Д. Э. Аллахвердиев, Э. Э. Гасанов, Теорема полноты системы собственных и присоединенных элементов рациональных операторных пучков в банаховом пространстве,
Функц. анализ и его прил., 1974, том 8, выпуск 4, 76–78

Функциональный анализ и его приложения,
т. 8, вып. 4, 1974, 76—78.

ТЕОРЕМА ПОЛНОТЫ СИСТЕМЫ СОБСТВЕННЫХ И ПРИСОЕДИНЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ РАЦИОНАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ ПУЧКОВ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Дж. Э. Аллахвердиев, Э. Э. Гасанов

После известной работы М. В. Келдыша [1] о кратной полноте системы собственных и присоединенных элементов (с.п.э.) полиномиальных операторных пучков появился ряд работ, обобщающих эти результаты в различных направлениях. Одним из таких направлений является обобщение этих результатов на случай рациональных операторных пучков. В гильбертовом пространстве этому вопросу посвящены работы [3], [4] и [8], в которых установлены различные признаки кратной полноты системы с.п.э. таких пучков.

В настоящей статье подобного типа признаки установлены в банаховом пространстве.

Пусть

$$A(\lambda)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i}(\lambda-a_i)^{-j}A_{ij}+\sum_{k=0}^{m_0}\lambda^k A_{0k}, \tag{1}$$

где операторы A_{ij}, A_{0k} действуют в банаховом пространстве B и $\varepsilon_n(A_{ij})\to 0$, $\varepsilon_n(A_{0k})\to 0$ при $n\to\infty$ ($\varepsilon_n(A)=\inf\|A^{(n)}-A\|$, где $A^{(n)}$ пробегает множество конечномерных операторов, размерность которых не больше n).

Определим следующую систему элементов из B:

$$x_{j,h}^{(i,r)}=\sum_{k=0}^{h}\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{d\lambda^k}(\varphi_i^r(\lambda))\right]_{\lambda=c_j}y_{h-k}^{(j)}, \tag{2}$$

где $r=\overline{1,\ m_i}$ при $i=\overline{1,n}$, $r=\overline{0,\ m_i-1}$ при $i=0$, $0\leqslant h\leqslant p_j$ $(j=1,\ 2,\ \ldots)$ (p_j — кратность собственного элемента $y_0^{(j)}$), $\varphi_i^r(\lambda)=(\lambda-a_i)^{-r}$ при $i=\overline{1,\ n}$ и $\varphi_0^r(\lambda)=\lambda^r$, $y_{h-k}^{(j)}$ — цепочка канонической системы с.п.э. оператора $A(\lambda)$ по Келдышу, соответствующая собственному значению c_j.

Легко проверить, что если $A_{ij}=0$ $(i=\overline{1,\ n},\ j=\overline{1,\ m_i})$, то система (2) совпадает с производной цепочкой Келдыша для полиномиальных операторных пучков.

Систему с.п.э. оператора (1) будем называть N $(=\sum_{i=0}^{n}m_i)$*-кратно полной системой* в B, если векторы $\{x_{j,h}\}$, где $x_{j,h}=\{x_{j,h}^{(0,0)},\ \ldots,\ x_{j,h}^{(0,m_0-1)},\ x_{j,h}^{(1,1)},\ \ldots,\ x_{j,h}^{(n,m_n)}\}$ полны в B^N, являющемся топологическим произведением N экземпляров банахова пространства B с нормой $\|\tilde{x}\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\|x_i\|^2}$ $(x=(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_N),\ x_i\in B)$.

Для оценки роста резольвенты оператора (1) положим

$$\hat{T}(R)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln^+\|(I-A(\mathrm{Re}^{i\theta}))^{-1}\|\,d\theta+\int_{r_1}^{R}\frac{n(t,\ r_1,\ A(\lambda))}{t}\,dt,$$

где $r_1>\max(|a_1|,\ |a_2|,\ \ldots,\ |a_n|)$, $n(t,\ r_1,\ A(\lambda))$ — число полюсов $(I-A(\lambda))^{-1}$ в $r_1<|\lambda|<t$, $\ln^+\alpha=\max(0,\ \ln\alpha)$.

Теорема 1.

$$\hat{T}(R) \leqslant 2\left(\sum_{i=0}^{n} m_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i} \nu\left(\frac{1}{c_{ij}}, A_{ij}\right) + \sum_{k=1}^{m_0} \nu\left(\frac{1}{c_k}, A_k\right) + 1\right) \times$$

$$\times \ln 2\left[1 + 2C\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r_0^{m_i}} \frac{r_0^{m_i} - 1}{r_0 - 1} + \frac{R^{m_0+1} - R}{R - 1}\right)\right] + c^{(1)} \ln R + c^{(2)},$$

где C, $c^{(1)}$, $c^{(2)}$ — постоянные, не зависящие от R; c_{ij}, c_k удовлетворяют следующему неравенству:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i} \frac{c_{ij}}{r_0^j} + \sum_{k=1}^{m_0} c_k R^k < \frac{1}{2},$$

а $\nu(t, A)$ обозначает количество чисел $\varepsilon_n(A)$, больших t^{-1}. Будем говорить, что операторный пучок (1) в окрестности полюса a_i ($i = \overline{1, n}$, $a_0 = \infty$) удовлетворяет условию α), если $A_{ij} = (c_{ij} + z_{ij} I) H_i^j$ ($j = \overline{1, m_i}$), где H_i являются H-операторами конечного нижнего порядка *), $\overline{R(H_i)} = B$, C_{ij} — произвольные вполне непрерывные операторы, $c_{i, m_i} = 0$, z_{ij} — произвольные комплексные числа, $z_{i,m_i} \neq 0$; условию β), если $A_{ij} = B_{ij} H_i^j$ ($j = \overline{1, m_i}$), где H_i являются операторами конечного нижнего порядка p_i, $\overline{R(H_i)} = B$, B_{ij} — произвольные вполне непрерывные операторы, $B_{im_i} = I$, существует конечная система лучей R_i, выходящих из точки a_i, таких, что угол между соседними лучами меньше π/p_i и в достаточно близкой окрестности точки a_i выполняется неравенство

$$\|(I - (\lambda - \alpha_i)^{-m_i} H_i^{m_i}) H_i^j\| \leqslant \alpha |\lambda - a_i|^j \qquad (j = \overline{0, m_i - 1})$$

(а при $i = 0$ существует конечная система лучей R_0, выходящих из начала координат, таких, что угол между соседними лучами меньше π/p_0 и при достаточно больших λ удовлетворяется неравенство

$$\|(I - \lambda^{m_0} H_0^{m_0})^{-1} H_0^j\| \leqslant \alpha |\lambda|^{-j} \qquad (j = \overline{0, m_0 - 1}));$$

условию γ), если A_{ij} ($j = \overline{1, m_i}$) суть конечномерные операторы.

Теорема 2. *Пусть $A(\lambda)$ имеет вид* (1) *и в окрестности каждого полюса удовлетворяет хотя бы одному из условий α), β), γ). Тогда система с.п.э. оператора $A(\lambda)$ почти N-кратно полна* **) *в B, где N есть сумма кратностей тех полюсов оператора $A(\lambda)$, которые удовлетворяют условиям α) или β).*

Вкратце изложим ход доказательства теоремы 2. Если векторы (2) для $A(\lambda)$ не являются N-кратно полными, то найдется ненулевой вектор $\varphi \in (B^*)^N$, $\varphi = \{\varphi^{(0,0)}, \ldots, \varphi^{(0, m_0-1)}, \ldots, \varphi^{(n, m_n)}\}$ (координаты, соответствующие полюсам типа γ), опускаются) такой, что $\varphi(x_{j,h}) = 0$ при всех j, h. Положим

$$\varphi(\lambda) = \sum_{s=1}^{n_0}\sum_{j=1}^{m_{i_s}} (\lambda - a_{i_s})^{-j} \varphi^{(i_s, j)} + \sum_{k=0}^{m_0-1} \lambda^k \varphi^{(0, k)},$$

предполагая, что полюсы a_{i_s} и ∞ удовлетворяют условию α) или β), и рассмотрим $u(\lambda) = (I - A^*(\lambda))^{-1} \varphi(\lambda)$. Последнее может иметь особенности лишь в точках a_{i_s} и ∞ и в полюсах $(I - A^*(\lambda))^{-1}$. В силу условия $\varphi(x_{j,h}) = 0$ полюсы $(I - A^*(\lambda))^{-1}$ не являются особенностями для $u(\lambda)$, а из теоремы 1 и из условий α) и β) следует, что в окрестностях точек a_{i_s} рост его возрастания не выше, чем полином степени m_{i_s}.

---

*) Оператор A называется *H-оператором*, если весь его спектр содержится на вещественной оси и резольвента допускает оценку $\|(A - \lambda I)^{-1}\| \leqslant C |\operatorname{Im} \lambda|^{-1}$ при $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$. Говорят, что оператор A имеет *конечный нижний порядок*, если $\varliminf_{t \to \infty} \dfrac{\ln \nu(t, A)}{\ln t} < \infty$.

**) Система векторов в банаховом пространстве B называется *почти полной*, если число линейно независимых функционалов из B^*, аннулирующихся на этой системе, конечно.

Поэтому имеем

$$u(\lambda)=\sum_{s=1}^{n_0}\sum_{j=1}^{m_{i_s}}(\lambda-a_{i_s})^{-j}u^{(i_s,\,j)}+\sum_{k=0}^{m_0-1}\lambda^k u^{(0,\,k)}.$$

Сравнивая коэффициенты при λ и $\lambda-a_{i_s}$ в $\varphi(\lambda)=(I-A^*(\lambda))\,u(\lambda)$, находим, что $u^{(i_s,j)}=0$ и $u^{(0,k)}=0$, а это возможно лишь тогда, когда $\varphi^{(i_s,j)}=0$ и $\varphi^{(0,k)}=0$. Теперь, если заметить, что полюсы, удовлетворяющие условию γ) для $(I-A(\lambda))^{-1}$, могут быть регулярными точками или конечномерными полюсами, то получится утверждение теоремы.

Институт кибернетики АН
Азерб. ССР

Поступило в редакцию
12 июля 1973 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Келдыш М. В., ДАН СССР **77**, № 1 (1951), 11—14. **2.** Аллахвердиев Дж. Э., Ученые записки Азерб. ун-та **2** (1957), 27—35. **3.** Аллахвердиев Дж. Э., Докторская диссертация, М., 1967. **4.** Аллахвердиев Дж. Э., ДАН СССР **186**, № 4 (1969), 743—746. **5.** Мацаев В. И., ДАН СССР **154**, № 5 (1964), 1034—1037. **6.** Мацаев В. И., ДАН СССР **155**, № 1 (1964), 273—276, **7.** Маркус А. С., Матем. сб. **70** (1966), 526—561. **8.** Могульский Е. З., Изв. АН Арм. ССР **3**, № 6 (1968), 427—442. **9.** Гасанов Э. Э., Изв. АН Азерб. ССР, № 5—6 (1971), 56—60. **10.** Стоилов С., Теория функций комплексного переменного, т. 2, М., ИЛ, 1962. **11.** Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, т. 2, М., «Наука», 1968.