A. S. Starkov, On recovering of the density in the plane domain from incomplete spectral data, *Zap. Nauchn. Sem. POMI*, 1997, Volume 239, 218–224

А. С. Старков

О ВОССТАНОВЛЕНИИ ПЛОТНОСТИ В ПЛОСКОЙ ОБЛАСТИ ПО НЕПОЛНЫМ СПЕКТРАЛЬНЫМ ДАННЫМ

0. В работе рассматривается обратная спектральная задача для акустического оператора A_ρ:

$$\begin{cases} A_\rho u := -\rho^{-1}\Delta u, \quad x \in M \\ u\big|_S = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $M \subset K_R \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченная плоская область с липшицевой границей S, K_R – круг радиуса R, $x = (x_1, x_2)$ и s – координаты точек в M и на S соответственно. Следы на границе любой гладкой функции $u(x)$ будем обозначать через u_S. Будем предполагать, что плотность $\rho(x)$ является положительной функцией, удовлетворяющей условиям

$$0 < \rho_1 \leqslant \rho \leqslant \rho_2 < \infty, \ |\rho(x) - \rho(y)| < L|x-y|^\alpha, \ x, y \in K_R \tag{2}$$

с некоторыми постоянными ρ_1, ρ_2, L и α.

Хорошо известно, что оператор (1) с ρ, удовлетворяющей условиям (2), является самосопряженным в $L^2_\rho(M)$

$$(u, v) = \int\limits_M \rho u \bar{v}\, dx$$

с чисто дискретным спектром $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leqslant \ldots$. Обозначим через $\varphi_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, соответствующие нормированные (в $L^2_\rho(M)$) собственные функции A_ρ, а через $\psi_k(s)$ – нормированные специальным образом следы нормальных производных этих функций на границе S: $\psi_k(s) = \frac{1}{\lambda_k}\partial_n \varphi_k\big|_S$. Неполными спектральными данными (НСД) будем называть набор $\{\psi_k\}_{k=1}^N$, где N – некоторое положительное число. Обратная задача заключается в восстановлении свойств плотности $\rho(x)$ в M по НСД.

Из эвристических соображений ясно, что НСД не определяют ρ однозначно: функция ρ зависит от 2 переменных, в то время как набор НСД только одномерный. Следовательно, можно надеяться лишь на нахождение некоторого приближения $\rho_a(x)$ к истинному значению плотности. Основной результат, полученный в данной работе, — это оценка абсолютной величины разности

$$|\rho(x) - \rho_a(x)| < cN^{-\beta}, \tag{3}$$

где c и β – некоторые положительные постоянные, зависящие только от $\rho_{1,2}$, L, M и α. Оценка (3) является весьма естественной: точность аппроксимации степенным образом растет с ростом N.

1. Коэффициенты Фурье $f_k(u)$ функции $u \in L^2_\rho(M)$ (по базису $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^\infty$) определяются по формуле

$$f_k(u) := (u, \varphi_k) = \int\limits_M \rho u \varphi_k \, dx \tag{4}$$

и $u = \sum\limits_{k=1}^\infty f_k(u)\varphi_k(x)$, где ряд в правой части сходится в $L^2_\rho(M)$.

Предложение 1. *Пусть $h \in C^\infty(M)$ является гармонической функцией. Тогда*

$$f_k(h) = -\int\limits_S h_S \psi_k(s) \, ds. \tag{5}$$

Доказательство. Так как φ_k удовлетворяют уравнению

$$-\rho^{-1}\Delta\varphi_k = \lambda_k \varphi_k,$$

то из определения (4) следует, что

$$f_k(u) = -\frac{1}{\lambda_k} \int\limits_M u \Delta\varphi_k \, dx. \tag{6}$$

Когда u является гармонической функцией, то интегрирование по частям в правой части (6) с учетом того факта, что φ_k удовлетворяет однородным условиям Дирихле, приводит к равенству (5).

Замечание. Условие $h \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ может быть значительно ослаблено. Например, можно брать $h \in H^\delta(M)$ для любого $\delta > 1/2$, где $H^\delta(M)$ – соболевское пространство функций, имеющих δ квадратично интегрируемых производных. В дальнейшем нам понадобятся только гармонические полиномы, принадлежащие $C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Следствие. *Пусть h_1, $h_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$-гармонические функции. Тогда*

$$(h_1, h_2) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_S h_{1S} \psi_k(s)\, ds \right) \left(\overline{\int_S h_{2S} \psi_k(s)\, ds} \right).$$

Если нам известно только N первых собственных значений и следов на границе от нормальных производных собственных функций, то по формуле (5) можем определить первые коэффициенты Фурье для любой гармонической функции. Следовательно,

$$\int_M \rho h_1 h_1\, dx - F(h_1, h_2) = \sum_{N+1}^{\infty} f_k(h_1) f_k(h_2), \tag{7}$$

где $F(h_1, h_2) := \sum_{k=1}^{N} f_k(h_1) f_k(h_2)$ и может быть представлена в терминах НСД. Правая часть в (7) имеет смысл ошибки, возникающей при аппроксимации интеграла в левой части (7) конечной суммой $F(h_1, h_2)$. Так как $h_{1,2} \in L^2_\rho(M)$, то ошибка стремится к 0 при $N \to \infty$, но для получения квалифицированных оценок скорости уменьшения ошибки необходимы дополнительные предположения о гладкости.

Предложение 2. *Пусть $u \in H^\sigma(M)$, $0 \leqslant \sigma < 1/2$. Тогда*

$$\rho_1^{1-\sigma} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^\sigma |f_k(u)|^2 \leqslant \|u\|_\sigma^2 \leqslant \rho_2^{1-\sigma} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^\sigma |f_k(u)|^2. \tag{8}$$

Доказательство проводится по стандартной схеме для интерполяционных пространств и здесь не приводится.

Предложение 3. *Пусть h_1, h_2 – гладкие гармонические функции. тогда для любого σ, $0 \leqslant \sigma < 1/2$ выполняются неравенства*

$$\Big| \sum_{N+1}^{\infty} f_k(h_1) \overline{f_k(h_2)} \Big| \leqslant \big(\lambda_{N+1}\big)^{-\sigma} \rho_2^{1-\sigma} \|h_1\|_\sigma \|h_2\|_\sigma,$$

$$\Big| \int\limits_M \rho h_1 h_2 \, dx - F(h_1, h_2) \Big| \leqslant c_1 N^{-\sigma} \|h_1\|_\sigma \|h_2\|_\sigma \tag{9}$$

с постоянной c_1, зависящей только от $\rho_{1,2}$ и области M.

Доказательство. Так как $h_{1,2}$ лежат в $H^\sigma(M)$ при любом σ, $0 \leqslant \sigma < 1/2$, то имеем

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \big|f_k(h_i)\big|^2 \leqslant \lambda_{N+1}^{-\sigma} \sum_{N+1}^{\infty} \lambda_k^\sigma \big|f_k(h_i)\big|^2 \leqslant$$
$$\lambda_{N+1}^{-\sigma} \|h_i\|_{\sigma,\rho} \leqslant \lambda_{N+1}^{-\sigma} \rho_2^{1-\sigma} \|h_i\|_\sigma^2, \quad i = 1, 2.$$

Справедливость оценки (9) следует теперь из асимптотической формулы Карлемана для собственных значений оператора A_ρ:

$$\lambda_N = 4\pi N \Big(\int\limits_M \rho(x) \, dx \Big)^{-1} + o(N).$$

Таким образом, абсолютная величина разности между функционалом $\int_M \rho h_1 h_2 \, dx$ от плотности и его аппроксимацией $F(h_1, h_2)$, получаемой по НСД, степенным образом убывает с ростом N. Покажем, что аналогичная оценка справедлива и для ошибки аппроксимации плотности $\rho(x)$.

2. Для этого перейдем в полярную систему координат (r, φ) и введем комплексную переменную $z = x_1 + ix_2$, $|z| = r$.

Предложение 4. *Для любого многочлена $P(r) = \sum\limits_{n=1}^{P} p_n r^n$ с положительными коэффициентами $p_n > 0$ выполняется неравенство*

$$\Big| \int\limits_M \rho P(r^2) \, dx - \sum_{n=1}^{P} p_n F(z^n, z^n) \Big| \leqslant c_2 N^{-\sigma} P(R^2). \tag{10}$$

Доказательство. Так как $M \subset K_R$, то

$$\|z^n\|_0 \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{n+1}} R^{n+1}, \quad \|z^n\|_1 \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{n+1}} R^{n+1} \Big(1 + \frac{n+1}{R} \Big).$$

Интерполяционная формула приводит к неравенству

$$\|z^n\|_\sigma \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{n+1}} R^{n+1} \Big(1 + \frac{n+1}{R} \Big)^\sigma \leqslant c_3 R^{n+1} \tag{11}$$

с некоторой постоянной c_3, зависящей от R и σ. Теперь подставим в (9) $h_1 = h_2 = z^n$. Из оценки (11) вытекает следующее неравенство

$$\Big| \int\limits_M \rho r^{2n}\,dx - F(z^n, z^n)\Big| \leqslant c_2 N^{-\sigma} R^{2n}, \qquad c_2 = c_1 c_3 R,$$

из которого, в свою очередь, следует доказываемое неравенство (10).

Следствие. *Пусть* $T_n(r^2/R^2)$ *– многочлен Чебышева и* t_k, $k = 0, 1, \ldots, n$ *– его коэффициенты. Тогда*

$$\Big| \int\limits_M \rho T_n(r^2/R^2)\,dx - \sum_{k=0}^{n} t_k F(z^k, z^k)\Big| < c_2 N^{-\sigma}. \tag{12}$$

Доказательство. Представим многочлен $T_n(x)$ в виде суммы четной и нечетной частей T_{n1} и T_{n2}:

$$T_n(x) = \frac{T_n(x) + T_n(-x)}{2} + \frac{T_n(x) - T_n(-x)}{2} = T_{n1} + T_{n2}.$$

Из свойств многочленов Чебышева вытекает знакоопределенность T_{n1} и T_{n2} и их ограниченность ($T_{n1,2} \leqslant 1$). Неравенство (12) следует теперь из неравенства (10), выписанного при $P(r) = T_n(r)$.

Перейдем к координате $q = r^2/R^2$ и продолжим плотность на отрицательные значения q четным образом. Введем функцию

$$\bar\rho(q) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-q^2}} \int\limits_0^{2\pi} \rho(q,\varphi)\,d\varphi,$$

усреднив исходную функцию по углу. Будем предполагать, что функция $\bar\rho(q)$ по-прежнему удовлетворяет условию (2). Этого всегда можно добиться увеличением радиуса R и переопределением плотности в дополнительной к M области $K_R \setminus M$. Представим функцию $\bar\rho(q)$ в виде суммы $\bar\rho(q) = \bar\rho_M(q) + b(q)$, где $\bar\rho_M(q)$ – результат усреднения по углу плотности $\rho(x)$, продолженной 0 вне M. Так как функции $\bar\rho(q)$ и $b(q)$, очевидно, принадлежат $L^2[-1,1]$, то для них определены коэффициенты Фурье разложения по многочленам Чебышева, которые обозначим через a_n и b_n. Тогда коэффициенты Фурье для $\bar\rho(x)$ равны $a_n - b_n$. Сумму в левой части неравенства (12) обозначим через d_n. Неравенство (12), переписанное в терминах коэффициентов Фурье функции $\bar{\rho}(q)$, принимает вид

$$\left|a_n - b_n - d_n\right| < c_2 N^{-\sigma}. \tag{13}$$

Коэффициенты Фурье b_n и d_n нам известны, следовательно, с некоторой точностью известны и коэффициенты a_n. Оказывается, этого достаточно для приближенного восстановления $\bar{\rho}(q)$.

Предложение 5. *Существуют функция $\bar{\rho}_a(q)$, восстанавливаемая по НСД, и постоянные c_4 и β, такие, что*

$$|\bar{\rho}(q) - \bar{\rho}_a(q)| < c_4 N^{-\beta}. \tag{14}$$

Доказательство. Будем исходить из следующей оценки разности между произвольной функцией $\rho(q)$, удовлетворяющей (2), и ее отрезкам ряда Фурье (2)

$$\left|\rho(q) - \sum_{k=1}^{K} a_k T_k(q)\right| \leqslant c_4 K^{-\alpha}(3 + \ln K).$$

Выберем $\rho_a(q) = \sum\limits_{k=1}^{K}(b_k + d_k)T_k(q)$. Тогда из неравенства (12) и ограниченности $T_k(q) \leqslant 1$ имеем

$$|\bar{\rho}(q) - \bar{\rho}_a(q)| \leqslant \left|\bar{\rho}(q) - \sum_{k=1}^{K} a_k T_k(q)\right| + \left|\sum_{k=1}^{K}(a_k - b_k - d_k)T_k(q) \leqslant\right.$$
$$c_4 K^{-\alpha}(3 + \ln K) + c_2 N^{-\sigma} K.$$

Выбирая $K = N^{\sigma/(1+\alpha)}$, приходим к искомому неравенству (14) с показателем β, $\beta < \alpha\sigma/(1+\alpha)$.

Теорема. *Пусть плотность $\rho(x)$ удовлетворяет условию (2). Тогда по НСД может быть построена такая функция $\rho_a(x)$, что в каждой точке $x \in M$ выполняется неравенство (3) с некоторыми положительными постоянными c и β.*

Доказательство. Неравенство (13), выписанное при $q = 0$ с учетом легко проверяемого соотношения $\bar{\rho}(0) = \rho(0)$, принимает вид

$$\left|\rho(0) - \bar{\rho}_a(o)\right| < c_5 N^{-\beta}.$$

Отсюда в силу произвольности выбора начала координат и следует утверждение теоремы при $c = c_5$.

Литература

1. Ж. Л. Лионс, Э. Мадженес, *Неоднородные граничные задачи и их приложения.* Мир, Москва, 1971.
2. И. К. Даугавет, *Введение в теорию приближения функций.* Изд-во ЛГУ, Ленинград, 1977.

Starkov A. S. On recovering of the density in the plane domain from incomplete spectral data.

An inverse spectral problem of the density recovering is considered. The first N eigenvalues and traces on the boundary of the normal derivatives of eigenfunctions for Dirichlet problem are chosen as input data. The theorem that an error in the density approximation is less than $cN^{-\beta}$, with some positive constants c and β is proved.

Академия холода
и пищевых технологий

Поступило 1 октября 1996 г.