0). \tag{6.5}$$

Пусть $n \geqslant 1$ таково, что $2^{n-1}\delta \leqslant h_0 < 2^n\delta$. Из (6.4) и (6.5) находим, что

$$\psi_\varepsilon(\zeta,\delta) \leqslant 2 \cdot \frac{1}{(2^{n-1})^\varepsilon} \cdot 2^\alpha \psi(\zeta, 2^n\delta) = 2^{1+\alpha+\varepsilon} \cdot \frac{1}{2^{n\varepsilon}} \psi(\zeta, 2^n\delta). \tag{6.6}$$

Положим

$$\Psi(\zeta,\delta) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n\varepsilon} \psi(\zeta, 2^n\delta), \tag{6.7}$$

(6.6) и (6.7) влекут

$$\psi_\varepsilon(\zeta,\delta) \leqslant 2^{1+\varepsilon+\alpha}\Psi(\zeta,\delta),$$

и тогда с некоторой постоянной $c_{6.2}$ имеем оценку

$$\int\limits_{\mathbb{T}} \psi_\varepsilon^{p(\zeta)}(\zeta,\delta)|d\zeta| \leqslant c_{6.2} \int\limits_{\mathbb{T}} \Psi^{p(\zeta)}(\zeta,\delta)|d\zeta|. \tag{6.8}$$

Положим

$$\frac{1}{p'(\zeta)} + \frac{1}{p(\zeta)} = 1,$$

неравенство Гельдера влечет соотношения

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathbb{T}} \Psi^{p(\zeta)}(\zeta,\delta)|d\zeta| &\leqslant \int\limits_{\mathbb{T}} \left(\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2^{n\varepsilon}}\right)^{\frac{p(\zeta)}{p'(\zeta)}} \cdot \left(\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2^{n\varepsilon}} \psi^{p(\zeta)}(\zeta, 2^n\delta)\right)|d\zeta| \\ &\leqslant c_{6.3} \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2^{n\varepsilon}} \int\limits_{\mathbb{T}} \psi^{p(\zeta)}(\zeta, 2^n\delta)|d\zeta| \leqslant c_{6.4}, \end{aligned}$$

что вместе с (6.8) доказывает лемму 1.1. □

Доказательство теоремы 1. Пусть f_0 — продолжение f в $\mathbb{C}\setminus\overline{\mathbb{D}}$, построенное в лемме 4. Поскольку $H^{p(\cdot)}_{r+\alpha} \subset H^{p-}_{r+\alpha}$ то из условия $f/I \in H^1$ следует $f/I \in H^{p-}_{r+\alpha}$ [8], значит, f_0/I является продолжением функции f/I в $\mathbb{C}\setminus\overline{\mathbb{D}}$ и к функции f_0/I можно применять формулу Грина. Поскольку при $|\zeta| > 1$ имеем $(f_0(\zeta)/I(\zeta))'_{\bar\zeta} = f'_{0\bar\zeta}(\zeta)/I(\zeta)$, то справедлива формула

$$\frac{f(z)}{I(z)} = -\frac{1}{\pi} \int\limits_{|\zeta|>1} \left(\frac{f_0(\zeta)}{I(\zeta)}\right)'_{\bar\zeta} \frac{dm_2(\zeta)}{\zeta - z} = -\frac{1}{\pi} \int\limits_{|\zeta|>1} \frac{f'_{0\bar\zeta}(\zeta)}{I(\zeta)} \frac{dm_2(\zeta)}{\zeta - z}, \quad z \in \overline{\mathbb{D}}. \tag{6.9}$$

При $|\zeta| > 1$ имеем $\frac{1}{|I(\zeta)|} < 1$, поэтому из соотношения (3.7) леммы 4 получаем неравенство

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\rho\mathbb{T}} \left|\frac{(f_0(\zeta)/I(\zeta))'_\zeta}{c_{3.2}(\rho-1)^{r+\alpha-1}}\right|^{p\left(\frac{\zeta}{\rho}\right)} \frac{1}{\rho}|d\zeta| \\
&= \int\limits_{\rho\mathbb{T}} \left(\frac{1}{|I(\zeta)|}\right)^{p\left(\frac{\zeta}{\rho}\right)} \left|\frac{f'_{0\overline{\zeta}(\zeta)}}{c_{3.2}(\rho-1)^{r+\alpha-1}}\right|^{p\left(\frac{\zeta}{\rho}\right)} \frac{1}{\rho}|d\zeta| \qquad (6.10)\\
&\leqslant \int\limits_{\rho\mathbb{T}} \left|\frac{f'_{0\overline{\zeta}(\zeta)}}{c_{3.2}(\rho-1)^{r+\alpha-1}}\right|^{p\left(\frac{\zeta}{\rho}\right)} \frac{1}{\rho}|d\zeta| \leqslant 1, \quad \rho > 1.
\end{aligned}$$

Теперь утверждение теоремы 1 следует из (6.9), (6.10) и леммы 4. $\square$

Доказательство теоремы 2. Начнем со следующего утверждения о внутренних функциях. Пусть I — внутреняя функция, $I \in H^\infty$, $\zeta_0 \in \mathbb{T}\setminus \operatorname{spec} I$, $\delta = \min(\operatorname{dist}(\zeta_0, \operatorname{spec} I),\ 1/|I'(\zeta_0)|$. Тогда для $\zeta \in \overline{B}_{\frac{\delta}{4}}(\zeta_0) \cap \overline{\mathbb{D}}$ выполняется соотношение

$$|(I(\zeta))^{(k)}| \leqslant c \cdot 12^k \cdot k!\delta^{-k}. \qquad (6.11)$$

Для того, чтобы установить (6.11), применим формулу Коши для $(I(\zeta))^{(k)}$ к окружности $\gamma_\zeta = \{\lambda : |\lambda - \zeta| = \frac{\delta}{12}\}$ и учтем, что для $\lambda \in \gamma_\zeta$ выполнено $|\lambda - \zeta_0| \leqslant \frac{\delta}{3}$, и существует абсолютная постоянная $c''_0 > 0$ такая, что при $\lambda \in \overline{B}_{\frac{\delta}{3}}(\zeta_0)$ справедливо неравенство $|I(\lambda)| \leqslant \exp c''_0$.

Продолжим доказательство теоремы 2. В силу леммы 6 для того, чтобы проверить условие $fI \in H^{p(\,\cdot\,)}_{r+\alpha}$, достаточно установить существование постоянной $c_{6.5}$, не зависящей от h, $0 < h < 1$, для которой справедливо неравенство

$$\int\limits_{|\zeta|=1-h} |(fI)^{(r+1)}(\zeta) h^{1-\alpha}|^{p\left(\frac{\zeta}{|\zeta|}\right)} |d\zeta| \leqslant c_{6.5}. \qquad (6.12)$$

Поскольку $(fI)^{(r+1)} = \sum_{\nu=0}^{r+1} C^\nu_{r+1} f^{(\nu)} I^{(r+1-\nu)}$ и для $f^{(r+1)} \cdot I$ и условия $f \in H^{p(\,\cdot\,)}_{r+\alpha}$ и леммы 6 имеем оценку

$$\int\limits_{|\zeta|=1-h} |f^{(r+1)}(\zeta) I(\zeta) h^{1-\alpha}|^{p\left(\frac{\zeta}{|\zeta|}\right)} |d\zeta| \leqslant \int\limits_{|\zeta|=1-h} |f^{(r+1)}(\zeta) h^{1-\alpha}|^{p\left(\frac{\zeta}{|\zeta|}\right)} |d\zeta| \leqslant c_{6.6}, \quad (6.13)$$

то соотношение (6.12) будет следовать из (6.13) и неравенств

$$\int\limits_{|\zeta|=1-h} |f^{(\nu)}(\zeta)I^{(r+1-\nu)}(\zeta)h^{1-\alpha)}|^{p\left(\frac{\zeta}{|\zeta|}\right)}|d\zeta| \leqslant c_{6.7}, \quad 0\leqslant \nu\leqslant r. \tag{6.14}$$

Для проверки (6.14) возьмем $\zeta_0\in\mathbb{T}\backslash\operatorname{spec} I$ и пусть $\zeta=(1-h)\zeta_0$. Из условия на кратность нулей функции f в круге $\mathbb{D}$ и определения $I_r(z,\zeta_0)$ в (5.21) и (5.22) следует равенство $I_r(z,\zeta_0)=I(z)$, $z\in\mathbb{D}$, поэтому $I'_{rz}(z,\zeta_0)|_{z=\zeta_0}=I'(\zeta_0)$; то же условие на кратность нулей функции f и определение (5.3) влечет равенство $d_r(\zeta_0)=\operatorname{dist}(\zeta_0,\operatorname{spec} I)$. Отметим, что в таком случае леммы 8 и 10 справедливы с заменой соответственно $d_r(\zeta_0)$ на $\operatorname{dist}(\zeta_0,\operatorname{spec} I)$ и $I'_r(z,\zeta_0)\big|_{z=\zeta_0}$ на $I'(\zeta_0)$. Пусть

$$\delta \overset{\text{def}}{=} \min(\operatorname{dist}(\zeta_0,\operatorname{spec} I), 1/|I'(\zeta_0)|). \tag{6.15}$$

Рассмотрим два возможных случая.

Случай 1: $h\leqslant\frac{\delta}{4}$. Пусть $0<\varepsilon<1-\alpha$, $\psi_\varepsilon(\zeta,\delta)=\Delta_\varepsilon^{r+\alpha}f(\zeta,\delta)$. Из лемм 8 и 10 заключаем, что с некоторой постоянной $c_{6.8}=c_{6.8}(r,\alpha,f,I)$ справедливы неравенства

$$|f^{(\nu)}(\zeta_0|\leqslant c_{6.8}\delta^{r+\alpha-\nu}\psi_\varepsilon(\zeta_0,\delta), \quad 0\leqslant\nu\leqslant r. \tag{6.16}$$

Далее,

$$f^{(r)}(\zeta)=f^{(r)}(\zeta_0)+\big(f^{(r)}(\zeta)-f^{(r)}(\zeta_0)\big); \tag{6.17}$$

$$\begin{aligned} f^{(\nu)}(\zeta)&=f^{(\nu)}(\zeta_0)+\sum_{k=1}^{r-\nu}\frac{f^{(\nu+k)}(\zeta_0)}{k!}(\zeta-\zeta_0)^k\\ &+\frac{1}{(r-\nu-1)!}\int\limits_{\zeta_0}^{\zeta}(\zeta-s)^{r-\nu-1}(f^{(r)}(s)-f^{(r)}(\zeta_0))\,ds, \quad 0\leqslant\nu\leqslant r-1. \end{aligned} \tag{6.18}$$

Из соотношения

$$|f^{(r)}(s)-f^{(r)}(\zeta_0)|\leqslant\delta^\alpha\psi_\varepsilon(\zeta_0,\delta), s\in[\zeta_0,\zeta] \tag{6.19}$$

оценок (6.16), лемм 8 и 10, (6.17) и (6.18) следует

$$\begin{aligned} |f^{(\nu)}(\zeta)|&\leqslant c_{6.9}(\delta^{r-\nu+\alpha}\psi_\varepsilon(\zeta_0,\delta)+\sum_{k=1}^{r-\nu}\delta^{r-\nu-k+\alpha}\psi_\varepsilon(\zeta_0,\delta)h^k+\delta^\alpha\psi_\varepsilon(\zeta_0,\delta))\\ &\leqslant c_{6.10}\delta^{r-\nu+\alpha}\psi_\varepsilon(\zeta_0,\delta),\ 0\leqslant\nu\leqslant r. \end{aligned} \tag{6.20}$$

Отметим, что при $\nu=r$ используем (6.16), (6.17) и (6.19). Применяя неравенство (6.11), получим оценку

$$|I^{(r+1-\nu)}(\zeta)|\leqslant c_{6.11}\delta^{\nu-r-1}, \tag{6.21}$$

к (6.20) и (6.21) влекут соотношение

$$\begin{aligned} h^{1-\alpha}|f^{(\nu)}(\zeta)|\cdot|I^{(r+1-\nu)}(\zeta)| &\leqslant c_{6.12}h^{1-\alpha}\cdot\delta^{r-\nu+\alpha}\psi_\varepsilon(\zeta_0,\delta)\delta^{\nu-r-1}\\ &= c_{6.12}h^{1-\alpha}\delta^{\alpha-1}\psi_\varepsilon(\zeta_0,\delta),\quad 0\leqslant\nu\leqslant r. \end{aligned}\tag{6.22}$$

Применяя к $\psi_\varepsilon(\zeta_0,\delta)$ неравенство (5.53), из (6.22) заключаем, что

$$\begin{aligned} c_{6.12}h^{1-\alpha}\delta^{\alpha-1}\psi_\varepsilon(\zeta_0,\delta) &\leqslant c_{6.12}h^{1-\alpha}\delta^{\alpha-1}\cdot\Bigl(\frac{\delta}{h}\Bigr)^{\varepsilon}\psi_\varepsilon(\zeta_0,h)\\ &= c_{6.12}\Bigl(\frac{h}{\delta}\Bigr)^{1-\alpha-\varepsilon}\psi_\varepsilon(\zeta_0,h)\leqslant c_{6.12}\psi_\varepsilon(\zeta_0,h). \end{aligned}\tag{6.23}$$

Случай 2: $h>\frac{\delta}{4}$. Учтем, что для $|I^{(k)}(\zeta)|$ в этом случае справедлива оценка

$$|I^{(k)}(\zeta)|\leqslant k!h^{-k}.\tag{6.24}$$

Будем использовать равенства (6.17) и (6.18), а также неравенства (6.16). Учтем также, что в случае 2 при $s\in[\zeta_0,\zeta]$ будет выполняться оценка

$$|f^{(r)}(s)-f^{(r)}(\zeta_0)|\leqslant h^{\alpha}\psi_\varepsilon(\zeta_0,h),\tag{6.25}$$

тогда получатся неравенства

$$|f^{(\nu)}(\zeta)|\leqslant c_{6.13}(h^{r-\nu}\delta^{\alpha}\psi_\varepsilon(\zeta_0,\delta)+h^{r-\nu+\alpha}\psi_\varepsilon(\zeta_0,h)).\tag{6.26}$$

Из того, что функция от t $t^{\alpha}\Delta^{r+\alpha}f(\zeta_0,t)$ не убывает, следует, что и функция $t^{\alpha}\psi_\varepsilon(\zeta_0,t)$ не убывает, поэтому из (6.26), при выводе которого учтено (6.25), получим

$$|f^{(\nu)}(\zeta)|\leqslant 2c_{6.13}h^{r-\nu+\alpha}\psi_\varepsilon(\zeta_0,h),\quad 0\leqslant\nu<r.\tag{6.27}$$

Из (6.24) и (6.27) заключаем, что в случае 2

$$\begin{aligned} h^{1-\alpha}|f^{(\nu)}(\zeta)I^{(r+1-\nu)}(\zeta)| &\leqslant c_{6.14}h^{1-\alpha}\cdot h^{r-\nu+\alpha}\psi_\varepsilon(\zeta_0,h)\cdot h^{\nu-r-1}\\ &= c_{6.14}\psi_\varepsilon(\zeta_0,h),\quad 0\leqslant\nu\leqslant r. \end{aligned}\tag{6.28}$$

Таким образом, рассмотрение случаев 1 и 2 влечет неравенства

$$\begin{aligned} &h^{1-\alpha}|f^{(\nu)}(\zeta)I^{(r+1-\nu)}(\zeta)|\leqslant c\psi_\varepsilon(\zeta_0,h),\\ &\qquad |\zeta|=1-h,\quad \zeta_0\notin\operatorname{spec}I,\quad 0\leqslant\nu\leqslant r. \end{aligned}\tag{6.29}$$

Поскольку $\mathrm{mes}_1(\operatorname{spec}I\cap\mathbb{T})=0$, то лемма 5, лемма 11 и (6.29) влекут неравенства

$$\int\limits_{|\zeta|=1-h}\Bigl(h^{1-\alpha}|f^{(\nu)}(\zeta)I^{(r+1-\nu)}(\zeta)|\Bigr)^{p\left(\frac{\zeta}{|\zeta|}\right)}|d\zeta|\leqslant c_{6.7},\quad 0\leqslant\nu\leqslant r,$$

что и влечет неравенство (6.14). Теорема 2 доказана. □

Автор благодарен рецензенту за замечания, которые заметно улучшили работу.

Список литературы

[1] Хавин В. П., *О факторизации аналитических функций, гладких вплоть до границы*, Зап. науч. семин. ЛОМИ **22** (1971), 202–205.

[2] Rudin W., *The closed ideals in an algebra of analytic functions*, Canad. J. Math. **9** (1957), no. 3, 426–434.

[3] Carleson L., *A representation formula for the Dirichlet integral*, Math. Z. **73** (1960), no. 2, 190–196.

[4] Коренблюм Б. И., Королевич В. С., *Об аналитических функциях, регулярных в круге и гладких на его границе*, Мат. заметки **7** (1970), №2, 165–172.

[5] Шамоян Ф. А., *Деление на внутреннюю функцию в некоторых пространствах аналитических функций*, Зап. науч. семин. ЛОМИ **22** (1971), 206–208.

[6] Виноградов С. А., Широков Н. А., *Факторизация аналитических функций с производной из H^p*, Зап. науч. семин. ЛОМИ **22** (1971), 8–27.

[7] Гурарий В. П., *Факторизация абсолютно сходящихся рядов Тейлора и интегралов Фурье*, Зап. науч. семин. ЛОМИ **30** (1972), 15–32.

[8] Дынькин Е. М., *Конструктивная характеристика классов С. Л. Соболева и О. В. Бесова*, Тр. Мат. ин-та АН СССР **155** (1981), 41–76.

[9] Shirokov N. A., *Analytic functions smooth up to the boundary*, Lecture Notes in Math., vol. 1312, Springer-Verlag, Berlin, 1988.

[10] Широков Н. А., *Внутренние функции в аналитических классах О. В. Бесова*, Алгебра и анализ **8** (1996), №4, 193–221.

[11] Широков Н. А., *Внешние функции из аналитических классов О. В. Бесова*, Зап. науч. семин. ПОМИ **217** (1994), 172–217.

[12] Cruz-Uribe D. V, Fiorenza A., *Variable Lebesgue spaces. Foundation and harmonic analysis*, Appl. Numerical Harmonic Analysis, Birkhäuser, Heidelberg, 2013.

[13] Дьяконов К. М., *Гладкие функции и коинвариантные подпространства оператора сдвига*, Алгебра и анализ **4** (1992), №5, 117–147.

[14] Dyakonov K. M., *Blaschke products and nonideal ideals in higher order Lipschitz algebras*, Алгебра и анализ **21** (2009), №6, 182–201.

[15] Тамразов П. М., *Гладкости и полиномиальные приближения*, Наукова думка, Киев, 1975.

СПбГУ и НИУ ВШЭ Санкт-Петербург
E-mail: Nikolai.Shirokov@gmail.com

Поступило 10 марта 2019 г.