А. В. Шутов, Борис Алексеевич Венков. Жизнь и творчество, *Чебышевский сб.*, 2005, том 6, выпуск 3, 225–239

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 6 Выпуск 3 (2005)

БОРИС АЛЕКСЕЕВИЧ ВЕНКОВ. ЖИЗНЬ И ТВОРЧЕСТВО

А. В. Шутов (г. Владимир)

Борис Алексеевич Венков родился 13 августа (31 июля по старому стилю) 1900 года в деревне Кратково Псковской области. Его отец, Алексей Алексеевич, и мать, Федосья Сергеевна, были сельскими учителями. В 1907 г. Б. А. Венков был помещен на казенное воспитание в Гатчинский сиротский институт, который был им закончен в 1917 г. с золотой медалью. Уже в детстве Б. А. Венков заинтересовался математикой. В 1918 г. Б. А. Венков поступил на физико-математический факультет Петроградского (Ленинградского) университета, в котором проучился до 1925 г. Одновременно с учебой в университете Венков работал (1920-1925 гг.) учителем математики в 35-й Советской трудовой школе им. Н. К. Крупской, так как он должен был самостоятельно добывать средства к жизни. Однако, несмотря на столь тяжелые условия, уже на младших курсах университета Б. А. Венков начал математические исследования.

Первым его научным руководителем был профессор Я. В. Успенский. Немалое влияние на творчество Венкова в те годы оказал также И. М. Виноградов. Общение с Я. В. Успенским и И. М. Виноградовым определило основное направление математических исследований Б. А. Венкова — теория чисел. Первые две математические работы Венкова, посвященные арифметике кватернионов, были опубликованы в 1922 году. По окончании университета Б. А. Венков работал (1925-1928 гг.) в Главной геофизической обсерватории сотрудником II разряда. В эти годы Венковым были написаны его фундаментальные работы, посвященные арифметике бинарных и тернарных квадратичных форм, включая знаменитую работу, содержавшую элементарное доказательство формул Дирихле для числа классов. По совокупности этих работ Б. А. Венкову была присвоена сразу степень доктора физико-математических наук.

В 1928 г. Б. А. Венков был приглашен в Математический институт им. В. А. Стеклова АН СССР в качестве научного сотрудника I разряда - специалиста. С 1935 г. вплоть до кончины Б. А. Венков был профессором, а с 1950 г. - заведующим кафедрой высшей алгебры и теории чисел Ленинградского университета. В 30-ые годы началось тесное сотрудничество Б. А. Венкова с Борисом Николаевичем Делоне. Общение с Б. Н. Делоне определило новый круг научных интересов Венкова — геометрия квадратичных форм и теория параллелоэдров. Наиболее важная работа Б. А. Венкова того периода "О приведении положительных квадратичных форм" [12] была посвящена ответу на вопрос, поставленный Б. Н. Делоне — существуют ли области приведения положительно определенных квадратичных форм, отличные от области приведения Минковского? Одновременно с работой в Ленинградском университете Б. А. Венков в разные годы преподавал в Ленинградском Политехническом и Педагогическом институтах. Научная и педагогическая деятельность Б. А. Венкова продолжалась и во время Великой Отечественной войны. В 1940-1942 гг. он был старшим научным сотрудником Ленинградского отделения Математического института им.

В. А. Стеклова АН СССР. Затем Б.А. Венков был эвакуирован в Омскую область, где два года преподавал в сельской школе. В эти годы были написаны его работы [13], [14], посвященные спектру Маркова и опубликованные уже после войны. По окончании войны Б. А. Венков сразу вернулся к своей работе в Ленинградском университете. Борис Алексеевич Венков скончался 13 декабря 1962 года в Ленинграде от сердечного приступа.

Научное творчество Б. А. Венкова можно разделить на два периода. Первый связан с арифметической теорией квадратичных форм и проблемой вычисления числа классов. Второй — с геометрией квадратичных форм и теорией параллелоэдров.

Первые научные исследования Б. А. Венкова относятся к 1919 году, когда он, будучи студентом младших курсов университета, сотрудничал с Я. В. Успенским в разработке методов Лиувилля и в их применении к теоретико-числовым функциям. Основной результат этой работы связан с получением соотношений для числа классов положительно определенных бинарных квадратичных форм. Эта задача была очень популярна в конце XIX - начале XX века. Ей занимались такие математики, как Гурвиц, Кронекер, Эрмит, Морделл. При этом традиционно использовались теория эллиптических функций или тэта-ряды. Б. А. Венков предложил новый элементарный подход к выводу соотношений для числа классов, позволивший единым способом получить большинство известных соотношений, а также открыть много новых. Приведем один из результатов этой работы.

Пусть $F^*(n)$ - число классов бинарных положительно определенных квадратичных форм, представляющих нечетные числа. Пусть

$$F(n) = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ F^*(n) - \frac{1}{2}, & n = s^2, n \text{ - нечетное} \\ F^*(n), & \text{в остальных случаях} \end{cases}.$$

Тогда при $m \equiv 7 \pmod 8$ выполняется соотношение

$$\sum (-1)^{\frac{i^2-1}{8}} F(m - \frac{i^2}{2}) = (-1)^{\frac{m-7}{8}} \sum_{m=8x^2-y^2, 2x>y>0} x. \tag{1}$$

Эти результаты были опубликованы значительно позднее в докладе [2] на международном математическом конгрессе в Торонто. Многие из этих результатов впоследствии были включены Венковым в его монографию [9].

Следущие исследования Венкова посвящены арифметике кватернионов и ее приложениям к теории квадратичных форм. Эти исследования были опубликованы в 1922-1929 годах в виде единого мемуара [1], состоящего из пяти сообщений. Первая часть мемуара посвящена построению теории делимости целых кватернионов. Трудность построения этой теории состоит в том, что умножение кватернионов некоммутативно. Тем не менее, удается построить некоммутативные аналоги алгоритма Евклида и основной теоремы арифметики. Впервые это было сделано Гурвицем, но Венкову удалось внести значительное упрощение в изложение этой теории.

Теория делимости кватернионов имеет приложения к арифметике кватернарных квадратичных форм, а именно к доказательству теоремы Якоби о количестве представлений целого числа суммой четырех квадратов. Это доказательство основано на том факте, что выражение для нормы целого кватерниона $\alpha = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ имеет вид $N(\alpha) = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$. Фундаментальная идея Венкова состояла в том, что арифметика кватернионов связана не только с кватернарными, но и тернарными квадратичными формами. Реализации этой идеи посвящена вся оставшаяся часть мемуара.

В основе этих приложений лежит открытая Венковым связь между кватернионными и квадратичными полями, а также построенная им теория поворотов целых векторов. При рассмотрении полей кватернионов Венков доказал следующий результат.

Всякое коммутативное подполе тела кватернионов либо совпадает с полем рациональных чисел, либо изоморфно мнимому квадратичному полю.

Глубокая теория мнимых квадратичных полей была создана Гауссом в его "Арифметических исследованиях". Венкову, с помощью установленного им изоморфизма, удалось перенести теорию Гаусса на кватернионные поля. Эти результаты включают в себя

1) Установление соответствия между идеалами мнимых квадратичных полей и примитивными кватернионами.

2) Построение теории кватернионных порядков.

3) Построение кватернионного аналога гауссовой теории родов (включая амбиговы классы).

Теория поворотов целых векторов и ее приложения к тернарным квадратичным формам основаны на изучении уравнения

$$\mu^2 = -m \tag{2}$$

с целым положительным m. Его решения имеют вид $\mu = xi + yj + zk$, где $x, y, z \in \mathbb{Z}$ и $m = N(\mu) = x^2 + y^2 + z^2$. Каждой паре μ и μ' целых примитивных решений уравнения (4) ставится в соответствие совокупность целых кватернионов ρ с условием

$$\rho\mu\rho^{-1} = \mu'.$$

Эта совокупность является двухчленным кватернионным модулем. Ей соответствует, в силу описанной выше биекции, мнимый квадратичный порядок, и, следовательно, бинарная положительно определенная квадратичная форма. При этом существует взаимно-однозначное соответствие между классами бинарных квадратичных форм и совокупность пар ("поворотов") целых векторов $(\mu, \varepsilon\mu'\varepsilon^{-1})$, где ε - одна из 24 кватернионных единиц

$$\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k, \frac{1}{2}(\pm 1 \pm i \pm j \pm k).$$

Эти соображения дают, в частности, новое доказательство теоремы Гаусса о представлении чисел суммами трех квадратов.

Пусть $r_3(m)$ *- количество примитивных представлений числа* m *суммой трех квадратов,* $h(-m)$ *- число классов собственно примитивных положительно определенных квадратичных форм определителя* m*. Тогда для* $m > 3$

$$r_3(m) = \begin{cases} 12h(-m), & m \equiv 1,2 \pmod 4 \\ 8h(-m), & m \equiv 3 \pmod 8 \end{cases}.$$

Развитая Венковым техника позволила получить и ряд других результатов о представлении чисел тернарными формами. Общая идея состоит в следующем. Пусть μ_0 и μ - целые корни уравнения (4), φ - класс бинарных квадратичных форм, соответствующий набору $(\mu_0, \varepsilon\mu\varepsilon^{-1})$. Рассматривая характер $\chi(\mu_0, \mu) = \chi(\varphi)$, получаем соотношение

$$\sum_{\mu} \chi(\mu_0, \mu) = 0. \tag{3}$$

Венков показал, что характер χ может быть явным образом выражен через коэффициенты кватернионов μ_0 и μ.

Формула (3) приводит к следствиям двух типов. Первое из них касается сумм вида

$$\begin{gathered} \textstyle\sum_{m=f_1(x,y)} g_1(x,y), \\ \textstyle\sum_{m=f_2(x,y,z)} g_2(x,y,z), \end{gathered} \tag{4}$$

где $f_1(x,y)$ и $f_2(x,y,z)$ - бинарная и тернарная квадратичные формы соответственно. Суммы вида (4) изучались Лиувиллем, Гауссом и Якоби, нашедшими ряд соотношений для специально выбранных форм f_1, f_2 и функций g_1, g_2. Такие же суммы возникали и в работе Венкова о соотношениях для числа классов [2] (Ср. с формулой (1)). Арифметика кватернионов позволила Венкову получить целый ряд новых соотношений для таких сумм. Приведем лишь один из его результатов.

Пусть $n \equiv 1 \pmod 8$*. Тогда сумма*

$$\sum_{11n = x^2+y^2+z^2, x,y,z>0} \left(\frac{11}{xyz}\right)$$

равна 0, если n *не квадрат, и равна* $3(-1)^{\frac{s-1}{2}}$*, если* $n = s^2$*.*

Второе применение формулы (3) связано с задачей представления формы формой. Эта задача впервые была рассмотрена Гауссом в его “Арифметических исследованиях”. Позднее ее также рассматривал Морделл. Венков полностью решил задачу о представлении бинарной квадратичной формы тремя квадратами. Приведем его основной результат.

Пусть $\varphi = mx^2 + 2lxy + m'y^2$ *- положительно определенная бинарная квадратичная форма. Пусть числа* m *и* n *не делятся на квадрат. Обозначим через*

PQ наибольший общий делитель m, l и m', причем P и Q - произведения простых чисел, входящих в разложение числа $mm'-l^2$ с четными и нечетными показателями соответственно. Пусть M - произведение простых чисел, делящих m и l, но не делящих m', M' - аналогичное произведение для m, $L=\frac{mm'-l^2}{PQMM'}$, $R=\frac{m}{MPQ}$, $R'=\frac{m'}{M'PQ}$. Тогда для возможности представления формы φ суммой трех квадратов целочисленных линейных форм переменных x и y необходимо и достаточно выполнения следующих условий

1) $\left(\frac{-QMM'L}{P}\right)=1$

2) $\left(\frac{-PLM'R}{Q}\right)=\left(\frac{-PLMR'}{Q}\right)=1$

3) $\left(\frac{-m}{M'}\right)=\left(\frac{-m'}{M}\right)=1$

4) Каждое нечетное простое число $p|L$ с $\left(\frac{-m}{p}\right)=-1$ входит в L с четным показателем.

При выполнении этих условий количество указанных представлений выражается формулой

$$r_3(\varphi)=24\cdot 2^{PQMM'}\sum_{d|L, d\equiv 1 \pmod 2}\left(\frac{-m}{d}\right). \tag{5}$$

Результаты Венкова об арифметике квадратичных форм оказали существенное влияние на развитие этой теории на много лет вперед.

Глубокое обобщение теории делимости кватернионов и теории целочисленных поворотов было получено Ю. В. Линником, А. В. Малышевым и их учениками. Они перенесли результаты Венкова сначала на случай эрмитионов, а затем и на случай общих матриц размера 2×2. Более того, Ю. В. Линник и Б. Ф. Скубенко построили общую теорию поворотов $n\times n$ матриц. Отметим, что возможность этого обобщения была предугадана Венковым в его докладе на I Всесоюзном математическом съезде [7]. При этом теория поворотов нашла очень много приложений в аналитической теории чисел, а именно в задачах асимптотического распределения целых точек на эллипсоидах и гиперболоидах. Эта задача была одной из центральных задач аналитической теории чисел XX века. Существенный вклад в ее решение внесли Ю. В. Линник, А. В. Малышев, Б. Ф. Скубенко, О. М. Фоменок, Е. П. Голубева и их ученики. В случае сферы решение, близкое к окончательному, получил Г. Иванец.

С другой стороны, результаты о делимости кватернионов многократно обобщались с алгебраической точки зрения. Важность этого обобщения также была указана Венковым в [7]. В настоящее время эти результаты представляют собой часть общей алгебраической теории делимости в некоммутативных кольцах.

В последние годы возрос интерес к суммам вида (4). В работах математиков грузинской теоретико-числовой школы (Г. А. Ломадзе и его ученики) было показано, что такие суммы неизбежно возникают при попытке решения задачи о представлении целого числа неодноклассной квадратичной формой от большого числа переменных.

Задача о представлении формы формой находилась в центре внимания арифметической теории квадратичных форм на протяжении всего XX века. Наибольшее внимание традиционно уделялось таким вопросам, как p-адические плотности (Зигель, Китаока, Шульце-Пилот) и тэта-ряды рода больше один (А. Н. Андрианов, В. Г. Журавлев). В последние годы В. Г. Журавлевым и его учениками был предложен новый метод, впервые позволивший получить аналоги формулы (5) в общей задаче представления формы формой. Хочется отметить, что этот метод значительно ближе к арифметико-геометрическим методам Гаусса и Венкова, чем к современным аналитическим методам. Кроме того, этот метод совсем недавно был перенесен Г. Шимурой на случай произвольных вполне вещественных полей.

Подлинной вершиной первого ("арифметического") периода деятельности Б. А. Венкова являются его работы [3] и [4], посвященные задаче о числе классов бинарных квадратичных форм. Формулы для числа классов бинарных форм впервые были получены Дирихле аналитическим методом, основанным на теории L-функций. Венкову удалось дать элементарное арифметическое доказательство формул Дирихле для $h(-m)$ при дополнительном предположении, что m представимо в виде суммы трех квадратов. Это доказательство явилось полной неожиданностью для специалистов. В свое время оно было не меньшей научной сенсацией, чем элементарное доказательство Сельберга асимптотического закона распределения простых чисел. Сформулируем результат Венкова.

Пусть $m > 0$ *- целое бесквадратное число,* $m \not\equiv 7 \pmod 8$. *Пусть* $h(-m)$ *- число классов целочисленных бинарных положительно определенных квадратичных форм определителя* m, *собственно примитивных, если* $m \equiv 1,2 \pmod 4$, *и несобственно примитивных, если* $m \equiv 3 \pmod 8$. *Тогда*

$$h(-m) = \begin{cases} \sum_{0<a<m,(a,2m)=1} \left(\frac{-m}{a}\right), & m \equiv 1,2 \pmod 4 \\ \frac{1}{3} \sum_{0<a<m,(a,2m)=1} \left(\frac{a}{m}\right), & m \equiv 3 \pmod 8 \end{cases}.$$

Доказательство Венкова основано на рассмотрении суммы вида

$$\sigma = \sum_{|l|<m, l\equiv m \pmod 2} r_3(\varphi_l)$$

и подобных ей сумм. Здесь $\varphi_l = mx^2 + 2lxy + my^2$. Эта сумма вычисляется двумя способами: 1) На основе формулы (5); 2) на основе выражения σ через $r_3(m)$ и, следовательно, через число классов.

Впоследствии доказательство Венкова усовершенствовал R. W. Dawis. К сожалению, скрытые пружины доказательства Венкова остались невыясненными до настоящего времени. В частности, до сих пор не найдено аналога этого доказательства для случая $m \equiv 7 \pmod 8$. Вероятно, это может быть сделано на основе общей теории представления бинарных форм тернарными.

Итогом первого периода деятельности Венкова стала его знаменитая монография [9], ставшая своего рода энциклопедией результатов теории чисел, допускающих элементарное арифметическое доказательство.

Второй этап научного творчества Б. А. Венкова связан с его исследованиями по геометрии квадратичных форм и примыкающей к ней теории параллелоэдров. В этих работах Венков выступил достойным продолжателем работ Коркина, Золотарева, А. А. Маркова и Г. Ф. Вороного. Венков очень высоко ценил работы Вороного. В работе [19] Венков утверждал, что "ознакомление с научным дневником Вороного является весьма поучительным", и, что "долгом советских арифметиков и геометров является продолжение изысканий нашего великого соотечественника". В [22] Венков утверждал, что работы Вороного "имеют принципиальный характер и послужат основой еще для многих исследований по геометрии положительных квадратичных форм". Основное направление деятельности Венкова в этот период — изучение фундаментальных областей некоторых групп в конусах, связанных с квадратичными формами. Общая программа такого исследования была изложена Венковым в работе [27]. Она включала в себя рассмотрение трех случаев.

1) Положительно определенные квадратичные формы.

В этом случае рассматривается пространство F коэффициентов квадратичной формы $\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{ij}x_ix_j$. Размерность этого пространства равна $\frac{n(n+1)}{2}$. Множество положительно определенных форм образует в этом пространстве выпуклый конус P.

Пусть G_n — группа целочисленных линейных преобразований пространства $\mathbb{R}^n$ с определителем ±1. Действие этой группы на пространстве F определяется как результат замены переменных в соответствующей квадратичной форме. Задача состоит в нахождении фундаментальной области группы G_n в конусе P.

2) Пусть f — неопределенная квадратичная форма, приводящаяся над $\mathbb{R}$ к одной из форм $x_1^2+\ldots+x_{n-1}^2-x_n^2$, $-x_1^2-\ldots-x_{n-1}^2+x_n^2$. Задача состоит в том, чтобы найти фундаментальную область группы автоморфизмов G_f формы f в конусе K, граница которого определяется уравнением $f=0$.

3) Пусть f - неопределенная квадратичная форма, приводящаяся над $\mathbb{R}$ к виду $x_1^2+\ldots+x_m^2-x_{m+1}^2-\ldots-x_n^2$ с $2\leqslant m\leqslant n-2$. В этом случае необходимо рассмотреть пространство миноров M размерности $r=C_n^m$. Точками этого пространства являются значения миноров порядка m матриц, составленных из координат направляющих векторов m-мерных положительных плоскостей формы f (то есть плоскостей, на которых значение f больше нуля). Венков показал, что в этом случае также можно определить конус, имеющий свойства, аналогичные свойствам конусов из 1) и 2).

Венков успел реализовать только два первых пункта своей программы.

Наибольший интерес представляют результаты Венкова в случае положительно определенных квадратичных форм. В этом случае рассматриваемая задача эквивалентна проблеме приведения квадратичных форм. Значение этой теории состоит в том, что она позволяет выяснить, являются ли две квадратичные формы f_1 и f_2 эквивалентными над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$. Для бинарных форм эта проблема была полностью решена Гауссом. Для форм от $n > 2$ переменных были известны некоторые варианты условий приведения (Эрмит, Минковский для произвольного n, Зелинг для $n = 3$, Шарв для $n = 4$). Венков дал описание большого класса фундаментальных областей группы G_n в конусе P Как оказалось, при $n > 2$ существует континуум неэквивалентных областей приведения, зависящих от непрерывных параметров. Эти области имеют вид выпуклых пирамид с конечным числом граней. Этот результат, являющийся одним из самых замечательных в творчестве Венкова, представляет собой, в некотором смысле окончательное решение проблемы приведения положительно определенных квадратичных форм.

Опишем кратко конструкцию Венкова, изложенную им в работе [12]. Пусть φ - произвольная форма из P, $\overline{\varphi} = d(\varphi)\varphi^{-1}$ - форма, взаимная с φ, S - целочисленная $n \times n$ матрица определителя 1, $\overline{\varphi}S$ - форма, получаемая из $\overline{\varphi}$ подстановкой S. Для форм $f = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ и $g = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}x_ix_j$ определим полуинвариант (метрику) Вороного с помощью соотношения

$$(f, g) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}.$$

Область приведения по Венкову V_φ определяется как множество положительно определенных квадратичных форм f, удовлетворяющих условию

$$(f, \overline{\varphi}) \leqslant (f, \overline{\varphi}S) \tag{6}$$

для всех матриц S. Венкову удалось доказать, что V_φ есть фундаментальная область группы G_n, представляющая собой бесконечную выпуклую пирамиду с конечным числом граней. При этом существует несчетное число различных областей приведения V_φ, непрерывно зависящих от φ. Это показывает, что приведение положительно определенных квадратичных форм от $n > 2$ переменных коренным образом отличается от приведения бинарных форм (где имеется единственная, с точностью до эквивалентности, связная область приведения).

Позднее Б. Н. Делоне дал изящную геометрическую интерпретацию конструкции Венкова в пространстве коэффициентов квадратичных форм, а С. С. Рышков дал аналогичную интерпретацию в пространстве решетки.

Дальнейшие исследования, касающиеся приведения положительно определенных квадратичных форм проводились П. П. Таммелой, М. И. Штогриным и другими математиками. Эти исследования касались, в основном, изучения (включая явное вычисление) областей приведения V_φ для конкретных форм-параметров φ (случай приведения форм по Минковскому, случаи, когда φ - совершенная форма Вороного и т.д.), а также построения алгоритмов приведения конкретной формы φ.

Работы Венкова по теории приведения носят ярко выраженный алгоритмический характер. Венков не только строит фундаментальную область приведения, но и указывает способ, позволяющий для каждой положительно определенной квадратичной формы указать эквивалентную ей приведенную форму.

Таким образом, получено параметрическое семейство алгоритмов приведения квадратичных форм. Венков продолжил традицию Коркина, Золотарева и Вороного, которые также уделяли огромное внимание алгоритмическим аспектам своих работ. Отметим также, что именно работы Венкова лежат в основе большинства современных компьютерных реализаций алгоритмов приведения форм.

Венков также вычислил объем v_n части области приведения положительно определенных квадратичных форм от n переменных, находящейся под дискриминантной поверхностью $\det f = 1$. Этот важный инвариант арифметики квадратичных форм впервые был вычислен Минковским весьма сложным путем. Зигель предложил простой, но не вполне строгий способ вычисления v_n. Вычисление Венкова [21] идейно близко методу Зигеля, но свободно от его дефектов.

В случае неопределенных квадратичных форм от n переменных, имеющих сигнатуру $n-2$, вычисление фундаментальной области группы G_f в конусе K необходимо, в первую очередь, для построения алгоритмов решения неопределенных квадратичных диофантовых уравнений. Этому вычислению посвящены работы [10], [11], [20], [25]. Венкову удалось доказать, что в этом случае, как и для случая положительно определенных форм, существует фундаментальная область в виде одной бесконечной выпуклой пирамиды с конечным числом граней. Опишем конструкцию Венкова. Пусть A - некоторая точка конуса K, $S \in G_f$, AS - действие S на точку A. Пусть F_A - множество точек $X \in K$, удовлетворяющих неравенствам

$$(X, A) \leqslant f(X, AS) \tag{7}$$

для всех $S \in G_f$. Рассмотрим группу $G_A = Stab_G(A) = \{S \in G : AS = A\}$. Тогда если $|G_A| = 1$, то F_A есть фундаментальная область группы G_f в конусе K. При этом точки A с $|G_A| = 1$ имеются в окрестности любой внутренней точки конуса K. Таким образом, фундаментальная область вновь может быть выбрана бесконечным числом спопобов.

Следует отметить, что доказательство этих фактов существенным образом основано на глубоком изучении многогранной поверхности, являющейся выпуклой оболочкой множества целых точек конуса K. Эта поверхность является многомерным обобщением многоугольников Клейна. Ее изучение представляет огромный интерес для геометрии чисел и теории многомерных цепных дробей. Многие свойства этой поверхности впервые были открыты Венковым. Наибольшее внимание он уделил случаю тернарных квадратичных форм. Для них этот метод позволил, в частности, вычислить первые 11 членов спектра Маркова арифметических минимумов неопределенных тернарных форм [13], [14].

Отметим несомненное сходство конструкций (6) и (7) между собой. Анализ этого сходства привел Б. А. Венкова к задаче изучения общего выпуклого конуса K в пространстве $\mathbb{R}^n$, имеющего группу автоморфизмов G с компактным фактором. Изучению таких конусов посвящены работы [30], [31], написанные совместно с Б. Б. Венковым.

В работе [30] показано, что всякая точка на границе конуса G-эквивалентна точке со сколь угодно малыми координатами. Доказано также, что если G имеет абелеву подгруппу конечного индекса, то K есть симплициальный многогранный телесный угол.

Определения (6) и (7) для фундаментальных областей групп в конусах напоминают известную конструкцию Дирихле-Вороного для фундаментальных областей решеток. Обобщению этого наблюдения посвящена работа [31]. В ней вводится понятие нормальной G-триангуляции конуса K. Изучается вопрос о том, когда G-триангуляция будет областью Дирихле-Вороного. В работе дается полное решение этой проблемы в терминах характеров и когомологий групп. В частности, условия теоремы Венкова выполняются для всех классических конусов и арифметических групп ранга, большего единицы.

Позднее идеи Венкова были применены для нахождения фундаментальных областей многомерных симплектических групп (Crisalli и другие).

Другим направлением геометрических исследований Б. А. Венкова являются его исследования по теории параллелоэдров [23], [24], [29], [32]. Понятие параллелоэдра было введено в математику выдающимся русским кристаллографом Е. С. Федоровым. Глубокие математические исследования по теории параллелоэдров принадлежат Г. Ф. Вороному, который впервые связал эту теорию с теорией положительно определенных квадратичных форм. Известная гипотеза Вороного о том, что всякий параллелоэдр является областью Дирихле-Вороного некоторой решетки остается недоказанной и в настоящее время. Работы Вороного оставили открытым вопрос о геометрическом описании параллелоэдров. Это описание было получено Б. Н. Делоне и А. Д. Александровым в размерностях, не превосходящих 4. Венков первым дал геометрическое описание параллелоэдров произвольной размерности [24]. Им было доказан следующий результат.

Выпуклый d-мерный многогранник P является параллелоэдром тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия

1) P - центрально-симметричен.

2) Все (d-1)-мерные грани P центрально-симметричны.

3) Образ P при проекции $h : P \to L^2$ вдоль любой его $(d-2)$-мерной грани на дополняющую плоскость есть параллелограмм или центрально-симметричный шестиугольник.

Позднее было доказано, что при $d \geqslant 3$ условие 1) вытекает из условия 2) (McMullen).

Как следствие этой теоремы Венков получил доказательство того, что любой параллелоэдр является нормальным.

Позднее, в работе [29] были изучены проекции параллелоэдров. Венков получил следующий результат.

Пусть параллелоэдр P имеет ненулевую толщину в направлении плоскости $\mathbb{R}^k$, то есть пересечение P со всякой k-мерной плоскостью, параллельной

$\mathbb{R}^k$ *либо пусто, либо* k*-мерно. Тогда проекция* P *параллельно* $\mathbb{R}^k$ *в дополнительную плоскость есть* $(n-k)$*-мерный параллелоэдр.*

При $n = 4$, $k = 1$ такие проекции изучались Б.Н.Делоне. Сам Венков ранее использовал такие проекции с $k = n - 2$ для получения геометрического описания параллелоэдров. В общем случае ему удалось также получить условия, обеспечивающие существование k-мерных направлений ненулевой толщины.

Дальнейшее изучение теории параллелоэдров и ее обобщение на сферические и гиперболические пространства продолжалось на протяжении всего XX века (Б. Н. Делоне, А. Д. Александров, С. С. Рышков, Н. П. Долбилин, М. И. Штогрин, М. Деза и многие другие математики). Все эти исследования основывались на результатах Венкова.

Остановимся также на результатах Венкова, лежащих несколько в стороне от основных направлений его математических исследований. Работы [5], [8] посвящены проблеме построения всех кубических полей данного дискриминанта. Для решения этой задачи Венков использовал разложение резольвенты Лагранжа на простые идеалы в соответствующем квадратичном поле.

Отметим также работу [17], в которой исследуется распределение значений функции $\frac{\varphi(n)}{n}$ ($\varphi(n)$ - функция Эйлера) на интервале $(0; 1)$. В этой работе изучено также распределение значений некоторых более общих арифметических функций. Постановки задач, рассмотренные Венковым в этой работе, во многом предвосхитили последующее развитие вероятностной теории чисел (Кубилюс, Эллиот и другие). Хотя методы Венкова носят элементарный характер, некоторые результаты этой работы до сих пор не могут быть получены исходя их общих аналитических методов.

На протяжении всей своей жизни Б. А. Венков уделял большое внимание изучению истории математики. Им исследовалось творчество Эйлера [6], Гаусса [26], Г. Ф. Вороного [15], [19], [22], а также творчество современников [16], [18], [28]. При этом работы классиков всегда были источником идей в чисто математическом творчестве Венкова.

Борис Алексеевич Венков был одним из ведущих профессоров математико-механического факультета Ленинградского университета. Его содержательные и исключительные по ясности лекции пользовались большим успехом у слушателей. Особенно запомнились студентам замечательные спецкуры, читаемые Б. А. Венковым: “Геометрическая теория чисел” и “Правильные деления евклидова пространства”. А. В. Малышев хранил записи спецкурса Венкова по геометрии чисел до конца жизни. Многие математики в той или иной мере считают Б. А. Венкова своим учителем Под его руководством защитили кандидатские диссертации Киселев, Мельников, Ремаров, Симакова и другие математики. Огромно влияние Б. А. Венкова на круг научных интересов и творчество таких замечательных математиков как Ю. В. Линник, А. В. Малышев, Б. Б. Венков. Работы Бориса Алексеевича Венкова оказали огромное влияние на развитие теории чисел, особенно теории квадратичных форм. Его идеи являются актуальными и плодотворными и в настоящее время.

Печатные работы Б. А. Венкова

[1] Об арифметике кватернионов. I-V // Изв. Рос. АН. Сер.6. 1922. Т. 6. С. 205–220; с. 221–246; Изв. АН СССР. Сер. 7. Отд-ние физ.-мат. наук, 1929. № 5. С. 489–504; № 6. С. 535–562; № 7. С. 607–622.

[2] On some new class-number relations // Proc. Internat. Math. Congress (Toronto, 1924). Vol. 1. Toronto, 1928. P. 315–317 (Совместно с Я.В.Успенским).

[3] О числе классов бинарных квадратичных форм отрицательных определителей. I-II // Изв. Ан СССР. Сер. 7. Отд-ние физ.-мат. наук. 1928. № 4–5. С. 375–392; № 6–7. С. 455–480.

[4] Über die Klassenanzahl positiver binärer quadratischer Formen. // Math. Z. 1931. Bd. 33. № 3. P. 350-374.

[5] О построении кубических областей данного дискриминанта // Тр. Ленингр. Ин-та инж. ж.-д. трансп. 1934. Вып. 9. С. 107.

[6] О работах Леонарда Эйлера по теории чисел // В кн.: Леонард Эйлер (1707-1783). Сб. статей и материалов к 150-летию со дня смерти. М.-Л., Изд-во АН СССР, 1935. С. 81-87. (Тр. Ин-та истории науки и техники. Сер.2, Вып.1).

[7] Современное состояние арифметики гиперкомплексных чисел // Тр. I Всесоюз. мат. съезда. (Харьков, 1930). М.-Л., ОНТИ, 1936. С. 219–223.

[8] О построении кубических областей данного дискриминанта // Тр. II Всесоюз. мат. съезда. (Ленинград, 1934). Т. 2. Л.-М., Изд-во АН СССР, 1936. С. 28–31.

[9] Элементарная теория чисел. М.-Л., ОНТИ, 1937. 219 с.

[10] О группе автоморфизмов неопределенной квадратичной формы // ДАН СССР, 1937. Т. 14. № 3. С. 97–98.

[11] Об арифметической группе автоморфизмов неопределенной квадратичной формы // Изв. АН СССР. Отд-ние мат., ест. наук. Сер. мат. 1937. № 2. С. 139–170.

[12] О приведении положительных квадратичных форм // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1940. Т. 4. № 1. С. 37–52; перепечатано в кн.: Вороной Г. Ф. Собрание сочинений. Т. 3. Киев, Изд-во АН УССР, 1953. С. 235–246.

[13] Об экстремальной проблеме Маркова для неопределенных тройничных квадратичных форм // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1945. Т. 9. № 6.

С. 429–494.

[14] Об экстремальной проблеме Маркова для неопределенных тройничных квадратичных форм // Науч. бюл. Ленингр. ун-та. 1946. № 7. С. 7–9.

[15] Изложение двух работ Г. Ф. Вороного // В кн.: Делоне Б. Н. Перербургская школа теории чисел. М.-Л., Изд-во АН СССР, 1947. С. 247–264.

[16] Изложение работ И.М.Виноградова // В кн.: Делоне Б.Н. Перербургская школа теории чисел. М.-Л., Изд-во АН СССР, 1947. С. 324–419.

[17] Об одной монотонной функции // Учен. зап. Ленингр. ун-та. 1949. № 111. Сер. мат. наук. Вып. 16. С. 3–19.

[18] Родион Осиевич Кузьмин (1891-1949. Некролог) // Успехи мат. наук. 1949. Т. 4. Вып. 4. С. 148-155. (Совместно с И. П. Натансоном).

[19] О научном дневнике Г. Ф. Вороного // Укр. мат. журн. 1951. Т. 3. № 3. С. 279–289.

[20] О неопределенных квадратичных формах с целыми коэффициентами // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1951. Т. 38. С. 30–41.

[21] Об интегральном инварианте группы унимодулярных линейных подстановок // Учен. зап. Ленингр. ун-та. 1952. № 144. Сер. мат. наук. Вып. 23. С. 3–25.

[22] Комментарии к сочинениям Г. Ф. Вороного // В кн.: Вороной Г. Ф. Собрание сочинений. В 3-х т. Киев, Изд-во АН УССР, 1952-1953.

[23] Комментарии к работам: О числах Бернулли. Т. 1. С. 392–393; О некоторых свойствах положительных совершенных квадратичных форм. Т. 2. С. 379-385; Заметки о неопределенных квадратичных формах. I. Т. 3. С. 225; Заметки к сочинению “Общая теория приведения квадратичных форм с вещественными коэффициентами”. Т. 3. С. 226–227; Заметки о неопределенных квадратичных формах. II. Т. 3. С. 228–234.

[24] Об одном классе евклидовых многогранников (Резюме докл.) // Успехи мат. наук. 1954. Т. 9. Вып. 4. С. 250–251.

[25] Об одном классе евклидовых многогранников // Вестн. Ленингр. ун-та. 1954. № 2. Сер. мат., физ., хим. Вып. 1. С. 11–31.

[26] О фундаментальной области неопределенной тройничной квадратичной формы // Учен. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та. 1955. Т. 14. Физ.-мат. фак. Вып. 1. С. 16–45.

[27] Труды К.Ф.Гаусса по теории чисел и алгебре // Вопр. истории естеств. и техн. 1956. Вып. 1. С. 54–60.

[28] Метрика Лобачевского и метрика Вороного в геометрии чисел // Тр. III Всесоюз. мат. съезда. (Москва, 1956). Т. 3. М., Изд-во АН СССР, 1958. С. 14–21.

[29] Дмитрий Константинович Фаддеев(К 50-летию со дня рождения) // Успехи мат. наук. 1958. Т. 13. Вып. 1. С. 233–238. (Совместно с И. Р. Шафаревичем).

[30] О проектировании параллелоэдров // Мат. сб. 1959. Т. 49. Вып. 2. С. 207–224.

[31] Об автоморфизмах выпуклого конуса // Вестн. Ленингр. ун-та. 1962. № 7. Сер. мат., мех., астрон. Вып. 2. С. 42–57. (Совместно с Б. Б. Венковым).

[32] Нормальные триангуляции выпуклого конуса // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1963. Т. 27. № 2. С. 367–396.(Совместно с Б. Б. Венковым).

[33] О правильных разбиениях пространств // Тр. IV Всесоюз. мат. съезда. (Ленинград, 1961). Т.1. Л., Изд-во АН СССР (Ленингр. отд.), 1963. С. 49–55.(Совместно с Б. Н. Делоне).

Владимирский государственный педагогический университет
Получено 10.08.2005