Ш. Р. Шакиров, Непертурбативный подход к конечномерным негауссовым интегралам,
ТМФ, 2010, том 163, номер 3, 495–504

https://www.mathnet.ru/tmf6517

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 163, № 3
июнь, 2010

Ш. Р. Шакиров[*†]

НЕПЕРТУРБАТИВНЫЙ ПОДХОД К КОНЕЧНОМЕРНЫМ НЕГАУССОВЫМ ИНТЕГРАЛАМ

Изучается однородный негауссов интеграл $J_{n|r}(S) = \int e^{-S(x_1,\dots,x_n)}\,d^n x$, где $S(x_1,\dots,x_n)$ – симметрическая форма степени r от n переменных. Этот интеграл естественно инвариантен относительно $SL(n)$-преобразований, и поэтому зависит лишь от инвариантов формы: например, для квадратичных форм он равен определителю формы в степени $-1/2$. Для форм старших степеней интеграл в ряде случаев удается вычислить, используя так называемые тождества Уорда – линейные дифференциальные уравнения второго порядка. Описан метод вычисления интеграла и приведены детальные вычисления для случая $n=2$, $r=5$. Интересно, что ответ оказывается гипергеометрической функцией от инвариантов формы.

Ключевые слова: негауссов интеграл, тождества Уорда, теория инвариантов.

1. НЕГАУССОВЫ ИНТЕГРАЛЫ

Известно, что экспонента от квадратичной формы, усредненная по всему линейному пространству, пропорциональна определителю этой формы в степени $-1/2$:

$$\int \exp\biggl(-\sum_{i,j=1}^{n} S_{ij}x_i x_j\biggr)\,d^n x = \frac{\mathrm{const}}{\sqrt{\det S}}. \tag{1}$$

Это простое равенство находит множество применений в теоретической физике, в частности в статистике и квантовой теории поля. В контексте квантовой теории поля форма S называется *действием*, а само равенство носит название *гауссова интеграла*. Разумеется, равенство (1) несложно вывести, если воспользоваться инвариантностью интеграла относительно линейных замен переменных с единичным определителем и привести форму к диагональному виду. Возможность диагонализации существенно упрощает вычисления с формами второй степени. К сожалению, такие методы не работают для кубических форм и форм старших степеней. Это можно видеть уже из подсчета размерностей: число независимых параметров

[*]Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия.
E-mail: shakirov@itep.ru

[†]Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Московская обл., Россия.

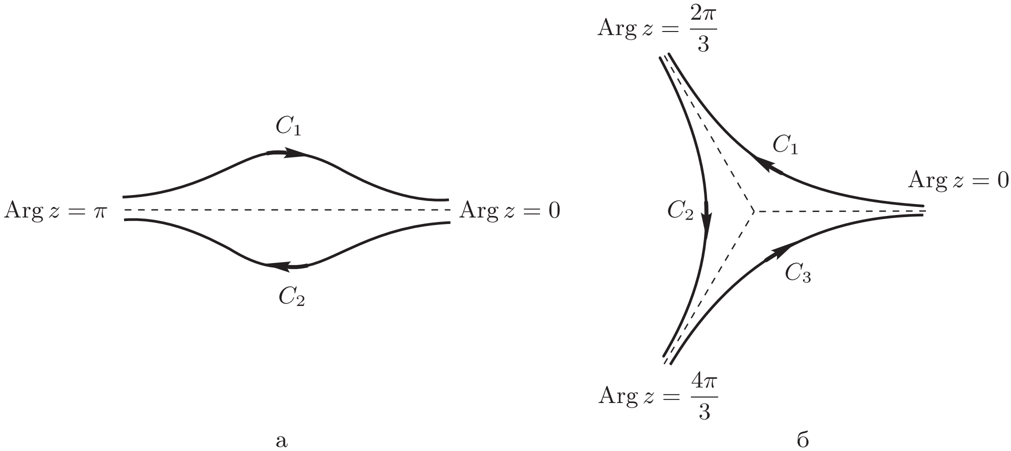


Рис. 1. Допустимые контуры интегрирования для гауссова интеграла $\int e^{-\frac{x^2}{2}+ax}\,dx$ (а) и для негауссова интеграла $\int e^{-\frac{x^3}{3}+ax}\,dx$ (б).

кубической формы равно $n(n+1)(n+2)/6$, что больше числа n^2-1 независимых $SL(n)$-преобразований. По этой причине *негауссовы интегралы*

$$J_{n|r} = \int e^{-S(x_1,\ldots,x_n)}\,d^n x, \qquad S(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i_1,\ldots,i_r=1}^{n} S_{i_1,\ldots,i_r} x_{i_1}\ldots x_{i_r}, \tag{2}$$

являющиеся естественным обобщением гауссова интеграла на формы старших степеней, длительное время оставались совершенно неизведанной территорией. В отсутствие столь же мощных методов, как приведение к каноническому виду, теория негауссовых интегралов и сегодня находится в зачаточном состоянии. Настоящая работа представляет из себя лишь небольшой шаг к решению этой проблемы.

2. КОНТУРЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Следует заметить, что негауссовы интегралы (интегралы от экспоненты от формы старшей степени) не определены, если область интегрирования представляет собой все n-мерное действительное пространство. Эта проблема легко решается переходом к интегрированию по некоторому n-мерному контуру в комплексном ($2n$-мерном действительном) пространстве. Чтобы прояснить это обстоятельство, приведем следующий простой пример. Рассмотрим гауссов интеграл

$$F(a) = \int_C e^{-\frac{x^2}{2}+ax}\,dx.$$

Контур интегрирования в этом одномерном интеграле может быть выбран многими способами: для сходимости интеграла существенно лишь, чтобы на бесконечности контур стремился к прямым $\operatorname{Arg} z = 0$ и $\operatorname{Arg} z = \pi/2$. Будем называть такие контуры допустимыми. Допустимые контуры для интеграла $F(a)$ показаны на рис. 1а.

Теперь рассмотрим негауссов интеграл

$$G(a) = \int_C e^{-\frac{x^3}{3}+ax}\,dx.$$

Полином в показателе степени не является квадратичным, и поэтому контур интегрирования не может совпадать с вещественной осью, ибо интеграл по вещественной оси не определен (равен бесконечности). Вместо этого следует рассматривать контуры интегрирования в комплексной плоскости, которые асимптотически стремятся к прямым $\operatorname{Arg} z = 0$, $\operatorname{Arg} z = 2\pi/3$ и $\operatorname{Arg} z = 4\pi/3$ (см. рис. 1б). Вдоль этих прямых функция e^{-z^3} стремится к нулю. Аналогично и в общем случае всегда можно выбрать контур интегрирования так, чтобы интеграл был конечным.

3. ИНВАРИАНТЫ

Настоящая работа основана на совместной с А. Ю. Морозовым статье [1], в которой предложен новый конструктивный метод вычисления негауссовых интегралов. Центральную роль в этом методе играет теория инвариантов симметрических форм [2]–[5], представляющая собой классический объект исследования и восходящая к трудам Гильберта и Кэли. *Инвариантом* симметрической формы степени r от n переменных

$$S(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i_1,\ldots,i_r=1}^{n} S_{i_1,\ldots,i_r} x_{i_1}\ldots x_{i_r}$$

называется функция $I(S)$ такая, что под действием линейных преобразований $U \in SL(n)$ она переходит в себя, $I(\widetilde{S}) = I(S)$ при

$$\widetilde{S}_{i_1,\ldots,i_r} = \sum_{j_1,\ldots,j_r=1}^{n} S_{j_1,\ldots,j_r} U_{i_1}^{j_1}\ldots U_{i_n}^{j_n}, \qquad \det U = 1. \tag{3}$$

Другими словами, пространство всех симметрических форм степени r от n неизвестных представляет собой линейное пространство размерности $(n+r-1)!/(n-1)!r!$, и группа $SL(n)$ действует на этом пространстве, деля его на (n^2-1)-мерные орбиты. Инварианты симметрических форм имеют довольно прозрачную геометрическую интерпретацию: они являются функциями на пространстве орбит [2]. В частности, это означает, что число функционально независимых инвариантов равно размерности пространства орбит, т.е. разности $N_{n|r} = (n+r-1)!/((n-1)!r!) - (n^2-1)$ между размерностью пространства форм и размерностью группы. Заметим, что при $r=2$ эта формула дает отрицательное число. Этот случай является особым, так как размерность пространства квадратичных форм меньше, чем размерность действующей на ней группы. Как известно из линейной алгебры, существует единственный функционально независимый инвариант квадратичной формы – ее определитель. Для форм старших степеней приведенная выше формула дает правильные числа функционально независимых инвариантов. Эти числа можно представить в виде следующей таблицы.

$r \backslash n$	2	3	4	5	6	7
2	1	1	1	1	1	1
3	1	2	5	11	21	36
4	2	7	20	46	91	162
5	3	13	41	102	217	414
6	4	20	69	186	427	876

Поскольку число функционально независимых инвариантов формы конечно, можно выбрать конечный набор *элементарных* инвариантов, через которые выражаются все остальные инварианты. Эти элементарные инварианты мы будем обозначать через I_k, где k – степень однородности инварианта по коэффициентам формы. Их удобно и естественно представлять в виде *диаграмм* тензорной свертки, как было предложено в статье [6]. Согласно этой работе тензоры с k индексами можно представлять как k-валентные вершины графа, а два типа индексов – ковариантные и контравариантные – входящими и исходящими ребрами графа, так что свертка индексов естественно представляется соединением этих линий. Несколько примеров таких диаграмм будет приведено ниже (см. также работы [1] и [6]).

4. ТОЖДЕСТВА УОРДА

Непосредственная связь теории инвариантов и негауссовых интегралов состоит в том, что негауссов интеграл, очевидно, инвариантен относительно линейных преобразований (3) с единичным определителем: $J_{n|r}(\widetilde{S}) = J_{n|r}(S)$. Являясь инвариантом формы S, интеграл $J_{n|r}(S)$ выражается через элементарные инварианты: $J_{n|r}(S) = F_{n|r}\{I_k\}$. Нахождение функции F представляет наибольший интерес. Для того чтобы найти эту функцию, одной $SL(n)$-инвариантности недостаточно, необходимо использовать еще и то, что негауссовы интегралы удовлетворяют определенным линейным дифференциальным уравнениям второго порядка. Если ввести так называемые мономные обозначения

$$S(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{a_1+\cdots+a_n=r} s_{a_1,\ldots,a_n} x_1^{a_1} \ldots x_n^{a_n},$$

то эти уравнения примут наиболее простой вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial s_{a_1,\ldots,a_n}}\frac{\partial}{\partial s_{b_1,\ldots,b_n}} - \frac{\partial}{\partial s_{c_1,\ldots,c_n}}\frac{\partial}{\partial s_{d_1,\ldots,d_n}}\right)\int e^{-S(x_1,\ldots,x_n)}\, d^n x = 0,$$

где $a_i+b_i = c_i+d_i$ для всех $i = 1, \ldots, n$. Справедливость этих соотношений очевидна: дифференциальный оператор в левой части обращает в нуль подынтегральное выражение. По аналогии с квантовой теорией поля эти дифференциальные уравнения называют *тождествами Уорда*. Тождества Уорда налагают сильные ограничения на вид функции $F\{I_k\}$ и позволяют ее вычислить. С использованием этого метода в статье [1] показано, что

$$
\begin{aligned}
J_{2|3}(S) &= I_4^{-1/6},\\
J_{2|4}(S) &= I_2^{-1/4}\cdot\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}\frac{(1/12)_i(5/12)_i}{(1/2)_i}\left(\frac{6I_3^2}{I_2^3}\right)^i,\\
J_{3|3}(S) &= I_4^{-1/4}\cdot\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}\frac{(1/12)_i(5/12)_i}{(1/2)_i}\left(-\frac{3I_6^2}{32I_4^3}\right)^i,
\end{aligned}
$$

где I_k – соответствующие этим случаям элементарные инварианты (см. детали в статье [1]), мы также использовали обозначение $(a)_b = a(a+1)\ldots(a+b)$.

Отметим несомненное сходство двух рядов, описывающих априори совершенно различные инварианты $J_{2|4}(S)$ и $J_{3|3}(S)$. Эти ряды называются гипергеометрическими, и в общепринятых обозначениях последние равенства можно переписать как

$$
J_{2|4}(S) = I_2^{-1/4}\,{}_2F_1\left(\left[\frac{1}{12},\frac{5}{12}\right],\left[\frac{1}{2}\right],z\right),\qquad z=\frac{6I_3^2}{I_2^3},
$$

$$
J_{3|3}(S) = I_4^{-1/4}\,{}_2F_1\left(\left[\frac{1}{12},\frac{5}{12}\right],\left[\frac{1}{2}\right],z\right),\qquad z=-\frac{3I_6^2}{32I_4^3}.
$$

Гипергеометрические ряды от одной переменной z являются хорошо изученными и классифицированными специальными функциями. В частности, известно, что точка $z=1$ является точкой сингулярности гипергеометрических функций. Выбирая $z=1$ в написанных выше рядах, мы в обоих случаях получаем в точности условия равенства нулю дискриминанта. Другими словами, негауссов интеграл сингулярен тогда, когда форма S вырожденна. В статье [1] показано, что других сингулярностей нет. Это явление дает основания называть однородный негауссов интеграл $J_{n|r}(S)$ *интегральным дискриминантом* [7] формы S.

5. ФОРМА ПЯТОЙ СТЕПЕНИ ОТ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Результаты, описанные выше, взяты из статьи [1]. Чтобы проиллюстрировать общий метод, выполним аналогичное вычисление для негауссова интеграла в технически более сложном случае $n=2$, $r=5$, т.е. для симметрической формы

$$
S(x,y) = S_{11111}x^5 + 5S_{11112}x^4y + 10S_{11122}x^3y^2 + 10S_{11222}x^2y^3 + 5S_{12222}xy^4 + S_{22222}y^5
$$

пятой степени от двух переменных. В этом случае у формы имеется три различных элементарных инварианта I_4, I_8, I_{12}. На рис. 2 эти инварианты показаны как диаграммы тензорной свертки.

Негауссов интеграл является некоторой функцией от этих инвариантов, $J_{2|5} = F(I_4, I_8, I_{12})$. Более того, используя очевидное свойство однородности

$$
J_{n|r}(\lambda S) = \int e^{-\lambda S(x_1,\ldots,x_n)}\,d^nx = \lambda^{-n/r}\int e^{-S(x_1,\ldots,x_n)}\,d^nx = \lambda^{-n/r}J_{n|r}(S),
$$

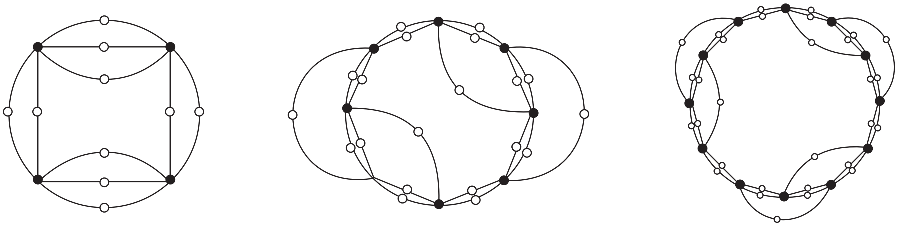


Рис. 2. Инварианты I_4 (а), I_8 (б) и I_{12} (в) для формы пятой степени от двух переменных. Черные пятивалентные вершины представляют тензор S, а белые двухвалентные вершины – полностью антисимметричный тензор ϵ.

мы можем представить эту функцию в виде

$$F(I_4, I_8, I_{12}) = I_4^{-1/10}\, G\left(\frac{I_8}{I_4^2}, \frac{I_{12}}{I_4^3}\right). \tag{4}$$

Чтобы найти функцию $G(u,v)$, применим тождества Уорда. В данном случае они имеют вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial s_{50}\partial s_{32}} - \frac{\partial^2}{\partial s_{41}\partial s_{41}}\right) J_{2|5} = 0, \qquad \left(\frac{\partial^2}{\partial s_{50}\partial s_{23}} - \frac{\partial^2}{\partial s_{41}\partial s_{32}}\right) J_{2|5} = 0,$$
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial s_{50}\partial s_{14}} - \frac{\partial^2}{\partial s_{41}\partial s_{23}}\right) J_{2|5} = 0, \qquad \left(\frac{\partial^2}{\partial s_{32}\partial s_{32}} - \frac{\partial^2}{\partial s_{41}\partial s_{23}}\right) J_{2|5} = 0,$$
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial s_{50}\partial s_{05}} - \frac{\partial^2}{\partial s_{32}\partial s_{23}}\right) J_{2|5} = 0, \qquad \left(\frac{\partial^2}{\partial s_{41}\partial s_{14}} - \frac{\partial^2}{\partial s_{32}\partial s_{23}}\right) J_{2|5} = 0,$$

где s-параметры связаны с S-параметрами соотношениями

$$s_{50} = S_{11111}, \qquad s_{41} = 5S_{11112}, \qquad s_{32} = 10S_{11122},$$
$$s_{23} = 10S_{11222}, \qquad s_{14} = 5S_{12222}, \qquad s_{05} = S_{22222}.$$

Отдельные уравнения в системе тождеств Уорда, разумеется, не являются $SL(2)$-инвариантными, что затрудняет их применение в рассматриваемой задаче. Предлагаемое нами решение этой проблемы состоит в том, чтобы составить из большого количества неинвариантных дифференциальных операторов несколько инвариантных операторов. Другими словами, необходимо просуммировать тождества Уорда с некоторыми коэффициентами, зависящими от S. Положим

$$\begin{aligned}\widehat{O}_0 = {} & (2S_{11111}S_{12222} - 8S_{11112}S_{11222} + 6S_{11122}^2) \times \\ & \times \left(2\frac{\partial}{\partial s_{50}}\frac{\partial}{\partial s_{14}} - 8\frac{\partial}{\partial s_{41}}\frac{\partial}{\partial s_{23}} + 6\frac{\partial}{\partial s_{32}}\frac{\partial}{\partial s_{32}}\right) + \\ & + 2(S_{11111}S_{22222} - 3S_{11112}S_{12222} + 2S_{11122}S_{11222}) \times \\ & \times \left(\frac{\partial}{\partial s_{05}}\frac{\partial}{\partial s_{50}} - 3\frac{\partial}{\partial s_{41}}\frac{\partial}{\partial s_{14}} + 2\frac{\partial}{\partial s_{32}}\frac{\partial}{\partial s_{23}}\right) +\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ (2S_{11112}S_{22222} - 8S_{11122}S_{12222} + 6S_{11222}^2) \times \\
&\times \left(2\frac{\partial}{\partial s_{41}}\,\frac{\partial}{\partial s_{05}} - 8\frac{\partial}{\partial s_{32}}\,\frac{\partial}{\partial s_{14}} + 6\frac{\partial}{\partial s_{23}}\,\frac{\partial}{\partial s_{23}}\right)
\end{aligned}
$$

и

$$
\begin{aligned}
\widehat{O}_4 = P_{11}(S)&\left(2\frac{\partial}{\partial s_{50}}\,\frac{\partial}{\partial s_{14}} - 8\frac{\partial}{\partial s_{41}}\,\frac{\partial}{\partial s_{23}} + 6\frac{\partial}{\partial s_{32}}\,\frac{\partial}{\partial s_{32}}\right) + \\
&+ 2P_{12}(S)\left(\frac{\partial}{\partial s_{05}}\,\frac{\partial}{\partial s_{50}} - 3\frac{\partial}{\partial s_{41}}\,\frac{\partial}{\partial s_{14}} + 2\frac{\partial}{\partial s_{32}}\,\frac{\partial}{\partial s_{23}}\right) + \\
&+ P_{22}(S)\left(2\frac{\partial}{\partial s_{41}}\,\frac{\partial}{\partial s_{05}} - 8\frac{\partial}{\partial s_{32}}\,\frac{\partial}{\partial s_{14}} + 6\frac{\partial}{\partial s_{23}}\,\frac{\partial}{\partial s_{23}}\right),
\end{aligned}
$$

где P_{ij} – квадратичная форма с коэффициентами

$$
\begin{aligned}
P_{ab}(S) = S_{ai_2i_3i_4i_5}S_{j_1j_2j_3j_4j_5}S_{k_1k_2k_3k_4k_5}S_{l_1l_2l_3l_4l_5}S_{m_1m_2m_3m_4m_5}S_{s_1s_2s_3s_4b} \times \\
\times \epsilon^{i_2j_2}\epsilon^{i_3j_3}\epsilon^{i_4k_4}\epsilon^{i_5k_5}\epsilon^{k_1l_1}\epsilon^{k_2l_2}\epsilon^{j_4m_4}\epsilon^{j_5m_5}\epsilon^{m_1s_1}\epsilon^{m_2s_2}\epsilon^{l_3s_3}\epsilon^{l_4s_4}\epsilon^{j_1k_3}\epsilon^{l_5m_3}.
\end{aligned}
$$

Операторы $\widehat{O}_0$ и $\widehat{O}_4$ являются $SL(2)$-инвариантными, что легко увидеть, посмотрев на рис. 3. Индексы 0 и 4 обозначают степени этих операторов по аналогии с инвариантами I_k. Несложно проверить, что действие оператора $\widehat{O}_0$ на инварианты имеет вид

$$
\widehat{O}_0 \begin{pmatrix} I_4 \\ I_8 \\ I_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{264}{25}I_4 \\ \frac{2}{25}I_4^2 + \frac{294}{25}I_8 \\ \frac{12}{25}I_4I_8 + \frac{162}{5}I_{12} \end{pmatrix}, \qquad \widehat{O}_0 \begin{pmatrix} I_4^2 & I_4I_8 & I_4I_{12} \\ I_4I_8 & I_8^2 & I_8I_{12} \\ I_4I_{12} & I_8I_{12} & I_{12}^2 \end{pmatrix} =
$$

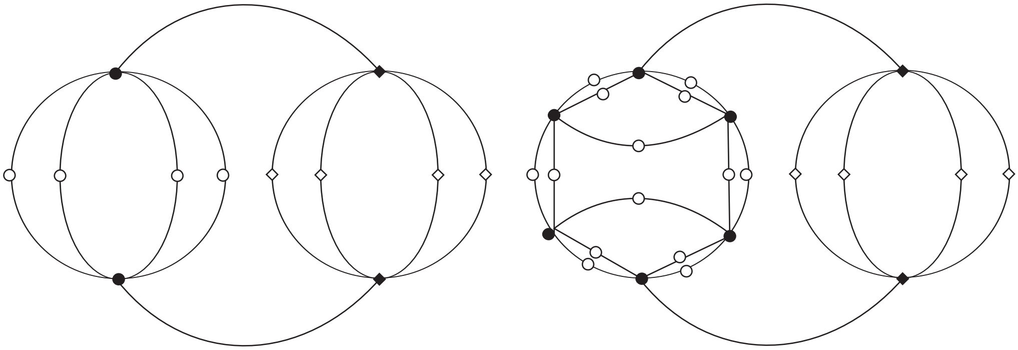
$$
= \begin{pmatrix} \frac{928}{25}I_4^2 - \frac{384}{25}I_8 & \frac{2}{25}I_4^3 + \frac{1166}{25}I_4I_8 + \frac{192}{5}I_{12} & \frac{12}{25}I_4^2I_8 + \frac{144}{25}I_8^2 + \frac{1794}{25}I_4I_{12} \\ \frac{2}{25}I_4^3 + \frac{1166}{25}I_4I_8 + \frac{192}{5}I_{12} & \frac{8}{25}I_4^2I_8 + \frac{1188}{25}I_8^2 + \frac{12}{5}I_4I_{12} & \frac{9}{25}I_4I_8^2 + \frac{12}{25}I_4^2I_{12} + \frac{1944}{25}I_8I_{12} \\ \frac{12}{25}I_4^2I_8 + \frac{144}{25}I_8^2 + \frac{1794}{25}I_4I_{12} & \frac{9}{25}I_4I_8^2 + \frac{12}{25}I_4^2I_{12} + \frac{1944}{25}I_8I_{12} & -\frac{54}{25}I_8^3 + \frac{84}{25}I_4I_8I_{12} + \frac{684}{5}I_{12}^2 \end{pmatrix},
$$

$$
\widehat{O}_4 \begin{pmatrix} I_4 \\ I_8 \\ I_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{264}{25}I_8 \\ -\frac{2}{25}I_4I_8 + \frac{588}{25}I_{12} \\ \frac{363}{50}I_8^2 - \frac{153}{25}I_4I_{12} \end{pmatrix}, \qquad \widehat{O}_4 \begin{pmatrix} I_4^2 & I_4I_8 & I_4I_{12} \\ I_4I_8 & I_8^2 & I_8I_{12} \\ I_4I_{12} & I_8I_{12} & I_{12}^2 \end{pmatrix} =
$$

$$
= \begin{pmatrix} -\frac{928}{25}I_4I_8 - \frac{768}{25}I_{12} & -\frac{2}{25}I_4^2I_8 - \frac{584}{25}I_8^2 + \frac{524}{25}I_4I_{12} & \frac{363}{50}I_4I_8^2 - \frac{153}{25}I_4^2I_{12} - \frac{696}{25}I_8I_{12} \\ -\frac{2}{25}I_4^2I_8 - \frac{584}{25}I_8^2 + \frac{524}{25}I_4I_{12} & \frac{1}{25}I_4I_8^2 - \frac{22}{25}I_4^2I_{12} + \frac{2376}{25}I_8I_{12} & \frac{603}{50}I_8^3 - \frac{291}{25}I_4I_8I_{12} + \frac{1188}{25}I_{12}^2 \\ \frac{363}{50}I_4I_8^2 - \frac{153}{25}I_4^2I_{12} - \frac{696}{25}I_8I_{12} & \frac{603}{50}I_8^3 - \frac{291}{25}I_4I_8I_{12} + \frac{1188}{25}I_{12}^2 & \frac{129}{5}I_8^2I_{12} - \frac{606}{25}I_4I_{12}^2 \end{pmatrix}.
$$

Тождества Уорда, таким образом, принимают вид $\widehat{O}_iF\{I_4, I_8, I_{12}\} = 0$, $i = 0, 4$. Используя известную формулу

$$
\widehat{O}F\{I_k\} = \sum_k \frac{\partial F}{\partial I_k}\widehat{O}I_k + \frac{1}{2}\sum_{k,m}\frac{\partial^2 F}{\partial I_k \partial I_m}[\widehat{O}(I_kI_m) - I_k\widehat{O}I_m - I_m\widehat{O}I_k],
$$



а б

Рис. 3. Инвариантные дифференциальные операторы $\widehat{O}_0$ (а) и $\widehat{O}_4$ (б) для формы пятой степени от двух переменных. Черные пятивалентные круги представляют тензор S, белые двухвалентные круги – тензор ϵ, черные пятивалентные ромбы – тензор $\partial/\partial S$, белые двухвалентные ромбы – тензор ϵ_*.

которая является аналогом правила дифференцирования Лейбница для операторов $\widehat{O}$ второго порядка, тождества Уорда легко переписать в виде двух дифференциальных уравнений относительно функции $G(u,v)$:

$$\begin{aligned}
&50(-1+64u)(u+6u^2+15v)\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}+\\
&\quad+(75u^2+72000v^2+57600vu^2+600vu+7200u^3-250v)\frac{\partial^2 G}{\partial u\partial v}+\\
&\quad+(675u^3-13500v^2+10800vu^2-750vu+43200uv^2)\frac{\partial^2 G}{\partial v^2}+\\
&\quad+(50400v+30720u^2-50+5770u)\frac{\partial G}{\partial u}+\\
&\quad+(-300u+60480vu+11160u^2-7650v)\frac{\partial G}{\partial v}+(528u+110)G=0,\\
&25(-1+64u)(5u^2+48uv-22v)\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}+\\
&\quad+(230400uv^2-39600v^2-6000u^3+28800vu^2+6800vu)\frac{\partial^2 G}{\partial u\partial v}+\\
&\quad+(172800v^3+7500v^2+25200uv^2-7050vu^2)\frac{\partial^2 G}{\partial v^2}+\\
&\quad+(-36120v+4000u^2+122880vu+100u)\frac{\partial G}{\partial u}+\\
&\quad+(241920v^2+19440vu-9075u^2+7650v)\frac{\partial G}{\partial v}+(-220u+2112v)G(u,v)=0,
\end{aligned}$$

где $u=I_8/I_4^2$ и $v=I_{12}/I_4^3$. Решение этой системы в рядах по u, v единственно и имеет вид

$$G(u,v)=\sum_{i,j=0}^{\infty}\frac{1}{i!j!}\frac{(3/10)_{i+j}(1/10)_{2i+3j}(1/10)_j}{(2/5)_{i+2j}(3/5)_{i+2j}}(16u)^i\left(\frac{128v}{3}\right)^j.$$

Таким образом, негауссов интеграл в случае $n = 2$, $r = 5$ оказался функцией от инвариантов гипергеометрического типа. Это подтверждает общую гипотезу о гипергеометричности, высказанную в работе [1].

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе описаны первые шаги в направлении точного вычисления негауссова интеграла $J_{n|r}(S) = \int e^{-S(x_1,\ldots,x_n)}\, d^n x$, который является функцией от $SL(n)$-инвариантов формы S в силу естественной $SL(n)$-симметрии. Основной мотивацией к такого рода исследованию является желание обобщить формулу для гауссова случая

$$J_{n|2}(S) = \int e^{-S_{ij}x_i x_j}\, d^n x = \frac{1}{\sqrt{\det S}}$$

на неквадратичные формы S. Если удастся найти такое обобщение, то оно, вероятно, будет иметь большое количество приложений в статистической физике и в квантовой теории поля. Все известные на настоящий момент примеры можно представить в форме следующей таблицы.

n	r	Инварианты	Дискриминант $D_{n\|r}$	Интегральный дискриминант $J_{n\|r}$
2	2	I_2	I_2	$I_2^{-1/2}$
2	3	I_4	I_2	$I_4^{-1/6}$
2	4	I_2, I_3	$I_2^3 - 6I_3^2$	$I_2^{-1/4} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \frac{(1/12)_i (5/12)_i}{(1/2)_i} \left(\frac{6I_3^2}{I_2^3}\right)^i$
2	5	I_4, I_8, I_{12}	$I_4^2 - 64I_8$	$I_4^{-1/10} \sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{1}{i!j!} \frac{(3/10)_{i+j}(1/10)_{2i+3j}(1/10)_j}{(2/5)_{i+2j}(3/5)_{i+2j}} \times$
				$\times \left(\frac{16I_8}{I_4^2}\right)^i \left(\frac{128I_{12}}{3I_4^3}\right)^j$
3	2	I_3	I_3	$I_3^{-1/2}$
3	3	I_4, I_6	$32I_4^3 + 3I_6^2$	$I_4^{-1/4} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \frac{(1/12)_i (5/12)_i}{(1/2)_i} \left(-\frac{3I_6^2}{32I_4^3}\right)^i$

Можно видеть, что во всех известных примерах негауссов интеграл выражается как гипергеометрическая функция от инвариантов формы. Можно предположить, что это верно для любых n и r. Эта предполагаемая связь между негауссовыми интегралами и теорией инвариантов нуждается в дальнейшей проверке.

Благодарности. Я благодарен А. Морозову, А. Власову и В. Долотину за исключительно полезные обсуждения. Работа выполнена при частичной поддержке Российского федерального агентства по ядерной энергии, Российского федерального агентства по науке и инновациям (контракт 02.740.11.5029), Программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-3035.2008.2), РФФИ (грант № 07-02-00645, объединенные гранты № 09-02-90493-Ukr, 09-01-92440-CE, 09-02-91005-ANF и 09-02-93105-CNRS), а также Фондом конкурса Мёбиуса для молодых ученых.

Список литературы

[1] A. Morozov, Sh. Shakirov, *JHEP*, **12** (2009), 002; `arXiv: 0903.2595`.

[2] D. Hilbert, *Theory of Algebraic Invariants*, Cambridge Math. Library, ed. B. Sturmfels, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.

[3] Н. Д. Беклемишев, *Вестн. МГУ. Сер. матем., мех.*, 1982, № 2, 42–49.

[4] H. Derksen, G. Kemper, *Computational Invariant Theory. Encyclopedia Math. Sci.*, Invariant Theory and Algebraic Transformation Groups, **130**, Springer, Berlin, 2002.

[5] B. Sturmfels, *Algorithms in Invariant Theory*, Texts Monogr. Symbolic Comput., Springer, Wien, 2008.

[6] V. Dolotin, A. Morozov, *Introduction to Non-Linear Algebra*, World Sci., Hackensack, NJ, 2007; `arXiv: hep-th/0609022`.

[7] V. Dolotin, *QFT's with action of degree* 3 *and higher and degeneracy of tensors*, `arXiv: hep-th/9706001`.