

МНОГОМЕРНЫЕ ТКАНИ БОЛЯ*М. А. Акивис, С. А. Герасименко*

В теории тканей большую роль играют условия замыкания. Уже в первых работах [63] и [54], посвященных этой теории, появилось условие шестиугольности (H) (см. рис. 1) и было доказано, что двумерная шестиугольная три-ткань параллелизуема, т. е. локально эквивалентна три-ткани, образованной тремя семействами параллельных прямых на аффинной плоскости. Затем в работе [61] были рассмотрены новые условия замыкания, названные впоследствии условиями Томсена и Рейдемейстера (см. рис. 2 и 3), и показано, что эти условия связаны с групповыми свойствами три-ткани. Наконец, в работе [56] были введены еще три условия замыкания — условия Боля (рис. 4, 5, 6).

Три-ткани, на которых замыкаются фигуры, изображенные на рисунке 4, называются левыми тканями Боля и обозначаются символом (B_l). Условия замыкания, изображенные на рисунках 5 и 6, характеризуют соответственно правые и средние ткани Боля, которые обозначаются соответственно через (B_r) и (B_m). Если на ткани выполняются одновременно два из этих трех условий, то на ней, как нетрудно доказать геометрически (см. [55]), выполняется и третье условие. Три-ткани, на которых выполняются все три условия Боля, называются три-тканями Муфанг и обозначаются через (M).

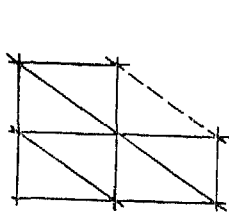
Все эти условия замыкания имеют не только геометрический, но и алгебраический смысл — они характеризуют свойства координатных луп и квазигрупп, связанных с тканью (см. [17], [10]). Их геометрическое значение начинает проявляться только на многомерных три-тканях, так как для дифференцируемых двумерных три-тканей все они оказываются эквивалентными.

Особенно большое число работ в последние годы посвящено изучению многомерных три-тканей Боля, а также луп Боля, являющихся координатными лупами этих тканей. Это объясняется интересными свойствами, которыми обладают ткани Боля и лупы Боля, а также их связью со многими разделами диффе-

ренциальной геометрии и алгебры и, в частности, с теорией симметрических пространств.

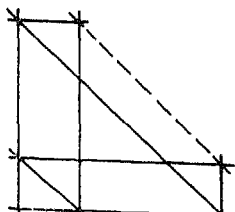
Понятие ткани Боля естественным образом обобщается на $(n+1)$ -ткани $W(n+1, n, r)$, заданные на дифференцируемом многообразии M размерности nr . Для таких тканей обобщаются понятие фигуры Боля, условий замыкания Боля и многие другие факты теории три-тканей Боля.

Настоящий обзор посвящен изложению содержания работ, в которых изучаются многомерные три- и $(n+1)$ -ткани Боля, а также связанные с ними алгебраические и дифференциально-геометрические структуры. Он непосредственно примыкает к обзору [10], посвященному общей теории многомерных тканей.



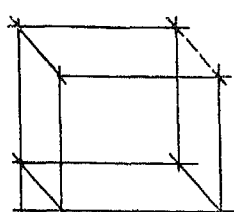
(H)

Рис. 1



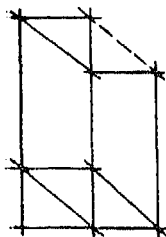
(T)

Рис. 2



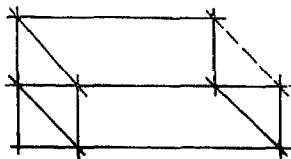
(R)

Рис. 3



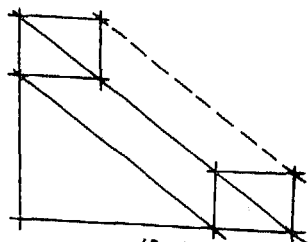
(Be)

Рис. 4



(Br)

Рис. 5



(Bm)

Рис. 6

§ 1. Три-ткани Боля

1.1. Напомним кратко основные уравнения теории три-тканей, необходимые для дальнейшего изложения (см. также [1], [10]). Три-ткань $W(3, 2, r)$ на многообразии M размерности $2r$ образуется тремя слоениями λ_u ($u=1, 2, 3$) коразмерности r , находящимися в общем положении, и поэтому определяется на нем тремя вполне интегрируемыми системами уравнений Пфаффа $\omega^i = 0$ ($i=1, \dots, r$). Левые части этих уравнений могут быть нормированы условием

$$\omega^1 + \omega^2 + \omega^3 = 0, \quad (1)$$

ввиду чего условия их интегрируемости записываются в виде

$$\left. \begin{aligned} d\omega_1^i &= \omega_1^j \wedge \omega_j^i + a_{jk}^i \omega_1^j \wedge \omega_1^k \\ d\omega_2^i &= \omega_2^j \wedge \omega_j^i - a_{jk}^i \omega_2^j \wedge \omega_2^k \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Из этих уравнений следует, что формы Пфаффа ω_j^i удовлетворяют уравнениям

$$d\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i + b_{jkl}^i \omega_k^j \wedge \omega_l^i \quad (3)$$

и определяют на многообразии M аффинную связность со структурной группой $G = GL(r)$. Эта связность была введена Чжэнем еще в 1936 году (см. [57]) и поэтому в последней работе Киккава [59] называется канонической связностью Чжэня. Тензоры a_{jk}^i и b_{jkl}^i носят название тензоров кручения и кривизны три-ткани $W(3, 2, r)$. Они связаны соотношениями

$$b_{[jkl]}^i = 2a_{[jk]m}^i a_{m[l]l}^i, \quad (4)$$

$$\nabla a_{jk}^i = b_{[j|l|k]}^i \omega_l^i + b_{[j|k]l}^i \omega_l^i, \quad (5)$$

где ∇ — символ ковариантного дифференцирования относительно связности Чжэня. Ковариантный дифференциал тензора кривизны записывается в виде

$$\nabla b_{jkl}^i = c_{jklm}^i \omega_1^m + c_{jklm}^i \omega_2^m, \quad (6)$$

причем выполняются соотношения

$$\left. \begin{aligned} c_{j|l|k|m}^i - b_{jpk}^i a_{lm}^p &= 0, \\ c_{j|k|l|m}^i + b_{jkp}^i a_{lm}^p &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$-c_{2|j|l|k|m}^i + c_{1|j|k|l|m}^i = a_{pj}^i b_{klm}^p - a_{pk}^i b_{jlm}^p + a_{jk}^p b_{plm}^i \quad (8)$$

(см. [1]).

В то время как слоения $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ входят в три-ткань $W(3, 2, r)$ равноправно, при выводе уравнений (2) — (8) и введении связности Чжэня выделяются слоения λ_1 и λ_2 , так как базисными на многообразии M считаются формы ω_1^i, ω_2^i . Связность

Чжэня мы обозначаем через Γ_m и будем считать средней, а наряду с ней введем еще две связности Γ_l и Γ_r — левую и правую. Как следует из работы [14], тензоры кручения всех этих связностей совпадают, а их формы связности и тензоры кривизны вычисляются так:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_m & \quad \omega_j^i & \quad b_{jkl}^i \\ \Gamma_l & \quad \omega_j^i - 2a_{jk}^i \omega_k^2 & \quad b_{klij}^i \\ \Gamma_r & \quad \omega_j^i + 2a_{jk}^i \omega_k^1 & \quad b_{ljk}^i \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

С три-тканью $W(3, 2, n)$ связано семейство дифференцируемых квазигрупп — координатных квазигрупп ткани. Обозначим через X_u локальные базы слоений λ_u ($u=1, 2, 3$), образующих эту три-ткань, в некоторой открытой области на многообразии M . Образования $q_m: X_1 \times X_2 \rightarrow X_3$, $q_l: X_2 \times X_3 \rightarrow X_1$, $q_r: X_3 \times X_1 \rightarrow X_2$, определяемые тканью $W(3, 2, r)$, называются ее трехбазисными координатными квазигруппами [2]. С каждой точкой A многообразия M связаны главные изотопы этих квазигрупп — лупы $L_m(A)$, $L_l(A)$ и $L_r(A)$, которые называются средней, левой и правой локальными координатными лупами ткани. Они характеризуют строение ткани $W(3, 2, r)$ в окрестности точки A . В касательном пространстве $T_u(A)$ к каждой из этих луп ($u=m, l, r$) индуцируются две операции: коммутирование $[\xi, \eta]_u$ и ассоциирование $(\xi, \eta, \zeta)_u$ для векторов $\xi, \eta, \zeta \in T_u(A)$ [10]. Ввиду этого касательное пространство $T_u(A)$ к лупе $L_u(A)$ в точке A становится алгеброй — локальной алгеброй $W_u(A)$ ткани $W(3, 2, r)$ [6]. Операции коммутирования и ассоциирования в этих алгебрах связаны с тензорами кручения и кривизны ткани соотношениями

$$\begin{aligned} [\xi, \eta]_u^i &= -2a_{jk}^i \xi^j \eta^k, \\ (\xi, \eta, \zeta)_m^i &= (\xi, \zeta, \eta)_l^i = (\eta, \zeta, \xi)_r^i = -b_{jkl}^i \xi^j \eta^k \zeta^l. \end{aligned} \quad (10)$$

Последние соотношения вытекают из соотношений (9), определяющих тензоры кривизны связностей Γ_m, Γ_l и Γ_r .

Для того, чтобы упростить дальнейшее изложение, рассмотрим бинарно-тернарную алгебру W , в которой операции коммутирования и ассоциирования определяются по формулам

$$[\xi, \eta] = 2a_{jk}^i \xi^j \eta^k, \quad (\xi, \eta, \zeta)^l = b_{jkl}^i \xi^j \eta^k \zeta^l. \quad (10')$$

Введенные выше операции в алгебрах $W_u(A)$ легко выражаются через эти операции. Ввиду косой симметрии тензора кручения, а также соотношений (4), связывающих тензоры кручения и кривизны, операции (10') удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} [\xi, \eta] &= -[\eta, \xi], \quad [[\xi, \eta], \zeta] + [[\eta, \zeta], \xi] + [[\zeta, \xi], \eta] = \\ &= (\xi, \eta, \zeta) + (\eta, \xi, \zeta) + (\zeta, \xi, \eta) - (\eta, \xi, \zeta) - (\zeta, \eta, \xi) - (\xi, \zeta, \eta). \end{aligned} \quad (11)$$

Тождества (11) являются основными тождествами, характеризующими локальные W -алгебры многомерной три-ткани. Второе из них называется обобщенным тождеством Якоби.

1.2. Пусть теперь ткань $W(3, 2, r)$ является левой тканью Боля. Из условия замыкания (B_l) следует (см. [2]), что каждая ее координатная лупа $L_m(A)$ является левоальтернативной, т. е. на ней выполняется условие $(xx)y = x(xy)$. Отсюда вытекает, что в алгебре $W_m(A)$ выполняется соотношение $(\xi, \xi, \eta)_m = 0$, которое в силу (10) равносильно условию $b_{(jkl)l}^i = 0$.

Точно также доказывается, что если ткань $W(3, 2, r)$ является правой тканью Боля, то на ней выполняется условие $b_{(j|k|l)}^i = 0$. Несколько более сложно — с помощью перехода от координатной лупы $L_m(A)$ к одной из луп $L_l(A)$ или $L_r(A)$ — можно доказать, что если три-ткань $W(3, 2, r)$ является средней три-тканью Боля, то на ней выполняется условие $b_{j(kl)}^i = 0$.

Доказательство достаточности указанных условий для замыкания фигур Боля на ткани $W(3, 2, r)$ оказывается не таким простым. Оно было проведено В. И. Федоровой в работах [45], [47], [51]. Наметим основные этапы этого доказательства, тем более, что некоторые результаты, полученные при его проведении, имеют самостоятельное значение. Для определенности рассмотрим ткань $W(3, 2, r)$, на которой тензор кривизны удовлетворяет условию

$$b_{j(kl)}^i = 0. \quad (12)$$

Из соотношения (12) и уравнений (6) вытекает, что ковариантные производные c_{1jklm}^i и c_{2jklm}^i тензора b_{jkl}^i также кососимметричны по индексам k и l . Ввиду этого из соотношений (7) следует, что они выражаются через тензоры кручения и кривизны ткани $W(3, 2, r)$:

$$c_{1jklm}^i = -c_{2jklm}^i = b_{j\rho m}^i a_{kl}^\rho + b_{j\rho l}^i a_{km}^\rho - b_{j\rho k}^i a_{lm}^\rho. \quad (13)$$

Отсюда следует, что дифференциально-геометрическая структура, определяемая три-тканью $W(3, 2, r)$, на которой выполнено соотношение (12), является замкнутой в смысле работы [5] и геометрия таких тканей полностью определяется строением ее тензоров кручения и кривизны.

В силу (12) и (13) ковариантные дифференциалы тензоров кручения и кривизны рассматриваемой ткани принимают вид

$$\nabla a_{jk}^i = -b_{[jkl]}^i (\omega^l - \omega^j), \quad (14)$$

$$\nabla b_{jkl}^i = (b_{j\rho m}^i a_{kl}^\rho + b_{j\rho l}^i a_{km}^\rho - b_{j\rho k}^i a_{lm}^\rho) (\omega^l - \omega^j). \quad (15)$$

Кроме того, компоненты этих тензоров удовлетворяют конечным соотношениям

$$b_{j\rho k}^i a_{lm}^\rho - b_{k\rho j}^i a_{lm}^\rho = b_{\rho lm}^i a_{jk}^\rho + b_{klm}^i a_{\rho j}^\rho - b_{jlm}^i a_{\rho k}^\rho, \quad (16)$$

вытекающим из уравнений (8). Однако система уравнений (16)

не исчерпывает всех конечных соотношений, которым удовлетворяют тензоры кручения и кривизны, так как при последовательном ковариантном дифференцировании соотношений (16), а также соотношений (4) могут появиться все новые и новые конечные соотношения.

Далее в работе [47] на многообразии M , несущем ткань $W(3, 2, r)$, вводится новая связность Γ_m^* , определяемая формами связности $\omega_j^i = \omega_j^i + a_{jk}^i (\omega_k^j - \omega_k^i)$. В этой связности уравнения структуры ткани принимают вид

$$\left. \begin{aligned} d\omega_1^i &= \omega_1^j \wedge \omega_j^i + a_{jk}^i \omega_1^j \wedge \omega_2^k \\ d\omega_2^i &= \omega_2^j \wedge \omega_j^i - a_{jk}^i \omega_2^j \wedge \omega_1^k \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

$$d\omega_3^i = \omega_3^j \wedge \omega_j^i, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} d\omega_j^i - \omega_j^k \wedge \omega_k^i &= -b_{k(lj)}^i \omega_k^l \wedge \omega_3^i + \\ &+ \frac{1}{2} (b_{j[kl]}^i - b_{[k]l}^i) + 2a_{j[k}^m a_{l]m}^i - 2a_{jm}^l a_{lk}^m) \omega_k^l \wedge \omega_3^i. \end{aligned} \quad (19)$$

Последние уравнения показывают, что если на ткани $W(3, 2, r)$ выполнены условия (12), то формы ω_j^i определяют на базе X_3 слоя λ_3 этой ткани аффинную связность без кручения. Как следует из уравнений (19) и соотношений (4), тензор кривизны этой связности вычисляется по формуле

$$R_{jkl}^i = \frac{1}{2} (b_{jkl}^i + 2a_{jm}^i a_{kl}^m) \quad (20)$$

и уравнения (19) принимают вид

$$d\omega_j^i - \omega_j^k \wedge \omega_k^i = \frac{1}{2} R_{jkl}^i \omega_k^l \wedge \omega_3^i. \quad (21)$$

Вычисления показывают, что тензор R_{jkl}^i оказывается ковариантно постоянным относительно связности, индуцируемой формами ω_j^i на многообразии X_3 , т. е.

$$\nabla^* R_{jkl}^i = 0. \quad (22)$$

Поэтому многообразие X_3 является локально симметрическим пространством.

Используя это свойство многообразия X_3 , а также то, что из условия (12) следует шестиугольность ткани $W(3, 2, r)$, в работе [47] доказывается достаточность этого условия для замыкания фигур Боля (B_m) на ткани. Ввиду этого условие (12) является необходимым и достаточным для того, чтобы на ткани

$W(3, 2, r)$ выполнялось условие замыкания (B_m) , т. е. чтобы она была средней тканью Боля. Отсюда, в силу соотношений (9), следует также, что условие $b^i_{(jk)l} = 0$ вполне характеризует левые ткани Боля, а условие $b^i_{(j|kl)} = 0$ — правые ткани Боля.

1.3. Полная система конечных соотношений, связывающих тензоры кручения и кривизны три-ткани Боля, в работе [47] получена не была. Некоторые дополнительные соотношения этого типа были найдены Н. В. Гвоздовичем в работе [21]. Однако и они не исчерпали всех необходимых соотношений. Эта полная система соотношений была найдена Л. В. Сабининым и П. О. Михеевым в работе [40] (см. также [44]) несколько на другом пути. К этим работам мы вернемся ниже. А сейчас выведем эти соотношения, продолжая вычисления, начатые в [47], и исследуя связность Γ_m^* , введенную в этой работе на средней ткани Боля (B_m) .

Тензор кривизны этой связности, который, как указано выше, является тензором кривизны базы X_3 слоения λ_3 этой ткани, ковариантно постоянен. Как обычно, он кососимметричен по индексам k и l

$$R^i_{jkl} = -R^i_{ljk} \quad (23)$$

и удовлетворяет тождествам Риччи

$$R^i_{jkl} + R^i_{kjl} + R^i_{ljk} = 0, \quad (24)$$

которые равносильны соотношениям (4), связывающим тензоры кручения и кривизны ткани $W(3, 2, r)$. Исключим тензор b^i_{jkl} из соотношений (16) с помощью (20). В результате получим равенства

$$R^i_{\rho jk} a^{\rho}_{lm} - R^i_{\rho l m} a^{\rho}_{jk} - R^i_{k l m} a^{\rho}_{\rho j} + R^i_{j l m} a^{\rho}_{\rho k} + a^i_{\rho q} a^{\rho}_{jk} a^q_{lm} = 0. \quad (25)$$

Выразим еще ковариантные производные тензора a^i_{jk} через тензор R^i_{jkl} :

$$\nabla^* a^i_{jk} = (R^i_{ljk} - a^i_{lm} a^m_{jk}) (\omega^l_1 - \omega^l_2). \quad (26)$$

Продифференцируем теперь соотношения (25), пользуясь формулами (22) и (26). После довольно утомительных вычислений, связанных с неоднократным применением соотношений (24) и (25), мы придем к равенствам

$$R^i_{sjk} R^s_{\rho l m} - R^s_{slm} R^s_{\rho jk} - R^s_{klm} R^i_{\rho sj} + R^s_{jlm} R^i_{\rho sk} = 0. \quad (27)$$

Повторное дифференцирование этих соотношений приводит к тождествам в силу ковариантного постоянства тензора R^i_{jkl} .

Отметим, что соотношения (27) имеют место на любом симметрическом пространстве (см., например, [37], стр. 47). Они получаются дифференцированием соотношений (22). Соотно-

шения (25) могут быть получены также внешним дифференцированием уравнений (26).

Итак, уравнения (23), (24), (25) и (27) образуют полную систему конечных соотношений, которым удовлетворяют тензоры кручения и кривизны средних тканей Боля (B_m). С помощью соотношений (9) из них нетрудно получить соответствующие системы уравнений, характеризующие ткани Боля (B_l) и (B_m).

Отметим еще, что уравнения (18), (21), (22), (23), (24) и (27) определяют на многообразии X_3 структуру r -мерного симметрического пространства, а уравнения (17), (26) и (25) определяют над ним многообразие M размерности $2r$, несущее три-ткань Боля.

Если подобно тому, как это сделано в работе [44], ввести в касательном пространстве $T_m(A)$ к лупе $L_m(A)$ тернарную операцию

$$\langle \xi, \eta, \zeta \rangle^t = R_{jhl}^i \xi^j \eta^k \zeta^l,$$

связанную в силу (20) с введенными ранее в этой лупе операциями коммутирования и ассоциирования соотношениями

$$\langle \xi, \eta, \zeta \rangle = \frac{1}{2} (\xi, \eta, \zeta) + [\xi, [\eta, \zeta]],$$

то соотношения (23), (24), (25) и (27) запишутся в виде

$$\langle \xi, \eta, \zeta \rangle = - \langle \xi, \zeta, \eta \rangle, \quad (28)$$

$$\langle \xi, \eta, \zeta \rangle + \langle \eta, \zeta, \xi \rangle + \langle \zeta, \xi, \eta \rangle = 0, \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \langle [\zeta, \theta], \xi, \eta \rangle - \langle [\xi, \eta], \zeta, \theta \rangle - [\langle \eta, \zeta, \theta \rangle, \xi] + \\ + [\langle \xi, \zeta, \theta \rangle, \eta] + [[\xi, \eta], [\zeta, \theta]] = 0, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \langle \langle \kappa, \zeta, \theta \rangle, \xi, \eta \rangle - \langle \langle \kappa, \xi, \eta \rangle, \zeta, \theta \rangle - \\ - \langle \kappa, \langle \eta, \zeta, \theta \rangle, \xi \rangle + \langle \kappa, \langle \xi, \zeta, \theta \rangle, \eta \rangle = 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Эти соотношения лишь обозначениями отличаются от тождеств (18)–(21) из работы Л. В. Сабинина и П. О. Михеева [44], определяющих алгебру Боля. Поэтому бинарно-тернарная алгебра, определяемая в пространстве $T_m(A)$ тензорами a_{jk}^i и R_{jhl}^i , является алгеброй Боля.

1.4. В работах [40]—[44] изучаются локальные аналитические лупы Боля. Так как такие лупы являются координатными лупами тканей Боля, то построения, проведенные в этих работах, непосредственно связаны с теорией тканей Боля.

Левой лупой Боля называется лупа Q , в которой выполняется тождество

$$(x \cdot yx)z = x(y \cdot xz),$$

называемое левым тождеством Боля. При $y=e$, где e — единица лупы Q , это тождество принимает вид $(xx)z = x(xz)$, в силу чего левая лупа Боля является левоальтернативной. Более то-

го, можно доказать, что любая лупа, изотопная левой лупе Боля, также левоальтернативна, и обратно, если каждая лупа, изотопная лупе Q , левоальтернативна, то Q — левая лупа Боля. Именно это обстоятельство и является причиной того, что указанное выше условие $b^i{}_{(j)k}l=0$, эквивалентное левой альтернативности касательных W -алгебр три-ткани $W(3, 2, r)$, является необходимым и достаточным условием, характеризующим левые ткани Боля.

В работах [40] и [44] доказано, что касательная алгебра произвольной локальной лупы Боля Q класса C^∞ удовлетворяет условиям, аналогичным (28) — (31), и является алгеброй Боля. При этом, если локальные лупы Q и Q' изоморфны, то изоморфны и соответствующие им алгебры Боля W и W' . Обратно, произвольная алгебра Боля есть касательная алгебра некоторой лупы Боля. При доказательстве этих утверждений использована конструкция умножения элементов пространства аффинной связности, описанная в работах [8], [39] и [58].

В [43] изучается дифференциальная геометрия луп Боля. В ней показано, что локальная аналитическая лупа Боля является геодезической лупой некоторого пространства аффинной связности без кривизны. Эта аффинная связность является обобщением связности без кривизны, введенной Э. Картаном на группе Ли. С помощью этой связности для лупы Боля снова доказываются соотношения типа (24), (25) и (27).

1.5. Рассмотрим некоторые частные классы тканей Боля. Сюда относятся прежде всего ткани, на которых замыкаются фигуры Боля всех трех типов — левые, правые и средние. Такие ткани называются три-тканями Муфанг ввиду того, что все локальные лупы таких тканей являются лупами Муфанг [17]. Тензор кривизны таких тканей будет кососимметричен по трем нижним индексам и в силу соотношения (4) выражается через тензор кручения по формуле

$$b^i{}_{jkl} = 2a^m{}_{[jk} a^i{}_{|m|l]} \quad (32)$$

Поэтому тернарная операция, определяемая тензором $b^i{}_{jkl}$ в W -алгебре ткани Муфанг, выражается через операцию коммутирования:

$$(\xi, \eta, \zeta) = \frac{2}{3} ([[\xi, \eta], \zeta] + [[\eta, \zeta], \xi] + [[\zeta, \xi], \eta]).$$

Поэтому W -алгебра ткани Муфанг становится бинарной кососимметрической алгеброй.

Ввиду (32), соотношение (16), связывающее тензоры $a^i{}_{jk}$ и $b^i{}_{jkl}$, принимает вид

$$a^i{}_{j\rho} a^p{}_{i\rho} a^q{}_{km} + a^i{}_{k\rho} a^p{}_{m\rho} a^q{}_{ji} + a^i{}_{l\rho} a^p{}_{k\rho} a^q{}_{mj} + a^i{}_{m\rho} a^p{}_{j\rho} a^q{}_{ik} = a^i{}_{\rho q} a^p{}_{\rho k} a^q{}_{lm} \quad (33)$$

(см. [14]). Это соотношение с помощью операции коммутирования может быть переписано в виде

$$[\xi, [\zeta, [\eta, \theta]]] + [\eta, [\theta, [\xi, \zeta]]] + [\zeta, [\eta, [\theta, \xi]]] + \\ + [\theta, [\xi, [\zeta, \eta]]] = [[\xi, \eta], [\zeta, \theta]] \quad (34)$$

и носит название тождества Сегла (см. [36], [62]). Можно показать, что при ковариантном дифференцировании соотношений (33) получаются тождества. Удобнее всего для этого использовать введенную в работе [14] среднюю связность $\bar{\Gamma}$, определяемую на M формами связности

$$\tilde{\omega}_j^i = \omega_j^i + \frac{2}{3} a_{jR}^i (\omega^k - \omega^k),$$

так как тензор кручения ткани Муфанг оказывается ковариантно постоянным в этой связности.

Бинарная кососимметрическая алгебра, на которой выполнено тождество (34), называется алгеброй Мальцева [62]. Предыдущие рассуждения показывают, что все локальные W -алгебры ткани Муфанг являются алгебрами Мальцева. Так как в силу результатов работы [47], а также [14] соотношения (32) являются достаточными для характеристики тканей Муфанг, то справедливо и обратное утверждение: если все локальные алгебры три-ткани $W(3, 2, r)$ являются алгебрами Мальцева, то эта ткань будет тканью Муфанг. Этот результат связан с теоремой, доказанной Е. Н. Кузьминым [36], о том, что каждая алгебра Мальцева однозначно определяет аналитическую лупу Муфанг, для которой она является касательной алгеброй. Отсюда следует, что если хотя бы одна локальная алгебра ткани $W(3, 2, r)$ является алгеброй Мальцева, то эта ткань будет тканью Муфанг.

В работе [7] путем интегрирования структурных уравнений ткани Муфанг находятся конечные уравнения такой ткани, определяемой четырехмерной алгеброй Мальцева, указанной в работе [20]. Эти уравнения имеют вид

$$\left. \begin{aligned} z^1 &= e^{-y^1 x^1} + e^{x^4 y^1}, & z^2 &= e^{-y^1 x^2} + e^{x^4 y^2}, \\ z^3 &= e^{y^1 x^3} + e^{-x^4 y^3} - (x^1 y^2 - x^2 y^1), & z^4 &= x^4 + y^4 \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Слоения, образующие эту ткань на многообразии M^8 , в координатах x^i, y^i ($i=1, 2, 3, 4$) определяются уравнениями $x^i = a^i, y^i = b^i, z^i = c^i$. Соотношения (35) являются также уравнениями четырехмерной аналитической лупы Муфанг, единица которой имеет нулевые координаты. Эта лупа изотопна лупе Муфанг минимальной размерности, указанной в работе [35].

На многообразии M , несущем ткань Муфанг, имеется три связности с ковариантно постоянным тензором кривизны. Это будут указанная выше связность Γ_m^* , а также аналогично определяемые связности Γ_l^* и Γ_r^* . В силу формул (20) тензор кривизны связности Γ_m^* на ткани Муфанг записывается в виде

$$R^i_{jkl} = \frac{1}{3} (a^m_{jk} a^i_{ml} + a^m_{lj} a^i_{mh} - 2a^m_{kl} a^i_{mj}). \quad (36)$$

Соотношения (27) для этого тензора обращаются в тождества.

В работе [41] на многообразии Q глобальной аналитической лупы Муфанг строится аффинная связность без кручения, инвариантная относительно левых и правых сдвигов на этой лупе. Эта связность определяет на Q структуру симметрического пространства и является полной. Геометрический аппарат, построенный в этой работе, применяется для решения некоторых глобальных задач теории аналитических луп Муфанг.

1.6. В касательном пространстве $T_A(M)$ к многообразию M , несущему три-ткань $W(3, 2, r)$, имеются три подпространства $T_A(V_u)$, касательные к слоям ткани, проходящим через точку A . Эти три подпространства определяют в $T_A(M)$ конус Серге $S(2, r)$, несущий однопараметрическое семейство r -мерных, и $(r-1)$ -параметрическое семейство двумерных плоских образующих [9]. r -мерные плоские образующие этого конуса определяют изоклинные направления на ткани $W(3, 2, r)$, а его двумерные образующие — трансверсальные направления ткани.

Три-ткань $W(3, 2, r)$ называется трансверсально-геодезической [1], если на многообразии M , несущем эту ткань, существует семейство двумерных поверхностей, касательных ко всем трансверсальным направлениям ткани. Это семейство зависит от $3(r-1)$ параметров. Ткань $W(3, 2, r)$ называется изоклинной [4], если на M существует семейство r -мерных поверхностей, касательных ко всем изоклинным направлениям ткани. Это семейство зависит от $r+1$ параметров.

Аналитически условие трансверсальной геодезичности ткани $W(3, 2, r)$ записывается в виде

$$b^i_{(jkl)} = \delta^i_{(j} b_{kl)} \quad (37)$$

(см. [1]). Но так как для тканей Боля тензор кривизны кососимметричен по одной из пар нижних индексов, то для них это условие выполнено, ввиду чего ткани Боля являются трансверсально геодезическими.

Условие изоклинности ткани $W(3, 2, r)$ при $r > 2$ записывается в виде

$$a^i_{jk} = a_{lj} \delta^i_{kl}. \quad (38)$$

При $r=2$ это условие выполняется автоматически и поэтому не является условием изоклинности ткани $W(3, 2, 2)$. Если обозначить

$$\nabla a_j = p_{jk} \omega^k_1 + q_{jk} \omega^k_2,$$

то из соотношений (5) получим

$$b^i_{[jkl]} = \delta^i_{lk} q_{j]l}, \quad b^i_{[j|l|k]} = \delta^i_{lk} p_{j]l}. \quad (39)$$

При $r > 2$ из соотношений (4) получим еще

$$p_{jk} = p_{kj}, \quad q_{jk} = q_{kj}. \quad (40)$$

При $r=2$ эти последние соотношения и являются условиями изоклинности ткани $W(3, 2, 2)$ (см. [15], с. 63).

Если ткань $W(3, 2, r)$ одновременно является изоклинной и трансверсально геодезической, то она, как следует из [4], грассманизуема, т. е. допускает отображение на ткань, образованную в проективном пространстве P^{r+1} связками прямых, центры которых лежат на трех гладких гиперповерхностях H_u ($u=1, 2, 3$). Такая ткань описана в [3]. Ее тензор кривизны имеет вид

$$b^i_{jkl} = b_{jk}\delta_l^i + c_{ij}\delta_k^i + d_{kl}\delta_j^i, \quad (41)$$

где тензоры b_{jk} , c_{jk} и d_{jk} симметричны. Они являются асимптотическими тензорами трех гиперповерхностей $H_u \subset P^{r+1}$, порождающих эту ткань на грассмановом многообразии $G(1, r+1)$.

1.7. Рассмотрим теперь изоклинные ткани Боля (B_m). Так как на них выполняется условие (12), то из (41) следует, что

$$d_{jk} = 0, \quad b_{jk} + c_{jk} = 0. \quad (42)$$

Поэтому тензор кривизны изоклинной ткани Боля записывается так:

$$b^i_{jkl} = b_{jk}\delta_l^i - b_{jl}\delta_k^i. \quad (43)$$

Ввиду соотношений (38) и (43), операции коммутирования и ассоциирования в W -алгебре изоклинной три-ткани Боля принимают вид

$$\begin{aligned} [\xi, \eta] &= a(\xi)\eta - a(\eta)\xi, \\ (\xi, \eta, \xi) &= b(\xi, \eta)\xi - b(\xi, \xi)\eta, \end{aligned}$$

где $a(\xi) = a_i \xi^i$ — линейная, а $b(\xi, \eta) = b_{ij} \xi^i \eta^j$ — симметричная билинейная формы. Такую W -алгебру называют изоклинной алгеброй Боля. Нетрудно показать, что алгебра Боля является изоклинной тогда и только тогда, когда она удовлетворяет аксиоме плоскостей, т. е. каждое ее двумерное векторное пространство (плоскость) есть подалгебра. Такие алгебры были рассмотрены в работе [16].

Ковариантно постоянный тензор кривизны связности Γ_m^* для изоклинной ткани Боля в силу (20) запишется в виде

$$R^i_{jkl} = \frac{1}{2} (b_{jk} + \frac{1}{2} a_j a_k) \delta_l^i - \frac{1}{2} (b_{jl} + \frac{1}{2} a_j a_l) \delta_k^i.$$

Отсюда следует, что симметричный тензор $g_{jk} = b_{jk} + \frac{1}{2} a_j a_k$ также будет ковариантно постоянным в связности Γ_m^* . Если этот тензор невырожден, то он определяет на базе X_3 слоения λ_3 изоклинной ткани Боля риманову или псевдориманову метрику, а связность Γ_m^* будет римановой связностью этой метрики. Полагая $R_{ijkl} = g_{im} R^m_{jkl}$, получим $R_{ijkl} = g_{li} g_{jk} - g_{lk} g_{ji}$, т. е. база X_3

является римановым или псевдоримановым пространством постоянной кривизны (см., например, [38] с. 593).

Так как изоклинная ткань Боля $W(3, 2, r)$ грассманнизуема, то она допускает отображение на грассманово многообразие $G(1, r+1)$ прямых проективного пространства P^{r+1} . При этом в силу соотношений (42) одна из трех гиперповерхностей H_u , порождающих три-ткань на $G(1, r+1)$, становится гиперплоскостью H , а две другие принадлежат одной гиперквадрике Q . Если в пространстве P^{r+1} выбрать подвижной репер так, чтобы его точки A_0 и A_{r+1} лежали на гиперквадрике Q , точка $A_0 + A_{r+1}$ принадлежала гиперплоскости H , а точки A_i ($i=1, \dots, r$) лежали на пересечении касательных гиперплоскостей к гиперквадрике Q в ее точках A_0 и A_{r+1} , то уравнение гиперплоскости H запишется в виде

$$x^0 - x^{r+1} - a_i x^i = 0.$$

а гиперквадрики Q — в виде

$$b_{ij} x^i x^j - 2x^0 x^{r+1} = 0$$

(ср. [29]). Эта гиперквадрика невырождена при $\det(b_{ij}) \neq 0$. Нетрудно проверить, что если $\det(g_{ij}) \neq 0$, то квадрика $\tilde{Q} = Q \cap H$ также будет невырожденной.

Точке A рассматриваемой три-ткани Боля соответствует в P^{r+1} прямая $A_0 A_{r+1}$, а трем слоям ткани, проходящим через эту точку, три связки прямых с центрами в точках A_0 , A_{r+1} и $A_0 + A_{r+1}$ или, короче, — сами эти точки. Обозначим через S полюс гиперплоскости H относительно гиперквадрики Q . При проектировании из точки S на гиперплоскость H точки A_0 и A_{r+1} перейдут в точки \tilde{A}_0 и \tilde{A}_{r+1} , симметричные относительно точки $A_0 + A_{r+1}$ в неевклидовой метрике, определяемой на гиперплоскости H абсолют \tilde{Q} . Метрическим тензором в этом пространстве будет введенный выше тензор g_{ij} . Таким образом, при $\det(g_{ij}) \neq 0$ изоклинная ткань Боля $W(3, 2, r)$ допускает отображение на r -мерное риманово или псевдориманово пространство V_c^r постоянной кривизны. При этом точке A ткани $W(3, 2, r)$ соответствует в пространстве V_c^r тройка точек, две из которой симметричны относительно третьей.

Подобное отображение можно построить и для произвольной ткани Боля. Но роль пространства постоянной кривизны в этом случае будет играть произвольное локально симметрическое пространство с ковариантно постоянным тензором кривизны R_{jkl}^i , определяемым формулой (20). Такая интерпретация ткани Боля рассмотрена в работе [11].

1.8. Четырехмерные ткани Боля были детально исследованы в работах А. Д. Иванова. В работе [29] им было показано, что условие (40) для таких тканей следует из уравнений (12). Это означает, что всякая четырехмерная ткань Боля является изо-

клинной и, следовательно, грассманизуема. Затем в этой работе строится отображение ткани Боля $W(3, 2, 2)$ в пространство P^3 , при котором слои двух слоений, образующих эту ткань, отображаются на точки квадрики Q , а слой третьего слоения — на точки плоскости H . Далее проводится классификация изучаемых тканей в зависимости от строения квадрики Q и взаимного расположения этой квадрики и плоскости H . В работе [32] подробно изучаются четырехмерные ткани Боля, для которых квадрика Q невырождена, а в работе [33] — ткани, для которых эта квадрика вырождается. В этих же работах рассматривается интерпретация четырехмерных тканей Боля на двумерных неевклидовых плоскостях. Наконец, в работе [31] с помощью построенных интерпретаций находятся конечные уравнения четырехмерных тканей Боля.

Шестимерные ткани Боля были изучены в работах В. И. Федоровой. Так как тензоры a_{jr}^i и b_{ljk}^i ткани Боля (B_m) кососимметричны по индексам j, k и эти индексы принимают только три значения 1, 2, 3, то, как отмечается в работе [47], они могут быть представлены в виде

$$a_{jr}^i = \varepsilon_{jrk} a^{ik}, \quad b_{ljk}^i = \varepsilon_{jkm} b_l^{im},$$

где ε_{ijk} — тернарный дискриминантный тензор. Дальнейшая классификация шестимерных тканей Боля связывается с известной классификацией контравариантных тензоров a^{ij} (см., например, [52]).

В работе [46] доказывается, что шестимерная ткань Боля будет изоклинной, а следовательно, и грассманизуемой тогда и только тогда, когда ее тензор a^{ij} кососимметричен. Затем рассматривается шестимерная ткань (B_m), у которой этот тензор может быть приведен к каноническому виду

$$(a^{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (44)$$

Доказано, что такая ткань допускает реализацию в проективном пространстве P^3 с фиксированной в качестве абсолюта линейчатой невырожденной квадратикой Q . При этом точке A многообразия M^6 , несущего ткань (B_m), соответствует упорядоченная тройка точек K, L, M на квадратике Q , попарно не лежащих на одной ее образующей. Слою третьего слоения ткани (B_m) соответствует коника $z \subset Q$, определяемая этими точками. Слою первого слоения, проходящему через точку $A \in M^6$, соответствует прямолинейная образующая x квадрики Q , принадлежащая первому семейству и содержащая точку K , на которой фиксированы точки L' и M' , являющиеся проекциями на образующую x точек L и M с помощью образующих второго семейства. Аналогично слою второго слоения, проходящему через точку $A \in M^6$, соответствует образующая y квадрики Q , принадлежа-

шая второму семейству, содержащая точку K , на которой фиксированы точки L'' и M'' , являющиеся проекциями на y точек L и M с помощью образующих первого семейства.

Так как матрица (44) не является кососимметричной, то построенная шестимерная ткань Боля (B_m) не будет изоклинной. Тем самым доказано существование неизоклинных, а следовательно, и не грассманизуемых шестимерных тканей Боля. Этим шестимерный случай отличается от четырехмерного.

В работе [48] рассматриваются ткани Боля с симметричным тензором a^{ij} . При этом доказано, что если $a^{ij}=0$, то такая ткань будет параллелизуемой. Если $\text{rang}(a^{ij})=3$, а также в том случае, когда матрица a^{ij} приводится к виду $\text{diag}(1, 1, 0)$ или $\text{diag}(-1, -1, 0)$, ткань будет групповой. Если эта матрица приводится к виду $\text{diag}(1, -1, 0)$, то ткань расслаивается на четырехпараметрическое семейство двумерных шестигульных три-тканей. Наконец, если она приводится к виду $\text{diag}(1, 0, 0)$, то ткань также расслаивается на четырехпараметрическое семейство шестигульных три-тканей и база этого расслоения несет параллелизуемую четырехмерную три-ткань.

В работе [49] аналогично тому, как это сделано в работе [46], строится интерпретация в пространстве P^3 для некоторых видов шестимерных тканей Боля, тензор a^{ij} которых приводится к каноническим типам, отличным от указанных выше.

Наконец, в работе [50] проводится полная классификация шестимерных тканей Боля (B_m), связанная с приведением к каноническому виду ее тензора a^{ij} .

§ 2. $(n+1)$ -ткани Боля

2.1. Рассмотрим $(n+1)$ -ткань $W(n+1, n, r)$, $n \geq 2$, со слоями коразмерности r , заданную на гладком многообразии размерности nr [10], [26]. Слоения λ_ρ , образующие эту ткань, задаются вполне интегрируемыми системами форм Пфаффа ω^i , где $\rho=0, 1, \dots, n$, $i=1, \dots, r$. Соотношения, связывающие на M формы ω^i , можно привести к виду

$$\sum_{\rho=0}^n \omega^i = 0.$$

Тогда структурные уравнения $(n+1)$ -ткани записываются так [10], [26]:

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i, \quad (45)$$

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i + \sum_{\beta=1}^n a_{\alpha\beta}^i \omega^j \wedge \omega_\beta^k, \quad (46)$$

$$d\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i + \sum_{\alpha, \beta=1}^n b_{\alpha\beta}^i \omega_\alpha^k \wedge \omega_\beta^l, \quad (47)$$

$$\nabla_{\alpha\beta}^i a_{jk}^l = \sum_{\gamma=1}^n \left(a_{\alpha\beta\gamma}^i a_{jkl}^{\gamma} + a_{\alpha\beta}^i a_{mk}^{\gamma} a_{\alpha\gamma}^m + a_{\alpha\beta}^i a_{jm}^{\gamma} a_{\beta\gamma}^m \right) \omega_\gamma^l, \quad \alpha \neq \beta,$$

где

$$\nabla_{\alpha\beta}^i a_{jk}^l = da_{\alpha\beta}^i a_{jk}^l - a_{\alpha\beta}^i a_{mk}^m \omega_j^m - a_{\alpha\beta}^i a_{jm}^m \omega_k^m + a_{\alpha\beta}^i a_{jk}^m \omega_l^m.$$

Здесь $\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, n$; $i, j, k, l = 1, \dots, r$. При этом тензоры кручения $a_{\alpha\beta}^i a_{jk}^l$ и кривизны $b_{\alpha\beta}^i a_{jkl}^m$ ткани $W(n+1, n, r)$ удовлетворяют соотношениям

$$a_{\alpha\beta}^i a_{jk}^l = a_{\beta\alpha}^i a_{kj}^l, \quad \sum_{\alpha, \beta=1}^n a_{\alpha\beta}^i a_{jk}^l = 0, \quad a_{\alpha\beta}^i a_{jkl}^m = -b_{\beta\alpha}^i a_{jkl}^m,$$

и еще ряду конечных соотношений, которые мы здесь не приводим ввиду их громоздкости. Они содержатся в работах [26], [22]. Из уравнений (46)–(47) следует, что формы

$$\omega^I = \left\{ \begin{matrix} \omega_j^i \\ \omega_\alpha^i \end{matrix} \right\} \text{ и } \omega_J = \begin{pmatrix} \omega_j^i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_j^i & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_j^i \end{pmatrix}, \quad I, J = 1, \dots, nr,$$

определяют на многообразии M аффинную связность Γ_0^* , относительно которой слои ткани $W(n+1, n, r)$ являются вполне геодезическими подмногообразиями. При $n=2$ связность Γ_0^* совпадает со связностью Γ_m^* , рассмотренной в § 1, п. 1.2.

Рассмотрим $2r$ -мерное пересечение слоев x_ν , $\nu = 0, 1, \dots, n$, $\nu \neq \rho, \sigma, \tau$, задаваемое системой уравнений $\omega^i = 0$. На этом под-

многообразии слои слоений $\lambda_\rho, \lambda_\sigma, \lambda_\tau$ высекают три-подткань $W_{\rho, \sigma, \tau}$. (Здесь и далее индексы ρ, σ, τ принимают различные значения из $0, 1, \dots, n$.) Ткань $W(n+1, n, r)$ называется тканью Боля (B_ρ), если все ее три-подткани $W_{\rho, \sigma, \tau}$, где ρ фиксировано, а $\sigma, \tau = 0, 1, \dots, n$; $\sigma, \tau \neq \rho$, являются средними три-тканями Боля. Такие ткани подробно рассмотрены в работе [25]. При определении $(n+1)$ -ткани Боля (B_ρ) выделяется слоение с номером ρ . Поэтому и в обозначении ее три-подтканей $W_{\rho, \sigma, \tau}$ первый индекс ρ имеет специальное значение. Три-ткани $W_{\rho, \sigma, \tau}$ будут средними тканями Боля при выборе в качестве базисных форм $\omega_\sigma^i, \omega_\tau^i$.

Ткань $W(n+1, n, r)$ называется шестиугольной, если все ее три-подткани шестиугольны. В работах [26] и [25] доказано, что если все три-подткани вида $W_{\rho, \sigma, \tau}$, где ρ фиксировано, ткани

$W(n+1, n, r)$ шестиугольны, то и все остальные ее три-подткани, а следовательно, и сама $(n+1)$ -ткань, будут шестиугольными. По определению ткани Боля (B_ρ) все ее три-подткани $W_{\rho, \sigma, \tau}$ являются средними три-тканями Боля, и, следовательно, они шестиугольны. Поэтому, в силу приведенного выше утверждения, ткань Боля (B_ρ) является шестиугольной $(n+1)$ -тканью.

В работе [1] определены трансверсально-геодезические три-ткани и доказано, что шестиугольная три-ткань является трансверсально-геодезической. В [26] и [9] понятие трансверсально-геодезической ткани обобщается на ткани $W(n+1, n, r)$ для $n \geq 2$. В [24] доказано, что ткань $W(n+1, n, r)$ будет трансверсально-геодезической тогда и только тогда, когда все ее три-подткани вида $W_{\rho, \sigma, \tau}$, где ρ фиксировано, являются трансверсально-геодезическими три-тканями. В этой же работе с помощью приведенного выше утверждения доказано, что шестиугольная ткань $W(n+1, n, r)$ будет трансверсально-геодезической $(n+1)$ -тканью. А так как ткань Боля (B_ρ) шестиугольна, то она является и трансверсально-геодезической $(n+1)$ -тканью.

Ткань $W(n+1, n, r)$ называется тканью Боля $(B_{\rho_0 \rho_1 \dots \rho_m})$, где ρ_s — различные фиксированные индексы, $0 \leq \rho_s \leq n$; $s = 0, 1, \dots, m$; $0 \leq m \leq n$, если она является тканью Боля (B_{ρ_s}) для всех ρ_s . Если $m = n$, то ткань $(B_{\rho_0 \rho_1 \dots \rho_n})$ называется тканью Муфанг и обозначается через (M) . При $n = 2$ эта ткань является три-тканью Муфанг, рассмотренной в § 1, п. 1.5. Для $(n+1)$ -тканей остается верным следующее утверждение, известное для три-тканей. Если ткань $W(n+1, n, r)$ является тканью Боля $(B_{\rho_1 \rho_2 \dots \rho_n})$, то она будет $(n+1)$ -тканью Муфанг (M) . Непосредственно из определения $(n+1)$ -ткани Муфанг (M) следует, что все ее три-подткани будут три-тканями Муфанг. Верно и обратное утверждение: если все три-подткани ткани $W(n+1, n, r)$ являются три-тканями Муфанг, то и сама $(n+1)$ -ткань будет тканью Муфанг (M) . Заметим, однако, что для того чтобы ткань $W(n+1, n, r)$ была тканью Муфанг (M) , достаточно требовать, чтобы все ее три-подткани $W_{\alpha, \rho, \sigma}$, где $\alpha = 1, \dots, n$; $\rho, \sigma = 0, 1, \dots, n$, были средними тканями Боля.

Рассмотрим некоторую $(m+1)$ -подткань ($2 \leq m \leq n$) ткани $W(n+1, n, r)$ (см. [26]). Любая ее три-подткань является одновременно и три-подтканью всей ткани $W(n+1, n, r)$. В силу этого для $(m+1)$ -подтканей $(n+1)$ -тканей Боля и Муфанг будут справедливы следующие утверждения. Любая $(m+1)$ -подткань ($m = 2, \dots, n-1$) вида $W_{\rho_0 \rho_1 \dots \rho_m}$ $(n+1)$ -ткани Боля (B_{ρ_0}) есть $(m+1)$ -ткань Боля (B_{ρ_0}) . Если все $(m+1)$ -подткани $W_{\rho_0 \rho_1 \dots \rho_m}$ (m фиксировано) ткани $W(n+1, n, r)$ суть ткани Боля (B_{ρ_0}) , то и сама $(n+1)$ -ткань является тканью Боля (B_{ρ_0}) . Любая $(m+1)$ -подткань ($m = 2, \dots, n-1$) $(n+1)$ -ткани Муфанг (M) есть $(m+1)$ -ткань Муфанг. Если все $(m+1)$ -подткани (m фикси-

ровано) ткани $W(n+1, n, r)$ есть $(m+1)$ -ткани Муфанг (M), то и сама $(n+1)$ -ткань является тканью Муфанг. Если ткань $W(n+1, n, r)$ есть ткань Боля ($B_{\rho_0 \rho_1 \dots \rho_m}$), то все ее $(m+2)$ -подткани вида $W_{\rho_0 \rho_1 \dots \rho_m \rho_{m+1}}$ есть $(m+2)$ -ткани Муфанг, где $1 < m < n$; $\rho_{m+1} = 0, 1, \dots, n$; $\rho_{m+1} \neq \rho_s$, $s = 0, 1, \dots, m$.

В дальнейшем будем рассматривать только ткани Боля (B_0), так как для тканей (B_α), $\alpha = 1, \dots, n$, будут справедливы все последующие рассуждения при соответствующей перенумерации индексов.

Найдем аналитические условия, характеризующие $(n+1)$ -ткани Боля (B_0). В работах [26] и [25] на три-подткани $W_{0, \alpha, \beta}$ рассмотрена связность Чжэня (см. § 1, п. 1.1). Тензор кривизны $\bar{b}_{\alpha\beta}^i{}^{jkl}$ этой связности выражается через тензоры ткани $W(n+1, n, r)$ по формуле

$$\bar{b}_{\alpha\beta}^i{}^{jkl} = 2b_{\alpha\beta}^i{}^{jkl} - a_{\beta\alpha\beta}^i{}^{jkl} - a_{\alpha\beta\alpha}^i{}^{jkl} - a_{\beta\alpha}^m a_{\alpha\beta}^i{}^{mkl} + a_{\alpha\beta}^m a_{\beta\alpha}^i{}^{mkl}.$$

Средняя три-ткань Боля $W_{0, \alpha, \beta}$ характеризуется условием

$$\bar{b}_{\alpha\beta}^i{}^{j(kl)} = 0 \quad (48)$$

(см. § 1, п. 1.2). Поэтому ткань $W(n+1, n, r)$ будет тканью Боля (B_0) тогда и только тогда, когда для нее условие (48) выполняется при всех $\alpha, \beta = 1, \dots, n$.

2.2. Рассмотрим обобщение условий замыкания Боля на многомерные $(n+1)$ -ткани коразмерности r , построенное в работе [25]. Пусть a_0^0 и a_0^1 — два различных слоя слоения λ_0 ткани $W(n+1, n, r)$. Выберем в слое a_0^0 любую точку A . Через A проходят n слоев x_α слоений λ_α , $x_\alpha \in \lambda_\alpha$, $\alpha = 1, \dots, n$, по одному слою каждого слоения. Выберем любые $n-1$ из них.

Их пересечение $\bigcap_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq \beta}}^n x_\alpha$ имеет со слоем a_0^1 единственную общую

точку. Обозначим ее через A_β . Получим n таких точек в слое a_0^1 . Каждая точка A_β однозначно определяет слой y_β слоения λ_β , проходящий через нее. Таких слоев будет n , все они принадлежат различным слоениям, следовательно, они пересекаются в единственной точке \bar{A} :

$$\bar{A} = \bigcap_{\alpha=1}^n y_\alpha. \quad (49)$$

Эта точка однозначно определяет слой \bar{a}_0 слоения λ_0 , проходящий через нее. Фигура, образованная слоями a_0^0 , a_0^1 , x_α , y_α , \bar{a}_0 и точками их пересечения, называется n -параллелотопом Боля и обозначается $B_0(A)$. Точки A и \bar{A} называются соответственно

его основанием и вершиной, а слои a_0^0, a_0^1 — его базовыми слоями. Заметим, что точка A_β может быть задана так:

$$A_\beta = y_\beta \cap \left(\bigcap_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq \beta}}^n x_\alpha \right). \quad (50)$$

Рассмотрим следующее пересечение слоев x_α и y_α n -параллелографа Боля $B_0(A)$:

$$\left(\bigcap_{s=1}^m y_{\alpha_s} \right) \cap \left(\bigcap_{t=m+1}^n x_{\alpha_t} \right),$$

$0 \leq m \leq n$. Так как эти n слоев принадлежат различным слоениям, то из определения $(n+1)$ -ткани следует, что их пересечение будет точкой. Обозначим ее через $A_{\alpha_1 \dots \alpha_m}$. Заметим, что в номере точки $A_{\alpha_1 \dots \alpha_m}$ все индексы α_s различные и порядок их расположения не существен. Точка $A_{\alpha_1 \dots \alpha_m}$ называется вершиной высоты m n -параллелографа Боля $B_0(A)$. Число вершин высоты m равно C_n^m . Вершина нулевой высоты совпадает с основанием n -параллелографа $B_0(A)$, а вершина высоты n с вершиной этого параллелографа Боля. На рисунке 7 изображен параллелограф Боля $B_0(A)$ при $n=3, r=1$.

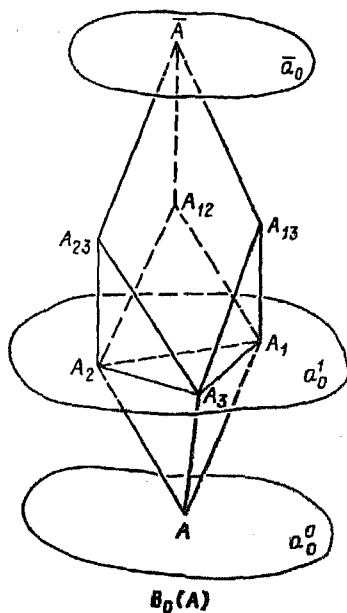


Рис. 7

Рассмотрим любой слой a_0^0 слоения λ_0 и a_α — слои слоений λ_α , $\alpha=1, \dots, n$. Пусть точка пересечения слоев a_α не принадлежит слою a_0^0 . Исключим из слоев a_α какой-либо один слой a_β . Оставшиеся слои пересекаются со слоем a_0^0 в единственной точке, обозначим ее через A^β . Фигура, высекаемая в слое a_0^0 слоями a_α , $\alpha=1, \dots, n$, называется симплексом S , пересечения $a_\alpha \cap a_0^0$ — гранями симплекса S , а точки A^β — его вершинами. Через вершину A^β симплекса S , кроме определяющих ее слоев, проходит слой x_β слоения λ_β , и точка A^β может быть представлена в виде:

$$A^\beta = x_\beta \cap \left(\bigcap_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq \beta}}^n a_\alpha \right). \quad (51)$$

Пусть a_0^1 — любой слой слоения λ_0 , достаточно близкий к слою a_0^0 , но не совпадающий с ним. Для каждой вершины A^α , $\alpha=1, \dots, n$, произвольного симплекса S , лежащего в слое a_0^0 , построим n -параллелотоп Боля $B_0(A^\alpha)$ с базовыми слоями a_0^0 , a_0^1 . Обозначим его вершину через \bar{A}^α . Фигура, образованная слоями a_0^0 , a_0^1 , симплексом S , лежащем в слое a_0^0 , n -параллелотопами Боля $B_0(A^\alpha)$, с базовыми слоями a_0^0 , a_0^1 и основаниями в вершинах симплекса S , называется фигурой Боля $B_0(S)$. Фигура Боля $B_0(S)$ называется замкнутой, если все вершины \bar{A}^α n -параллелотопов Боля $B_0(A^\alpha)$, $\alpha=1, \dots, n$, входящих в нее лежат в одном слое слоения λ_0 . На рисунке 8 изображена фигура Боля $B_0(S)$ при $n=3$, $r=1$. Говорят, что на ткани $W(n+1, n, r)$ выполняется условие замыкания Боля (B_0), если на ней замыкаются все достаточно малые фигуры Боля $B_0(S)$. Так как слоения λ_ρ , образующие ткань, равноправны, то, подобно тому как определяется условие замыкания Боля (B_0), можно определить условия замыкания (B_α), $\alpha=1, \dots, n$. При $n=2$ условия замыкания Боля (B_ρ), $\rho=0, 1, 2$, совпадают с рассмотренными в § 1 для три-тканей средним, правым и левым условиями замыкания Боля.

Условия замыкания Боля можно ввести также другим способом. Для этого рассмотрим два различных слоя слоения λ_0 . Обозначим их a_0^0 , a_0^1 . Выберем в слое a_0^0 две не совпадающие точки A и C . Фигура, образованная слоями a_0^0 , a_0^1 и n -параллелотопами Боля $B_0(A)$, $B_0(C)$, построенными на них, называется фигурой Боля $B_0(A, C)$. Обозначим вершины n -параллелотопов $B_0(A)$ и $B_0(C)$ через \bar{A} и \bar{C} соответственно. Фигура Боля $B_0(A, C)$ называется замкнутой, если вершины \bar{A} и \bar{C} n -парал-

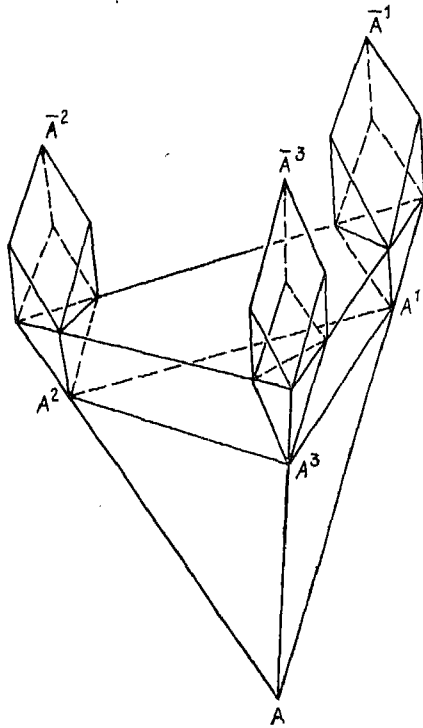


Рис. 8

лелотопов Боля $B_0(A)$, $B_0(C)$ лежат в одном слое слоения λ_0 . На рисунке 9 изображена фигура $B_0(A, C)$ при $n=3$, $r=1$. Говорят, что на ткани $W(n+1, n, r)$ выполняется условие замыкания Боля $(B_0)'$, если на ней замыкаются все достаточно малые фигуры Боля $B_0(A, C)$. В работе [25] доказано, что условия замыкания (B_0) и $(B_0)'$ эквивалентны.

Рассмотрим связь между условием замыкания Боля (B_0) и $(n+1)$ -тканью Боля (B_0) . Пусть a_0^0, a_0^1 — базовые слои n -параллелотопа $B_0(A)$, а точка A — его основание. В работе [25] доказано, что если ткань $W(n+1, n, r)$ является тканью Боля (B_0) , то для любого ее n -параллелотопа Боля $B_0(A)$ все его вершины высоты m (m фиксированно) лежат в одном слое a_0^m слоения λ_0 , причем этот слой однозначно определяется выбором базовых слоев a_0^0 и a_0^1 и не зависит от выбора точки A в слое a_0^0 . Отсюда вытекает, что если ткань $W(n+1, n, r)$ есть ткань Боля (B_0) , то на ней выполняется условие замыкания Боля (B_0) , а также эквивалентное ему условие замыкания Боля $(B_0)'$. При $n=2$, т. е. для три-ткани, условия замыкания Боля (B_0) и $(B_0)'$

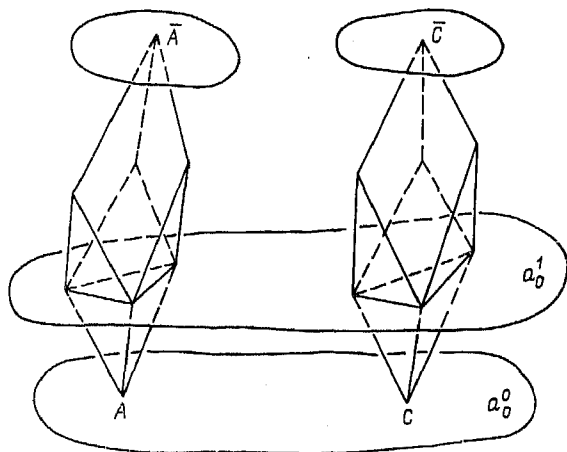


Рис. 9

совпадают со средним условием замыкания Боля (B_m). Следовательно, если на ткани $W(3, 2, r)$ выполняется условие замыкания Боля (B_0), то эта три-ткань будет средней тканью Боля, т. е. тканью (B_0). При $n > 2$ вопрос о достаточности условий замыкания (B_0) для характеристики ткани Боля (B_0) остается открытым. В работе [25] доказано лишь, что если на ткани $W(n+1, n, r)$ выполняется условие замыкания Боля (B_0) и верно некоторое дополнительное соотношение для тензоров этой ткани, то эта ткань является $(n+1)$ -тканью Боля (B_0). В этой же работе доказано, что если ткань $W(n+1, n, r)$ является тканью Боля (B_0), то все вершины любого ее n -параллелопада Боля $B_0(A)$ лежат на одной трансверсально-геодезической поверхности этой ткани.

2.3. Обозначим через X_ρ базы слоев λ_ρ , образующих ткань $W(n+1, n, r)$. Они представляют собой r -мерные дифференцируемые многообразия. Ткань $W(n+1, n, r)$ определяет локальное дифференцируемое отображение любых n из этих многообразий на $(n+1)$ -ое, так как слоям $x_{\rho_1}, \dots, x_{\rho_n}$ слоев $\lambda_{\rho_1}, \dots, \lambda_{\rho_n}$ (ρ_1, \dots, ρ_n — различные), пересекающимися в точке $A \in M$, соответствует единственный слой x_{ρ_α} слоя λ_{ρ_α} , $\rho_\alpha \neq \rho_\alpha$, $\alpha = 1, \dots, n$, проходящий через эту же точку A . Это отображение $q_{\rho_1 \rho_2 \dots \rho_n}: X_{\rho_1} \times X_{\rho_2} \times \dots \times X_{\rho_n} \rightarrow X_{\rho_\alpha}$ определено в окрестностях точек $x_{\rho_1}, \dots, x_{\rho_n}$, принадлежащих многообразиям $X_{\rho_1}, \dots, X_{\rho_n}$, и обратимо для любого ρ_α . Поэтому оно определяет локальную дифференцируемую $(n+1)$ -базисную n -арную квазигруппу [19], называемую локальной координатной n -квазигруппой ткани $W(n+1, n, r)$. Ввиду этого с $(n+1)$ -тканью $W(n+1, n, r)$ связаны $(n+1)!$ локальных координатных $(n+1)$ -базисных n -квазигрупп.

Рассмотрим одну из координатных n -квазигрупп ткани $W(n+1, n, r)$ — квазигруппу $f = q_{12} \dots q_n : X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \rightarrow X_0$. Возьмем на многообразии M любую точку A . Пусть a_ρ — слой слоения λ_ρ ($\rho = 0, 1, \dots, n$), проходящий через точку A , тогда $a_0 = f(a_1, \dots, a_n)$. С точкой A можно связать лупу $L(A)$, операция $F : X_0 \times X_0 \times \dots \times X_0 \rightarrow X_0$, в которой задается с помощью соотношения

$$u_0 = F(u_1, \dots, u_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \\ = f(f_1(u_1, a_2, \dots, a_n), f_2(a_1, u_2, a_3, \dots, a_n), \dots, f_n(a_1, \dots, a_{n-1}, u_n)),$$

где $u_\rho \in X_0$, $\rho = 0, 1, \dots, n$, f_α — α -ая обратная операция для n -квазигруппы f , и

$$x_\alpha = f_\alpha(a_1, \dots, a_{\alpha-1}, u_\alpha, a_{\alpha+1}, \dots, a_n).$$

Эта лупа называется координатной лупой ткани $W(n+1, n, r)$ и является LP -изотопом n -квазигруппы f в смысле книги [19].

Единицей n -лупы $L(A)$ является слой a_0 . Если ввести в окрестности единицы этой лупы координаты так, чтобы единица имела нулевые координаты, то умножение в лупе $L(A)$ запишется так:

$$u^t = F^t(u^{j_1}, u^{j_2}, \dots, u^{j_n}).$$

Предполагая, что функции F^t трижды дифференцируемы, и применяя формулу Тейлора, перепишем эти соотношения в виде

$$u^t = \sum_{\alpha=1}^n u^t + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^n \lambda_{jk}^i u^j u^k + \frac{1}{6} \sum_{\alpha, \beta, \gamma=1}^n \lambda_{jkl}^i u^j u^k u^l + o(\rho^3), \quad (52)$$

где $u = \{u^i\}$, $\rho = \max_{\alpha} |u^\alpha|$, $\left| \frac{o(t)}{t} \right| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$,

$$\lambda_{\alpha\alpha}^i = 0, \quad \lambda_{\alpha\alpha\alpha}^i = 0, \quad \lambda_{\alpha\beta}^i = \lambda_{\beta\alpha}^i, \quad \lambda_{\alpha\beta\gamma}^i = \lambda_{\sigma(\alpha\beta\gamma)}^i,$$

σ — произвольная подстановка индексов. В работе [25] рассмотрены обратные операции F_α для отображения F и найдены выражения коэффициентов разложения функций F_α по формуле Тейлора через коэффициенты разложения (52).

В работе [13] вычислены тензоры кручения и кривизны три-ткани через коэффициенты разложения (52), тензор кручения $(n+1)$ -ткани при $n \geq 2$ вычислен в работе [28], тензор кривизны $(n+1)$ -ткани при $n \geq 2$ — в работе [23], а тензор $a_{\alpha\beta\gamma}^i$ ткани $W(n+1, n, r)$ — в работе [25]. Запишем необходимую нам в дальнейшем формулу, выражающую тензор кривизны ткани $W(n+1, n, r)$ через коэффициенты разложения (52):

$$b_{\alpha\beta}^i = \frac{1}{2n(n-1)} \sum_{\substack{\gamma, \delta=1 \\ \gamma \neq \delta}}^n (\mu_{\gamma\beta}^i{}_{jkl} - \mu_{\gamma\delta\alpha}^i{}_{jlk}) - \mu_{j1k}^m \mu_{|m|l}^i, \quad (53)$$

где

$$\mu_{jk}^i = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{\alpha, \beta=1}^n \lambda_{jk}^i{}_{\alpha\beta}, \quad \mu_{\gamma\delta\alpha}^i{}_{jkl} = \lambda_{\gamma\delta\alpha}^i{}_{jkl} - \lambda_{mk}^i \lambda_{jl}^m - \lambda_{jm}^i \lambda_{\delta\alpha}^m. \quad (54)$$

Соотношения, связывающие тензоры ткани с коэффициентами разложения (52), позволяют дать аналитическую характеристику различным условиям замыкания, рассматриваемым на тканях (см., например, [10], [28]). Рассмотрим на ткани $W(n+1, n, r)$ условие замыкания (B_0) и найдем его аналитическую характеристику. Пусть $B_0(S)$ — любая достаточно малая фигура Боля ткани $W(n+1, n, r)$, a_0^j и a_0^1 — ее базовые слои, A^α — вершины симплекса S (см. п. 2.2). Обозначим через A_β^α вершины высоты 1 n -параллелографа $B_0(A^\alpha)$, лежащие в слое a_0^j . Пусть y_β^α — слой слоения λ_β , проходящий через точку A_β^α , а \bar{A}^α — вершина n -параллелографа $B_0(A^\alpha)$. Тогда, используя определение фигуры $B_0(S)$ и формулы (49) — (50), получаем

$$A_{\alpha \neq \beta}^\alpha = y_\beta^\alpha \cap x_\alpha \cap \left(\bigcap_{\substack{\gamma=1 \\ \gamma \neq \alpha, \beta}}^n a_\gamma \right), \quad (55)$$

$$A_\alpha^\alpha = y_\alpha^\alpha \cap \left(\bigcap_{\substack{\gamma=1 \\ \gamma \neq \alpha}}^n a_\gamma \right), \quad (56)$$

$$\bar{A}^\alpha = \bigcap_{\beta=1}^n y_\beta^\alpha, \quad (57)$$

$\alpha, \beta = 1, \dots, n$. По определению фигуры $B_0(S)$ все ее точки A^α лежат в слое a_0^j , а все точки A_β^α — в слое a_0^1 . Так как точки A^α определяются формулами (51), то условия принадлежности их слою a_0^j записываются с помощью операции f локальной координатной n -квазигруппы ткани $W(n+1, n, r)$ в виде

$$\begin{aligned} f(x_1, a_2, \dots, a_n) &= f(a_1, x_2, a_3, \dots, a_n) = \dots \\ &\dots = f(a_1, \dots, a_{n-1}, x_n). \end{aligned} \quad (58)$$

Условия принадлежности точек A_β^α , определяемых формулами (55) — (56), слою a_0^j с помощью операции f записываются в виде

$$\begin{aligned} f(y_1^1, a_2, \dots, a_n) &= f(x_1, y_2^1, a_3, \dots, a_n) = \dots \\ &\dots = f(x_1, a_2, \dots, a_{n-1}, y_n^1) = f(y_1^2, x_2, a_3, \dots, a_n) = \\ &= f(a_1, y_2^2, a_3, \dots, a_n) = \dots = f(a_1, x_2, a_3, \dots, a_{n-1}, y_n^2) = \dots \end{aligned}$$

$$\dots = f(y_1^n, a_2, \dots, a_{n-1}, x_n) = f(a_1, y_2^n, a_3, \dots, a_{n-1}, x_n) = \dots$$

$$\dots = f(a_1, \dots, a_{n-1}, y_n^n). \quad (59)$$

На ткани $W(n+1, n, r)$ выполняется условие замыкания Боля (B_0) тогда и только тогда, когда все вершины \bar{A}^α любой достаточно малой фигуры Боля $B_0(S)$ лежат в одном слое слоения λ_0 :

$$\bar{A}^\alpha \in \bar{a}_0, \quad a=1, \dots, n. \quad (60)$$

Так как точки \bar{A}^α определяются по формулам (57), то с помощью операции f условие (60) записывается так:

$$f(y_1^1, y_2^1, \dots, y_n^1) = f(y_1^2, y_2^2, \dots, y_n^2) = \dots = f(y_1^n, y_2^n, \dots, y_n^n). \quad (61)$$

Если в n -квазигруппе f из тождеств (58) — (59) следуют тождества (61), то говорят, что в этой квазигруппе выполняются условные тождества Боля B_0 [25]. Из приведенных выше рассуждений вытекает, что на ткани $W(n+1, n, r)$ выполняется условие замыкания Боля (B_0) тогда и только тогда, когда в координатной n -квазигруппе f , определяемой этой тканью, выполняются условные тождества Боля B_0 .

Пусть $B_0(S)$ — любая достаточно малая фигура Боля ткани $W(n+1, n, r)$. Обозначим через A точку пересечения слоев a_ξ , $\xi=0, 1, \dots, n$, высекающих в слое a_0^0 симплекс S . Рассмотрим локальную координатную лупу $L(A)$, связанную с точкой A фигуры $B_0(S)$. Обозначим

$$f(a_1, \dots, a_{\alpha-1}, x_\alpha, a_{\alpha+1}, \dots, a_n) = u_\alpha,$$

$$f(a_1, \dots, a_{\alpha-1}, y_\alpha^\beta, a_{\alpha+1}, \dots, a_n) = v_\alpha^\beta,$$

тогда формулы (58), (59) и (61) запишутся с помощью операции F лупы $L(A)$ так:

$$u_1 = u_2 = \dots = u_n, \quad (62)$$

$$v_1^1 = F(u_1, v_1^1, e, \dots, e) = \dots = F(u_1, e, \dots, e, v_n^1) =$$

$$= F(v_1^2, u_2, e, \dots, e) = v_2^2 = \dots = F(e, u_2, e, \dots, e, v_n^2) = \dots$$

$$\dots = F(v_1^n, e, \dots, e, u_n) = F(e, v_2^n, e, \dots, e, u_n) = \dots = v_n^n, \quad (63)$$

$$F(v_1^1, v_1^1, \dots, v_n^1) = F(v_1^2, v_2^2, \dots, v_n^2) = \dots = F(v_1^n, v_2^n, \dots, v_n^n). \quad (64)$$

Из (62) — (63) следует, что u_α и v_α^α (где суммирование по α нет) не зависят от индекса α , поэтому обозначим u_α через u , а v_α^α — через v . Из тождеств (63) с помощью операций F_α , обратных для операции F лупы $L(A)$, выразим v_α^β ($\alpha \neq \beta$):

$$v_\alpha^\beta = F_\alpha(e, \dots, e, v, e, \dots, e, u, e, \dots, e), \quad \alpha \neq \beta, \quad (65)$$

где v стоит на месте с номером α , u — на месте с номером β , а на остальных местах находятся единицы. Обозначим это выра-

жение через $F_{\alpha}^{\beta}(v, u)$. Подставляя (65) в оставшиеся неиспользованными соотношения (64), получим

$$\begin{aligned} & F(v, F_2^1(v, u), F_3^1(v, u), \dots, F_n^1(v, u)) = \\ & = F(F_1^2(v, u), v, F_3^2(v, u), \dots, F_n^2(v, u)) = \dots \\ & \dots = F(F_1^n(v, u), F_2^n(v, u), \dots, F_{n-1}^n(v, u), v). \end{aligned} \quad (66)$$

Таким образом, замыкание фигуры Боля $B_0(S)$ равносильно выполнению тождеств (66) в n -лупе $L(A)$, связанной с этой фигурой. Следовательно, на ткани $W(n+1, n, r)$ выполняется условие замыкания Боля (B_0) тогда и только тогда, когда в каждой локальной n -лупе $L(A)$, определяемой этой тканью, выполняется тождество (66).

Подставляя в (66) разложения (52) операции F лупы $L(A)$ и разложения операций F_{α} , вычисленные в работе [25], и ограничиваясь членами третьего порядка, получим

$$\sum_{\gamma, \delta=1}^n \mu_{\gamma\delta\alpha}^i b_{jkl}^i = \sum_{\gamma, \delta=1}^n \mu_{\gamma\delta\beta}^i b_{jkl}^i, \quad \gamma \neq \delta, \quad (67)$$

где $\mu_{\gamma\delta\alpha}^i$ определяется формулой (54). С помощью (53) находим, что соотношения (67) равносильны следующим условиям на тензор кривизны ткани $W(n+1, n, r)$

$$b_{jkl}^i = R_{jkl}^i, \quad R_{j(kl)}^i = 0, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, n. \quad (68)$$

Таким образом, если на ткани $W(n+1, n, r)$ выполняется условие замыкания Боля (B_0), то для ее тензора кривизны верно соотношение (68). При $n=2$, т. е. для три-ткани, соотношение (68) равносильно условию

$$b_{j(kl)}^i = 0, \quad (69)$$

где b_{jkl}^i — тензор кривизны три-ткани в связности Чжэня. Условие (69), как указано в § 1, п. 1.2, является необходимым и достаточным, для того, чтобы на ткани $W(3, 2, r)$ выполнялось среднее условие замыкания Боля. При $n > 2$ вопрос о достаточности соотношений (68) для выполнения на ткани $W(n+1, n, r)$ условий замыкания Боля (B_0) остается открытым. В работе [25] доказана более слабая теорема: ткань $W(n+1, n, r)$ является тканью Боля (B_0) тогда и только тогда, когда на ней кроме соотношений (68) выполняются еще соотношения

$$a_{\beta\alpha}^i (j_k)_l + a_{\beta\alpha}^i m_{(j_{\beta\alpha}^k)_l} = a_{\alpha\beta}^i (j_k)_l + a_{\alpha\beta}^i m_{(j_{\alpha\beta}^k)_l}. \quad (70)$$

Для три-ткани, т. е. при $n=2$, соотношения (70) обращаются в тождества.

Из (68) вытекает, что условия (47) приводятся к виду

$$d\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i + R_{jk}^i \omega_0^k \wedge \omega_0^i.$$

Отсюда и из формул (45) следует, что если на ткани $W(n+1, n, r)$ выполняется условие замыкания Боля (B_0) , то связность Γ_0^* , определяемая этой тканью, проектируется на базу слоения λ_0 в аффинную связность без кручения.

Отметим, что на $(n+1)$ -ткани и n -арные квазигруппы можно аналогично тому, как это сделано для условий замыкания Боля, обобщать и другие условия замыкания, известные для три-тканей и бинарных квазигрупп. Так, в работе [60] условие замыкания Рейдемейстера обобщено на тернарные квазигруппы, а в работе [64] — на n -арные квазигруппы. Рассматриваемое в этих работах условие замыкания Рейдемейстера строится аналогично нашему условию $(B_0)'$, а не (B_0) . На $(n+1)$ -тканях при $n > 2$ можно рассматривать также условия замыкания, промежуточные между условиями Боля и Рейдемейстера. Для три-тканей такие условия замыкания не существуют. Заметим также, что в монографии [19] даются определения n -луп Боля и n -луп Муфанг и ставится задача построения теории этих луп. Ввиду того, что определения указанных луп в [19] не конструктивны, выяснить их связь с аналогичными структурами, рассмотренными в данном обзоре, пока не удается.

2.4. В работе [4] введено понятие изоклинной три-ткани, которое затем было обобщено на многомерные $(n+1)$ -ткани [27]. Рассмотрим изоклинную $(n+1)$ -ткань Боля (B_0) . Эта ткань допускает проективную интерпретацию. Для построения этой интерпретации используется конструкция, рассмотренная в работах [3], [12].

Пусть P^{r+n-1} — $(r+n-1)$ -мерное проективное пространство, $G(n-1, r+n-1)$ — грасманово многообразие его $(n-1)$ -мерных подпространств P^{n-1} , $\Sigma(A)$ — шубертово многообразие $(n-1)$ -мерных подпространств, проходящих через точку $A \in P^{r+n-1}$ [53]. Гладкое многообразие $V \subset P^{r+n-1}$ размерности r определяет в некоторой области $D \subset G(n-1, r+n-1)$ слоение λ коразмерности r , слоями которого являются многообразия $\Sigma(A)$, где $A \in V$. Если в P^{r+n-1} заданы $n+1$ подмногообразия V_ρ , $\rho = 0, 1, \dots, n$, размерности r , общего положения, то в некоторой области U многообразия $G(n-1, r+n-1)$ они определяют $(n+1)$ -ткань коразмерности r . Такая ткань называется грасмановой и обозначается $GW(n+1, n, r)$ [9]. Слоение λ_ρ ткани $GW(n+1, n, r)$ на грасмановом многообразии $G(n-1, r+n-1)$ определяется многообразием V_ρ . $(n+1)$ -ткань называется алгебраической, если она грасманова и порождающие ее много-

образия V_0 принадлежат одному алгебраическому многообразию $V_{n+1}^r \subset P^{r+n-1}$ размерности r степени $n+1$. Такая ткань обозначается $AW(n+1, n, r)$ [9]. Эта ткань будет шестиугольной. В работе [9] было доказано, что если ткань $W(n+1, n, r)$ является изоклинной и трансверсально-геодезической, то она грассманизуема, т. е. эквивалентна некоторой грассмановой ткани $GW(n+1, n, r)$. Если же эта $(n+1)$ -ткань изоклинна и шестиугольна, то она алгебраизуема, т. е. эквивалентна алгебраической ткани $AW(n+1, n, r)$. Так как ткань Боля (B_0) является шестиугольной (см. п. 2.1), то изоклинная ткань Боля (B_0) алгебраизуема.

Рассмотрим алгебраическую ткань $AW(n+1, n, r)$, являющуюся тканью Боля (B_0). Построим ее три-подткани $W_{0,\alpha,\beta}$. Для этого возьмем на алгебраическом многообразии V_{n+1}^r $n-2$ точки общего положения A_γ , $\gamma=1, \dots, n$, $\gamma \neq \alpha, \beta$. Пусть P^{n-3} — $(n-3)$ -плоскость, определяемая этими точками. Множество всех $(n-1)$ -плоскостей, проходящих через эту плоскость, образует шубертово многообразие размерности $2r$, на котором алгебраическое многообразие V_{n+1}^r задает три-ткань — три-подткань $W_{0,\alpha,\beta}$ исходной ткани $AW(n+1, n, r)$. Проектируя многообразие V_{n+1}^r из центра P^{n-3} на дополнительную плоскость P^{r+1} , получим в этой плоскости гиперповерхность V_3^r третьего порядка. Эта гиперповерхность порождает на грассмановом многообразии $G(1, r+1)$ прямых пространства P^{r+1} три-ткань, эквивалентную подткани $W_{0,\alpha,\beta}$. Так как рассматриваемая $(n+1)$ -ткань есть ткань Боля (B_0), то подткань $W_{0,\alpha,\beta}$ является три-тканью Боля. Но тогда, как указано в § 1, п. 1.7, многообразие V_3^r распадается на гиперквадрику V_2^r и гиперплоскость P^r подпространства P^{r+1} . Так как это верно для проектирования из любого центра P^{n-3} , то многообразие V_{n+1}^r , порождающее ткань $AW(n+1, n, r)$, распадается на r -плоскость P^r и многообразие V_n^r размерности r степени n . Обратное утверждение также оказывается верным. Таким образом, алгебраическая ткань $AW(n+1, n, r)$ будет тканью Боля (B_0) тогда и только тогда, когда многообразие V_{n+1}^r , порождающее эту ткань, распадается на многообразие V_n^r размерности r степени n и r -плоскость P^r .

Если многообразие V_{n+1}^r распадается на m плоскостей P_s^r размерности r ($s=1, \dots, m$, $1 \leq m \leq n$) и многообразие V_{n-m+1}^r размерности r степени $n-m+1$, то определяемая им алгебраическая ткань $AW(n+1, n, r)$ будет тканью Боля ($B_{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m}$). Если же многообразие V_{n+1}^r распадается на $n+1$ r -плоскостей, то определяемая им алгебраическая ткань является $(n+1)$ -тканью Муфанг (M). Ткань $AW(n+1, n, r)$ в данном случае будет групповой тканью. Следовательно, изоклинная $(n+1)$ -ткань Муфанг (M) является групповой тканью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аквис М. А., О три-тканях многомерных поверхностей. Тр. геометр. семинара, Ин-т научн. информ. АН СССР, 1969, 2, 7—31 (РЖМат, 1970, 4А647)
2. —, Локальные дифференцируемые квазигруппы и три-ткани многомерных поверхностей. Исслед. по теории квазигрупп и луп. Кишинев: Штиинца, 1973, 3—12 (РЖМат, 1973, 12А635)
3. —, О локальной дифференцируемой квазигруппе и три-ткани, которые определяются тройкой гиперповерхностей. Сиб. мат. ж., 1973, 14, № 3, 467—474 (РЖМат, 1973, 9А669)
4. —, Об изоклинных три-тканях и их интерпретации в линейчатом пространстве проективной связности. Сиб. мат. ж., 1974, 15, № 1, 3—15 (РЖМат, 1974, 6А797)
5. —, О замкнутых G -структурах на дифференцируемом многообразии. Итоги науки и техники. ВИНТИ. Пробл. геометрии, 1975, 7, 69—79 (РЖМат, 1976, 9А623)
6. —, О локальных алгебрах многомерной три-ткани. Сиб. мат. ж., 1976, 17, № 1, 5—11 (РЖМат, 1976, 7А888)
7. —, Об интегрировании структурных уравнений три-ткани Муфанг минимальной размерности. Дифференц. геометрия. Калинин, 1977, 3—9 (РЖМат, 1977, 12А775)
8. —, О геодезических лупах и локальных тройных системах пространства аффинной связности. Сиб. мат. ж., 1978, 19, № 2, 243—253 (РЖМат, 1978, 9А684)
9. —, Ткани и почти грассмановы структуры. Докл. АН СССР, 1980, 252, № 2, 267—270 (РЖМат, 1980, 9А653)
10. —, Дифференциальная геометрия тканей. Итоги науки и техники. ВИНТИ. Пробл. геометрии, 1983, 15, 187—213 (РЖМат, 1984, 7А630)
11. —, Герасименко С. А., О некоторых фигурах замыкания на многообразии с симметрией. Ткани и квазигруппы. Калинин, 1982, 7—11 (РЖМат, 1982, 12А734)
12. —, Гольдберг В. В., О четыре-ткани и локальной дифференцируемой тернарной квазигруппе, определяемых четверкой поверхностей коразмерности два. Изв. вузов. Мат., 1974, № 5, 12—24 (РЖМат, 1975, 1А790)
13. —, Шелехов А. М., О вычислении тензоров кривизны и кручения многомерной три-ткани и ассоциатора связанной с ней локальной квазигруппы. Сиб. мат. ж., 1971, 12, № 5, 953—966 (РЖМат, 1972, 1А1088)
14. —, О локальных дифференцируемых квазигруппах и связностях, присоединенных к три-ткани многомерных поверхностей. Сиб. мат. ж., 1971, 12, № 6, 1181—1191 (РЖМат, 1972, 3А671)
15. —, Основы теории тканей. Калинин, 1981, 88 с.
16. Аль-Хужейри М. Ю., Алгебры Бола, порожденные пространствами постоянной кривизны. Пробл. теории тканей и квазигрупп. Калинин, 1985, 20—25 (РЖМат, 1985, 12А249)
17. Белоусов В. Д., Основы теории теории квазигрупп и луп. М.: Наука, 1967, 223 с. (РЖМат, 1967, 11А212К)
18. —, Алгебраические сети и квазигруппы. Кишинев: Штиинца, 1971, 168 с. (РЖМат, 1972, 8АЭ11К)
19. —, n -арные квазигруппы. Кишинев: Штиинца, 1972, 228 с. (РЖМат, 1973, 6А277К)
20. Гайнов А. Т., Бинарно-лиевы алгебры низких рангов. Алгебра и логика. Семинар. 1963, 2, № 4, 21—40 (РЖМат, 1964, 4А241)
21. Гвоздович Н. В., Инфинитезимальные автоморфизмы три-тканей Боля и Муфанг. Ткани и квазигруппы. Калинин, 1981, 83—91 (РЖМат, 1982, 1А933)
22. Герасименко С. А., О некоторых соотношениях для тензора кривизны многомерной $(n+1)$ -ткани. Ткани и квазигруппы, Калинин, 1984, 52—56 (РЖМат, 1985, 1А840)
23. —, Вычисление компонент тензора кривизны многомерной $(n+1)$ -ткани. Материалы VII Конф. мол. ученых Ун-та дружбы народов: мат., физ.,

- химия. М., 13—16 марта. 1984. Ч. 1. М., 1984, 9—11 (Рукопись деп. в ВИНТИ 12 июля 1984 г., № 5036—84 Деп.) (РЖМат, 1984, 10A617 ДЕП)
24. —, О трансверсально-геодезических $(n+1)$ -тканях. Пробл. теории тканей и квазигрупп. Калинин, 1985, 148—154 (РЖМат, 1985, 10A720)
 25. —, Многомерные $(n+1)$ -ткани Боля. Мос. гос. пед. ин-т. М., 1985. 76 с. ил. Библиогр. 18 назв. (Рукопись деп. в ВИНТИ 04.10.85, № 7082—В) (РЖМат, 1986, 1A865ДЕП)
 26. Гольдберг В. В., О $(n+1)$ -тканях многомерных поверхностей. Изв. Мат. ин-т Бълг. АН, 1974, 15, 405—424 (РЖМат, 1975, 5A707)
 27. —, Изоκлинные $(n+1)$ -ткани многомерных поверхностей. Докл. АН СССР, 1974, 218, № 5, 1005—1008 (РЖМат, 1975, 2A721)
 28. —, О приводимых, групповых и $(2n+2)$ -эдрических $(n+1)$ -тканях многомерных поверхностей. Сиб. мат. ж., 1976, 17, № 1, 44—57 (РЖМат, 1976, 7A889)
 29. Иванов А. Д., Об интерпретации четырехмерных тканей Боля в трехмерном проективном пространстве. В сб. «Геометрия однород. пространств». М., 1973, 42—57 (РЖМат, 1973, 11A594)
 30. —, Четырехмерные ткани Боля и плоские геометрии Кэли—Клейна. Тезисы докл. IV Прибалт. геом. конф. Тарту, 1973, 44—46
 31. —, Конечные уравнения четырехмерных три-тканей Боля. Сб. статей по дифференц. геометрии. Калинин, 1974, 70—78 (РЖМат, 1975, 8A675)
 32. —, О четырехмерных три-тканях Боля эллиптического и гиперболического типов. Изв. вузов. Мат., 1975, № 9, 25—34 (РЖМат, 1976, 6A659)
 33. —, О четырехмерных тканях Боля параболического типа. Изв. вузов. Мат., 1976, № 1, 42—47 (РЖМат, 1976, 10A422)
 34. —, Взаимно полярные три-ткани Боля гиперболического типа. Дифференц. геометрия многообразий фигур. Калининград, 1979, № 10, 30—35 (РЖМат, 1980, 1A819)
 35. Кузьмин Е. Н., Алгебры Мальцева размерности пять над полем характеристики нуль. Алгебра и логика, 1970, 9, № 5, 681—700 (РЖМат, 1971, 8A240)
 36. —, О связи между алгебрами Мальцева и аналитическими лупами Муфанг. Алгебра и логика, 1971, 10, № 1, 3—22 (РЖМат, 1971, 11A309)
 37. Лоос О., Сниметрические пространства. М.: Наука, 1985, 208 с. (РЖМат, 1985, 9A367К)
 38. Рашевский П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ. Изд. 2-е М.: Наука, 1964, 664 с. (РЖМат, 1964, 11A338)
 39. Сабинин Л. В., О геометрии луп. Мат. заметки, 1972, 12, № 5, 605—616 (РЖМат, 1973, 4A309)
 40. —, Михеев П. О. Об аналитических лупах Боля. Ткани и квазигруппы. Калинин, 1982, 102—109 (РЖМат, 1982, 12A227)
 41. —, —, О симметрической связности в пространстве аналитической лупы Муфанг. Докл. АН СССР, 1982, 262, № 4, 807—809 (РЖМат, 1982, 6A669)
 42. —, —, О геометрии гладких луп Боля. Ткани и квазигруппы. Калинин, 1984, 144—154 (РЖМат, 1985, 1A867)
 43. —, —, О дифференциальной геометрии луп Боля. Докл. АН СССР, 1985, 281, № 5, 1055—1057 (РЖМат, 1985, 9A612)
 44. —, —, Теория гладких луп Боля. М.: Ун-т дружбы народов, 1985, 81 с. (РЖМат, 1986, 7A211)
 45. Федорова В. И., О три-тканях с частично кососимметричным тензором кривизны. Изв. вузов. Мат., 1976, № 11, 114—117 (РЖМат, 1977, 6A556)
 46. —, Об одном классе три-тканей W_6 с частично кососимметричным тензором кривизны. Укр. геометр. сб. Респ. межвед. темат. научн. сб., 1977, вып. 20, 115—124 (РЖМат, 1977, 11A633)
 47. —, Об условии, определяющем многомерные ткани Боля. Сиб. мат. ж., 1978, 19, № 4, 922—928 (РЖМат, 1978, 12A1076)
 48. —, Шестимерные три-ткани Боля с симметричным тензором a^{ij} . Ткани

- и квазигруппы. Калинин, 1981, 110—123 (РЖМат, 1982, 1A894)
49. —, Об интерпретации шестимерной три-ткани Боля в трехмерном проективном пространстве. Ткани и квазигруппы, Калинин, 1982, 142—148 (РЖМат, 1982, 12A739)
50. —, О классификации шестимерных три-тканей Боля. Ткани и квазигруппы. Калинин, 1984, 124—132 (РЖМат, 1985, 1A844)
51. Хасина В. И., О многомерных три-тканях с эластичными W -алгебрами. Сиб. мат. ж., 1976, 17, № 4, 945—949 (РЖМат, 1977, 2A735)
52. Ходж В., Пидо Д., Методы алгебраической геометрии. Т. 1. М.: ИЛ, 1954, 462 с. (РЖМат, 1955, 5264К)
53. —, —, Методы алгебраической геометрии. Т. 2. М.: ИЛ, 1954, 432 с. (РЖМат, 1956, 5454К)
54. Blaschke W., Thomsens sechseckgewebe zueinander diagonale Netze. Math. Z., 1927, 28, 150—157
55. —, Projektive Geometrie. 3te Aufl. Verlag Birkhäuser, Basel-Stuttgart, 1954, 197 pp. (РЖМат, 1956, 4771К)
56. Bol. G., Gewebe und Gruppen. Math. Ann, 1937, 114, 414—431
57. Chern S. S., Eine Invariantentheorie der Dreigewebe aus r -dimensionalen Mannigfaltigkeiten im R_{2r} . Abh. Math. Semin. Univ. Hamburg, 1936, 11, 333—358
58. Kikkawa M., On local loops in affine manifolds. J. Sci. Hiroshima Univ., 1964, Ser. A1, 28, № 2, 199—207 (РЖМат, 2A266)
59. —, Canonical connections of homogeneous Lie Loops and 3-Webs. Mem. Fac. Sci. Shimane Univ., 1985, 19, 37—55
60. Rado F., Eine Bedingung für die Regularität der Gewebe. Mathematica (RPR), 1960, 2, № 2, 325—334 (РЖМат, 1962, 6A402)
61. Reidemeister K., Gewebe und Gruppen. Math. Z., 1928, 29, 427—435
62. Segle A. A., Malcev algebras. Trans. Amer. Math. Soc., 1961, 101, № 3, 426—458 (РЖМат, 1963, 5A293)
63. Thomsen G., Un teorema topologico sulle shiere di curve e una caratterizzazione geometrica delle superficie isoterma-asintotiche. Boll. Unione mat. ital., 1927, 6, 80—85
64. Usan J., Stojmenovski K., On a quasiidentity in n -ary quasigroups. Proc. 3th. Algebr. Conf., Beograd, 3—4 Dec. 1982. Novi Sad, 1983, 155—157. (РЖМат, 1984, 9A186)
-