А. М. Вершик, Статистическая сумма, связанная с диаграммами Юнга, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1987, том 164, 20–29

А.М.Вершик

СТАТИСТИЧЕСКАЯ СУММА, СВЯЗАННАЯ С ДИАГРАММАМИ ЮНГА

I°. Введение. В этой работе изучается статсумма

$$\Xi_N(\beta) = \sum_{\Lambda} \left(\frac{\dim \Lambda}{\sqrt{N!}}\right)^{\beta} \qquad (1)$$

где Λ – неприводимое комплексное представление симметрической группы $\mathfrak{S}_N$ степени N, $\dim\Lambda$ – его размерность, а суммирование проводится по всем классам эквивалентных неприводимых представлений; $\beta \geqslant 0$. При $\beta = 2$ из теоремы Бернсайда следует, что $\Xi_N(2) = 1$, так как $\sum_{\Lambda} (\dim\Lambda)^2 = N!$. Точное значение для остальных β – не вычислено, однако асимптотика по N хорошо известна еще при $\beta = 0$ и $\beta = 1$. В первом случае $\Xi_N(0) = p(N)$ – функция Эйлера-Харди-Рамануджана – число разбиений числа N, и (см. напр. [1])

$$\lim_N \frac{1}{\sqrt{N}} \ln \Xi_N(0) = \frac{2\pi}{\sqrt{6}} .$$

При $\beta = 1$, $\Xi_N(1)$ есть число всех стандартных таблиц Юнга с клетками или число всех инволюций в $\mathfrak{S}_N$ (см. напр. [2]) и

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \ln \Xi_N(1) \to 1 .$$

Эти наблюдения дают основание предположить, что для всех $\beta \geqslant 0$ существуют конечный предел

$$\varphi(\beta) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\sqrt{N}} \ln \Xi_N(\beta), \qquad (2)$$

который можно назвать, по аналогии со статистической физикой, свободной энергией. На множестве всех неприводимых представлений можно ввести "гиббсовскую меру":

$$P_{\beta,N}(\Lambda) = \frac{1}{\Xi_N(\beta)} \left(\frac{\dim \Lambda}{\sqrt{N!}}\right)^{\beta} \qquad (3)$$

и ставить вопрос о ее свойствах и асимптотике при $N \to \infty$ в зависимости от β. Мы изучаем эти вопросы далее, см. пп.3,4. Гипотеза о существовании и конечности свободной энергии (2) пока не доказана, и я попросил А.М.Пасса выполнить расчеты функции $\varphi_N(\beta) = \frac{1}{\sqrt{N}} \ln \Xi_N(\beta)$ при максимально возможных N. В приложении, написанном им, приводится таблица и график φ_N при

$N \sim 50$. Настоящая работа тесно связана с работами [I,2,].

Помимо естественности постановки вопроса об асимптотике выражений (I), (2), (3) имеется еще один повод для его изучения: существует одномерная модель, близкая к гидродинамике и изучавшаяся в [4,5] (гамильтониан в [5] отличен от нашего). Эта модель может быть описана в терминах диаграмм Юнга, что приводит к указанным статсуммам, но мы начнем с непосредственного ее описания.

2°. Об одной одномерной модели с дальнодействием.

Рассмотрим пространство $\widetilde{\Omega} = \{0;1\}^{\mathbb{Z}}$ всех конфигураций из частиц двух сортов 0 и I, расположенных в узлах целочисленной одномерной решетки $\mathbb{Z}$ и выделим в нем счетное подмножество $\Omega \subset \widetilde{\Omega}$ конфигураций со следующими двумя свойствами а) для любого $\omega \in \Omega$ существуют такие целые $n_0(\omega)$ и $n_1(\omega)$, что $\omega(n) = 0$ при $n \leqslant n_0(\omega)$ и $\omega(n_0(\omega)+1) = 1$; $\omega(n) = 1$ при $n \geqslant n_1(\omega)$ и $\omega(n_1(\omega)-1) = 0$ б) $n_0(\omega) + \{n : n > n_0(\omega)$; $\omega(n) = 0\} = 0$. Множество Ω градуировано следующим образом: назовем степенью конфигурации $\omega \in \Omega$ число пар (i, j), $i > j$, для которых $\omega(j) = 1$, $\omega(i) = 0$, в частности, в Ω есть ровно одна конфигурация ω степени 0 – "море Дирака": $\overline{\omega}(k) = 0$ $k \leqslant 0$, $\overline{\omega}(k) = 1$ $k > 0$, и одна – степени I. Ансамбль конфигураций степени N обозначим Ω_N; $\Omega = \bigcup_{N \geqslant 0} \Omega_N$, как мы увидим $|\Omega_N| = p(N)$. Определим парное взаимодействие частиц, находящихся в узлах i и j, $i > j$: $F(\omega(i), \omega(j)) = 0$ если $\omega(i) = \omega(j)$ или $\omega(i) = 1$, $\omega(j) = 0$, и $F(\omega(i), \omega(j)) = -\ln(i-j)$, если $\omega(i) = 0$, $\omega(j) = 1$. При определении гамильтониана, из-за роста взаимодействия при увеличении расстояния между частицами, следует ввести компенсирующее слагаемое и определить гамильтониан так:

$$H_N(\omega) = \sum_{i,j} F(\omega(i), \omega(j)) + \ln\sqrt{N!}\,, \tag{4}$$

очевидно, сумма конечна. Определим статсумму

$$\Xi_N(\beta) = \sum_{\omega \in \Omega_N} \exp \beta H_N(\omega), \tag{5}$$

гиббсовскую меру на конфигурациях

$$P_{\beta,N}(\omega) = \exp \beta H_N(\omega) / \Xi_N(\beta) \tag{6}$$

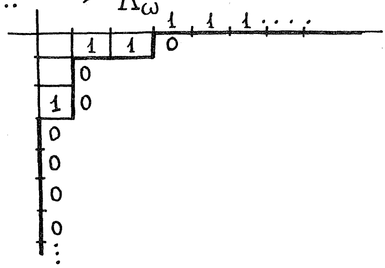
свободную энергию $\mathcal{G}_N(\beta) = \frac{1}{\sqrt{N}} \ln \Xi_N(\beta)$ (ср.(I)) и т.д. Любопытно, что из-за сильного дальнодействия традиционный подход к изучению одномерных моделей не дает для этой модели полной информации; например, легко доказать, что слабый предел гиббсовских мер $\rho_{\beta,N}$ есть стандартная мера Бернулли на $\tilde{\Omega}$ при всех $\beta \geqslant 0$, но, как мы увидим, на самом деле ситуация более интересна и зависит от β. Фактически эта модель двумерна! Нижеследующая редукция выявляет это и показывает связь с теорией диаграмм Юнга.

Сопоставим конфигурации $\omega \in \Omega$ диаграмму Юнга следующим образом (он хорошо известен и часто использовался (см. напр. [9])

$$\omega = \ldots 00\ldots 0100110111\ldots \longrightarrow \Lambda_\omega$$

$$\ldots -2 -1\, 1\, 2\, 3 \ldots$$

$$\Lambda_\omega =$$



Каждый „0" есть движение на клетку вверх, „1" – на клетку вправо. При этом число клеток в диаграмме есть степень конфигурации (число инверсий), а длина крюка клетки есть расстояние между частицами соответствующей инверсии. Далее, число строк есть число нулей после первой единицы и т.д. Поэтому

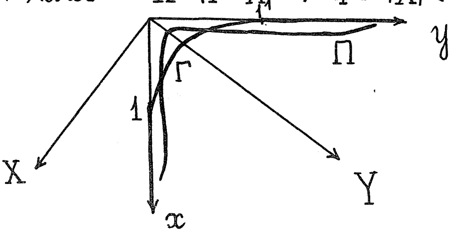
$$H_N(\omega) = \ln \frac{\sqrt{N!}}{\prod h_{i,j}} = \ln \frac{\dim \Lambda}{\sqrt{N!}} \tag{7}$$

где по формуле крюков ([10]) $\dim \Lambda = \dfrac{N!}{\prod h_{ij}}$, а Λ_ω воспринимается как диаграмма Юнга и как соответствующее ей неприводимое представление σ_N. Связь формул (4) и (7), (I) и (5), (3) и (6) и т.д. – установлена. Теперь можно изучать нашу модель как двумерную и ставить вопрос о предельном поведении гиббсовских мер на диаграммах Юнга. Это приводит нас к более содержательным ответам. (см. п.п.3,4). С точки зрения исходной модели далее изучается поведение частиц в узлах с растущим номером, т.е. не слабого, а "гидродинамического" предела гиббсовских мер (ср. [5]).

3°. Предел гиббсовских мер на диаграммах Юнга и предельная форма диаграмм

Для того, чтобы говорить о пределе мер на диаграммах с разным количеством клеток, нужно их нормировать. Нормировка для наших целей состоит в гомотетии диаграмм с N клетками с коэффи-

циентом $\frac{1}{\sqrt{N}}$, тогда площадь отдельной клетки - $\frac{1}{N}$, а поддиаграммы равна I. Теперь гиббсовская мера $P_{\beta,N}$ может рассматриваться как мера на ломаных в квадранте, ограничивающих площадь равную единице. Введем кривую Γ (в[1,2] она обозначена через Ω), которая в осях X, Y , указанных на рисунке имеет уравнение
$Y = \frac{2}{\pi}\,(X \arcsin X + \sqrt{1-X^2})$ при $|X| \leq 1$ и $Y = |X|$ при $|X| \geq 1$



ТЕОРЕМА I. При всяком $\beta > 0$ меры $P_{\beta,N}$ слабо (в смысле равномерного расстояния между кривыми) сходятся при $N \to \infty$ к дельта-мере δ_Γ , т.е. для всех $\varepsilon > 0$ $P_{\beta,N}(\mathcal{V}_\varepsilon(\Gamma)) \to 1$ где $\mathcal{V}_\varepsilon(\Gamma)$ - равномерная окрестность Γ . Доказательство использует ту же идею, которая использовалась в [I,2] для меры Планшереля ($\beta = 2$). Прежде всего, имеем

$$-\frac{1}{\sqrt{N}} \ln P_{\beta,N}(\Lambda) = -\frac{1}{\sqrt{N}}\Big(\beta \ln \frac{\dim \Lambda}{\sqrt{N!}} - \ln \Xi_N(\beta)\Big) =$$
$$= \sqrt{N}\Big(\frac{\beta}{N}\sum_{ij} \ln \frac{h_{ij}(\Lambda)}{\sqrt{N}} + \frac{\beta}{2}\ln N + \frac{\beta}{2N}(N\ln N - N + o(\ln N))$$
$$- \frac{\mathcal{S}_N(\beta)}{\sqrt{N}}\Big) = \frac{\beta\sqrt{N}}{2}\Big(1 + \frac{2}{N}\sum_{ij}\ln\frac{h_{ij}(\Lambda)}{\sqrt{N}} + \frac{\mathcal{S}_N(\beta)}{\sqrt{N}}\Big) +$$
$$+ O(1) = \frac{\beta\,\theta(\Lambda)}{2}\sqrt{N} + \mathcal{S}_N(\beta) + O(1),$$
где $\theta(\Lambda)$ - интеграл крюков (см. I). Заметим теперь, что $\mathcal{S}_N(\beta) \leq \mathcal{S}_N(0) =$
$$= \frac{1}{\sqrt{N}} \ln p(N) \leq C < \infty .$$
Поэтому, если $\theta(\Lambda) > \frac{2\pi}{\sqrt{6N}}$, то и $\theta(\Lambda) + \frac{\mathcal{S}_N(\beta)}{\sqrt{N}} > \frac{2\pi}{\sqrt{6N}}$ для достаточно больших N и $P_{\beta,N}(\Lambda) \leq \exp\big(-\frac{2\pi}{\sqrt{6}}\sqrt{N}\big)$, тем самым, все диаграммы, для которых $\theta(\Lambda) < \frac{2\pi}{\sqrt{6N}}$ составляют множество со сколь угодно близкой к единице $P_{\beta,N}$ мерой (напомним, что общее число диаграмм есть $p(N)$, а с другой стороны, как показано в [I] это множество есть окрестность критической диаграммы Γ .

Теперь докажем, что при $\beta = 0$ положение иное. Заметим, что $P_{0,N}$ есть равномерное распределение на диаграммах с N клетками.

ТЕОРЕМА 2. Последовательность мер $P_{0,N}$ слабо сходится к дельта-мере δ_Π, где Π кривая, задаваемая в естественных координатах уравнением

$$e^{-\frac{2\pi}{\sqrt{6}}x} + e^{-\frac{2\pi}{\sqrt{6}}y} = 1;\ x,y>0$$

Доказательство теоремы 2 можно проводить по-разному, оно может быть получено из некоторых оценок работы [6], что и было сделано автором, и сообщено одному из авторов работы [6], после чего тот в свою очередь дал доказательство центральной предельной теоремы для этого случая. (Самой постановки вопроса о предельной кривой в [6] нет, однако, там имеется нужное здесь обобщение формулы Эйлера-Харди-Рамануджана для асимптотики числа разбиений натурального числа N, у которых не менее $c_1\sqrt{N}$ слагаемых имеют величину не меньшую $c_2\sqrt{N}$; константы c_1 и c_2 должны быть выбраны так, чтобы число таких разбиений имело порядок $p(N)$. Метод производящих функций дает такое обобщение.)

Подчеркнем по поводу теорем I и 2, что было бы очень важным получить обе кривые как экстремали для некоторого вариационного принципа. Заметим теперь, что в отличие от кривой Γ, кривая Π лишь асимптотически приближается к осям координат, и что асимптотика нормированных размерностей $\frac{\dim\Lambda}{\sqrt{N!}}$ для диаграмм в окрестности кривой Π (как и любой невырожденной кривой, отличной от Γ) имеет вид $\exp(-cN(1+O(1))$ (а не $\exp(-c\sqrt{N}(1+O(1))$ как для Γ. Это позволяет доказать следующий факт

ТЕОРЕМА 3. $\lim\limits_{N\to\infty} \varphi'_N(0) = -\infty$

$$-\varphi'_N(0) = -\frac{1}{\sqrt{N}\,p(N)}\sum_{\Lambda} \ln\frac{\dim\Lambda}{\sqrt{N!}} \sim \frac{AN}{\sqrt{N}}\quad A\sqrt{N}\to\infty$$

Константа $A = -\lim\limits_N \frac{1}{N}\ln\frac{\dim\Lambda_N}{\sqrt{N!}}(P_0\text{-п.в.})$ есть в точности интеграл крюков для кривой Π. Формула для A, найденная из других соображений имеется в [6, Ш].

ЗАМЕЧАНИЕ. Даже в предположении существования и конечности φ, вопрос о производной $\varphi'(0)$ и даже о непрерывности φ при $\beta = 0$ открыт и теорема 3 не снимает его, однако, она вместе с выводами теорем I и 2 о различии пределов гиббсовских мер при $\beta > 0$ и $\beta = 0$ может быть истолкована как свидетельство своеобразного фазового перехода в точке $\beta=0$.

В других задачах (см. [5, 8]) возникают иные статистики на диаграммах Юнга, которые приводят к новым предельным кривым. В задачах статистики, теории разбиений могут быть и такие гиббсовские меры, предел которых уже не есть δ -мера (Хааровская мера в [8]). Систематически эти вопросы не изучены.

4°. Теорема Шеннона, свободная энергия и максимальная размерность

В теории стационарных случайных процессов теоремой Шеннона называют утверждение об асимптотической экспоненциальной равнораспределенности вероятностей типичных событий, например, утверждение о существовании предела

$$-\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\mu\left(\Delta_N(x)\right)=h ,$$

где h – энтропия (информация на один шаг), x – реализация случайного процесса, $\Delta_N(x)$ – цилиндр, определяемый реализацией x в моменты времени от I до N ; предел может пониматься по вероятности (Шеннон) почти всюду (Макмиллан-Брейман) и т.д. В нашей нестационарной задаче вопрос об асимптотической равнораспределенности также интересен. Существует ли в том или ином смысле предел

$$\lim_{N}\frac{1}{\sqrt{N}}\ln p_{\beta,N}(\Lambda) \tag{8}$$

например, по мере или в среднем? Ответ неизвестен даже для $\beta=2$, но в этом случае получены двусторонние оценки в [I]. Определим, если таковая существует, величину h_β из соотношения:

$$h_\beta=\lim_{N}h_{\beta,N},\ h_{\beta,N}\ \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{\Lambda}p_{\beta,N}(\Lambda)\ln p_{\beta,N}(\Lambda)=-\frac{1}{\sqrt{N}}M_{p_{\beta,N}}\ln p_{\beta,N}$$

при всех $\beta\geqslant 0$ и назовем h_β энтропией гиббсовской меры p_β,
$h_{\beta,N}\longrightarrow p_\beta$

ТЕОРЕМА 4. В предположении существования свободной энергии (2) и $\varphi'(\beta)$ существуют h_β, (8) и имеет место формула:

$$h_\beta=-\beta\varphi'(\beta)+\varphi(\beta)=\lim_{N}\frac{1}{\sqrt{N}}\ln p_{\beta,N}(\Lambda)\ (\text{in mean}).$$

Доказательство. В доказательстве теоремы I мы получили формулу

$$\varphi'_N(\beta)=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{\Lambda}\frac{1}{\Xi_N(\beta)}\left(\frac{\dim\Lambda}{\sqrt{N!}}\right)^{\beta}\ln\left(\frac{\dim\Lambda}{\sqrt{N!}}\right)$$

из которой наше утверждение следует немедленно. Более того, если для (8) доказана теорема о более сильной сходимости (почти всюду, в среднем), то в предположении о существовании свободной энергии то же верно для h_β :

ЗАМЕЧАНИЕ I. Если существует предел (8) в смысле среднеквадратического, то его можно найти по формуле

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\sqrt{N}}\Big[\sum_{\Lambda}(\ln p_{\beta,N}(\Lambda))^2\, p_{\beta,N}(\Lambda)\Big]^{1/2}=h_\beta \ .$$

2. Так как $\mathcal{S}(2)=0$ (см. п$^{\circ}$I), то $h_2=-2\mathcal{S}'(2)$.

3. При $\beta=0$ формула тавтологична $h_0=\mathcal{S}(0)=\frac{2\pi}{\sqrt{6}}$.

СЛЕДСТВИЕ. При предположениях теоремы имеем $h>0$, $\mathcal{S}(\beta)>\geqslant\beta\mathcal{S}'(\beta)$; поэтому, если существует предел $\lim\limits_{\beta\to\infty}\frac{\mathcal{S}(\beta)}{\beta}=-c$, то $c=-\lim\limits_{\beta\to\infty}\mathcal{S}'(\beta)$.

Константа c имеет очень важный смысл, как это следует из выкладки:

$$\lim_{N\to\infty}\max\Big(-\frac{1}{\sqrt{N}}\ln\frac{\dim\Lambda}{\sqrt{N!}}\Big)=-\lim_{N\to\infty}\lim_{\beta\to\infty}\frac{1}{\sqrt{N}}\ln\Big[\frac{1}{(N!)^{\frac{\beta}{2}}}\sum_{\Lambda}$$

$$\sum_{\Lambda}(\dim\Lambda)^\beta\Big]^{1/\beta}=-\lim_{N\to\infty}\lim_{\beta\to\infty}\frac{\mathcal{S}_N(\beta)}{\beta}=-\lim_{\beta\to\infty}\frac{\mathcal{S}(\beta)}{\beta}\equiv c \ .$$

Иначе говоря, c есть предел (если существует) выражения

$$\frac{1}{\sqrt{N}}\ln\Big(\frac{\max\limits_{\Lambda}\dim\Lambda}{\sqrt{N!}}\Big)$$

и в наших предположениях $\max\limits_{\Lambda\in\hat{\mathfrak{S}}_N}\dim\Lambda\sim\sqrt{N!}\ e^{-c\sqrt{N}}$

ПРИЛОЖЕНИЕ (А.М.Пасс)

Вычисление функции $\mathcal{S}_N(\beta)$ осуществлялось прямым суммированием по формуле

$$\mathcal{S}_N(\beta)=\frac{1}{\sqrt{N}}\ln\sum_{\Lambda\in\hat{\mathfrak{S}}_N}$$

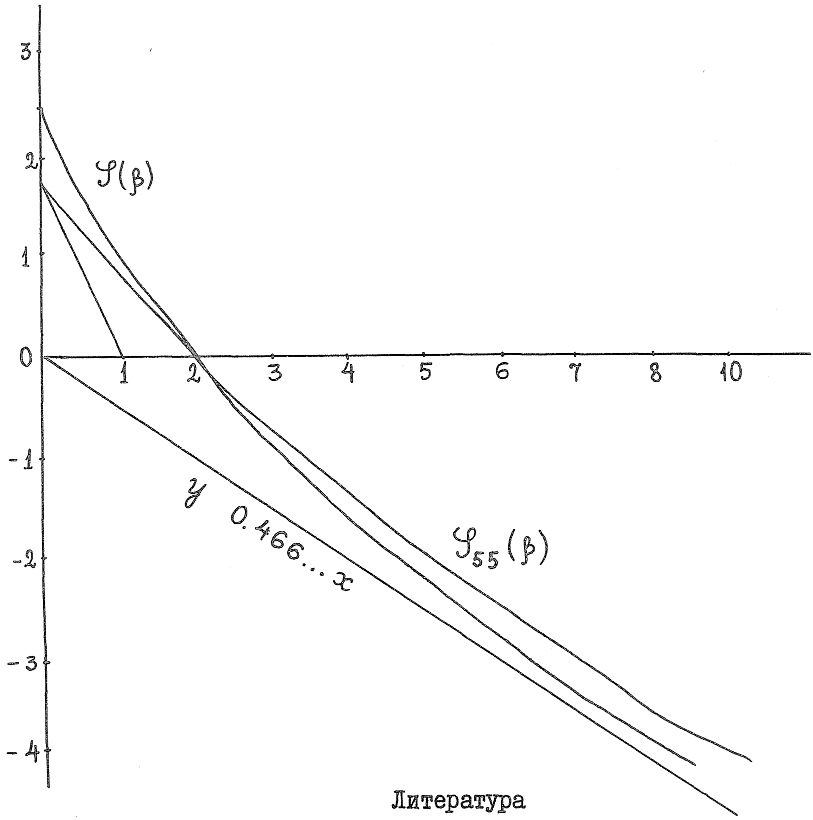
Ниже приводятся данные для N = 45, 50, 55, при некоторых значениях β в интервале $[0,\ 80]$. Другие значения $\mathcal{S}_N(\beta)$ не несут новой информации, что же касается N , то значение 60 является пределом возможности имевшихся ЭВМ (типа СМ-4). В работе [7] удалось при вычислении $\max \dim \Lambda$ дойти до N ==75, подробности этих расчетов не опубликованы см. [3].

ВЫВОДЫ. I. По-видимому, $\mathcal{S}(\beta) = \lim\limits_{N} \mathcal{S}_N(\beta)$ существует, судя по стабилизации (хотя и медленной) значений $\mathcal{S}_N(\beta)$.

2. Вопрос, поставленный А.М.Вершиком о непрерывности $\mathcal{S}$ в 0 также скорее всего решается положительно, во всяком случае $\mathcal{S}_N(\beta)$ при $\beta = 0{,}001$ стабилизируются близко к $\mathcal{S}_N(0) = \mu(N)$

3. При $\beta \geqslant 10$ становится линейной и переходи в прямую $y = 0{,}466\ldots x$ с высокой точностью. Эта прямая есть, видимо, асимптота для $\mathcal{S}$, а коэффициент 0,466...есть $c = \lim\limits_{\beta \to \infty} \frac{\mathcal{S}(\beta)}{\beta}$, см. п^{0}4.

β $\mathcal{S}(\beta)$ ↘	$N=45$	$N=50$	$N=55$
β = 0,00000	I.69909	I.72915	I.75559
0,00I	I.69746	I.72746	I.75384
0,002	I.69584	I.72577	I.75209
0,003	I.69422	I.72409	I.75035
0,I	-	I.7I245	I.73832
0,2	-	I.69625	I.72I6I
I,0	0.70658	0.7I765	0.72736
2,0	-0.00000	0.00000	-0.00000
5,0	-I.732I8	-I.762I0	-I.78364
I0,0	-4.224I4	-4.25904	-4.32823
20,0	-8.939I5	-8.869I5	-9.I2I26
30,0	-I3.58I42	-I3.39978	-I3.833I7
40,0	-I8.20269	-I7.9I427	-I8.5I875
50,0	-22.8I6I9	-22.423I92	-23.I93I4
60,0	-27.42602	-26.92985	-27.86205
70,0	-	-	-32.52797
80,0	-	-	-37.I92I7



Литература

I В е р ш и к А.М., К е р о в С.В. Асимптотика максимальной и типичной размерностей неприводимых представлений симметрической группы. Функц.ан. и его прил. 1981, 19, № 1, 25–36.

2 В е р ш и к А.М., К е р о в С.В. Асимптотика меры Планшереля симметрической группы и предельная форма таблиц Юнга Докл.АН СССР, 1977, т.233, № 6, 1024–27.

4 L i g g e t t T.M. Ergodic theoreme for the asymmetric simple exclusion process. Trans.Amer.Math.Soc.1975, v.213, 237–261.

5 R o s t H. Non-Equilibrium Behaviour of a Many Particle Process: Density Probile and Local Equilibria. Zs.Wahr.1981,

v.58, 41-53.
6. Szalay M., Turan P. On some problems of the statistical theory of partitions with application the characters of the symmetric group I. Acta Math., Acad.Sci.Hungary, 1977, v.29, 3-4, 361-79, III Ibid 1978, v.32, 1-2, 129-155.
7. McKay J. The largest degrees of irreducible characters of the symmetric group. Math.Comp. 1978, v.32, p.624-631.
8. Vershik A.M. Statistics on the partitions of the natural. VNV XScience Press. 1987. IV International Conf. of Prob.Theory and Math.Stat. Vilnius, 1985.
9 Вершик А.М. Биективное доказательство тождества Якоби и перестройки диаграмм Юнга. В кн.: Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика. УШ. Зап.науч.сем.ЛОМИ. 1986. т.155, 3-6.
10 Джеймс Г. Теория представлений симметрических групп. М., 1982.

On a statistical sum associated with the Young diagrams. Vershik A.M. - In: Differential geometry, Lie groups and mechanics IX (Zap.nauchn.semin.LOMI, v.164). L. "Nauka", 1987, p.20-29.

Asymptotic properties of the sums of powers of normalized dimensions of all irreducible complex representations of the symmetric group S_N as $N \to \infty$ are studied. The limiting Gibbs measure on the space of Young diagrams is calculated. Our approach is related to a special one-dimensional many particles model. In the appendix written by A.M.Pass some numerical and graphic information on the "Helmholtz energy" for the model is presented. Bibl. - 10.

Lyapunov Exponents, symmetric spaces and multiplicative ergodic theorem for semi-simple Lie groups. Kaymanovich V.A. - In: Differential geometry, Lie groups and mechanics IX (Zap.nauchn.semin. LOMI, v.164). L. "Nauka", 1987, p.30-46.

The classical theory of dyapunov characteristic exponents is reformulated in invariant geometric terms and developed for arbitrary non-compact semi-simple Lie groups with finite centre. A multiplicative ergodic theorem and a global law of large numbers for semi-simple Lie groups, and criteria for the Lyapunov regularity of linear systems of ordinary differential equations with subexponential growth of coefficients are proved. Bibl. - 21.