Функциональный анализ и его приложения
2003, т. 37, вып. 2, с. 28–40

УДК 517.9+514.7

Лиувиллева каноническая форма согласованных нелокальных скобок Пуассона гидродинамического типа и интегрируемые иерархии*

© 2003. О. И. Мохов

§1. Введение

В настоящей работе мы, прежде всего, решаем задачу о приведении к наиболее простому и удобному для наших дальнейших целей «каноническому» виду произвольной пары согласованных нелокальных скобок Пуассона гидродинамического типа, порождаемых метриками постоянной римановой кривизны (согласованных скобок Мохова–Ферапонтова [1]), для того чтобы эффективно построить отвечающие любым этим парам согласованных скобок Пуассона интегрируемые иерархии. Как показано в [2, 3] (см. также [4]), согласованные скобки Мохова–Ферапонтова описываются совместной нелинейной системой уравнений, интегрируемой методом обратной задачи рассеяния (в случае согласованных скобок Дубровина–Новикова [5], т. е. согласованных локальных скобок Пуассона гидродинамического типа, соответствующая система проинтегрирована ранее в [6–8], см. также [4]), но задача эффективного построения в этом случае соответствующих интегрируемых иерархий, что является главной целью данной работы, требует иного подхода к описанию этих согласованных скобок. В данной статье по любому решению интегрируемой системы уравнений, описывающей рассматриваемые согласованные скобки, т. е. для любой пары этих согласованных скобок, построены в явном виде интегрируемые бигамильтоновы системы гидродинамического типа, обладающие этой парой согласованных нелокальных скобок Пуассона гидродинамического типа. В случае согласованных скобок Дубровина–Новикова [5] эта задача была рассмотрена и полностью решена ранее в работах автора [9, 10].

В [1] были введены и изучены нелокальные скобки Пуассона гидродинамического типа, имеющие следующий вид (скобки Мохова–Ферапонтова):

$$\{I, J\} = \int \frac{\delta I}{\delta u^i(x)} \left(g^{ij}(u(x)) \frac{d}{dx} + b^{ij}_k(u(x))\, u^k_x + K u^i_x \left(\frac{d}{dx}\right)^{-1} u^j_x \right) \frac{\delta J}{\delta u^j(x)}\, dx, \quad (1.1)$$

где $I[u]$ и $J[u]$ — произвольные функционалы на пространстве функций (полей) $u^i(x)$, $1 \leqslant i \leqslant N$, одной независимой переменной x, $u = (u^1, \ldots, u^N)$ — локальные координаты на некотором заданном гладком N-мерном многообразии M, коэффициенты $g^{ij}(u)$ и $b^{ij}_k(u)$ скобки (1.1) — гладкие функции локальных координат и K — произвольная константа. Вид скобки (1.1) инвариантен отно-

*Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда Александра фон Гумбольдта (Германия), а также Российского фонда фундаментальных исследований (грант №02-01-00803) и фонда INTAS (грант №99-1782).

сительно локальных замен координат. Скобка вида (1.1) называется *невырожденной*, если $\det(g^{ij}(u)) \not\equiv 0$. Если $\det(g^{ij}(u)) \not\equiv 0$, то скобка (1.1) является скобкой Пуассона тогда и только тогда, когда $g^{ij}(u)$ — произвольная псевдориманова контравариантная метрика постоянной римановой кривизны K и $b^{ij}_k(u) = -g^{is}(u)\Gamma^j_{sk}(u)$, где $\Gamma^j_{sk}(u)$ — риманова связность, порождаемая метрикой $g^{ij}(u)$ (связность Леви-Чивиты) [1] (отметим, что при локальных заменах координат коэффициенты $g^{ij}(u)$ и $b^{ij}_k(u)$ скобки (1.1) преобразуются как соответствующие дифференциально-геометрические объекты — контравариантная метрика $g^{ij}(u)$ и связность $b^{ij}_k(u) = -g^{is}(u)\Gamma^j_{sk}(u)$ соответственно, а K — инвариант). При $K = 0$ получаем локальные скобки Пуассона гидродинамического типа (скобки Дубровина–Новикова [5]).

Напомним, что скобки Пуассона называются *согласованными*, если их произвольная линейная комбинация также является скобкой Пуассона (Магри [11]).

§2. Согласованные нелокальные скобки Пуассона гидродинамического типа

Лемма 2.1. *В задаче об описании произвольной пары согласованных нелокальных скобок Пуассона вида* (1.1) *одну из этих двух скобок Пуассона всегда можно считать локальной без ограничения общности.*

Действительно, если две согласованные нелокальные скобки Пуассона вида (1.1) $\{I,J\}_0$ (с соответствующей константой K_0 в нелокальной части) и $\{I,J\}_1$ (с константой K_1) линейно независимы, то в пучке этих скобок Пуассона, т.е. среди скобок Пуассона $\lambda_0\{I,J\}_0 + \lambda_1\{I,J\}_1$, где λ_0 и λ_1 — произвольные константы, обязательно есть ненулевая локальная скобка Пуассона $\{I,J\} = \lambda_0'\{I,J\}_0 + \lambda_1'\{I,J\}_1$, где λ_0', λ_1' — произвольные константы, удовлетворяющие соотношению $\lambda_0'K_0 + \lambda_1'K_1 = 0$, которую и можно взять в качестве одной из образующих всего рассматриваемого пучка согласованных скобок Пуассона (очевидно, что если эта локальная скобка Пуассона $\{I,J\}$ нулевая, то скобки Пуассона $\{I,J\}_0$ и $\{I,J\}_1$ являются линейно зависимыми: $\lambda_0'\{I,J\}_0 + \lambda_1'\{I,J\}_1 \equiv 0$).

Рассмотрим задачу о согласованности нелокальной и локальной скобок Пуассона гидродинамического типа

$$\{I,J\}_1 = \int \frac{\delta I}{\delta u^i(x)}\left(g_1^{ij}(u(x))\,\frac{d}{dx} + b^{ij}_{1,k}(u(x))\,u^k_x + K_1 u^i_x\left(\frac{d}{dx}\right)^{-1} u^j_x\right)\frac{\delta J}{\delta u^j(x)}\,dx \tag{2.1}$$

и

$$\{I,J\}_2 = \int \frac{\delta I}{\delta u^i(x)}\left(g_2^{ij}(u(x))\frac{d}{dx} + b^{ij}_{2,k}(u(x))\,u^k_x\right)\frac{\delta J}{\delta u^j(x)}\,dx, \tag{2.2}$$

т.е. условие, что при всех значениях константы λ скобка

$$\{I,J\} = \{I,J\}_1 + \lambda\{I,J\}_2 \tag{2.3}$$

является скобкой Пуассона (таким образом, формула (2.3) определяет *пучок согласованных скобок Пуассона*).

Мы далее предполагаем, что локальная скобка $\{I,J\}_2$ является невырожденной, т.е. $\det g_2^{ij}(u) \not\equiv 0$, но не налагаем никаких дополнительных условий на скобку $\{I,J\}_1$, т.е., вообще говоря, она может быть и вырожденной. Скобка (2.3) может быть вырожденной; поэтому нам потребуются общие соотношения на коэффициенты скобки вида (1.1), эквивалентные условию, что эта скобка является скобкой Пуассона. Эти общие соотношения (без предположения невырожденности) были получены в работе автора [12] (см. также [13]):

$$g^{ij}(u)=g^{ji}(u), \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial g^{ij}}{\partial u^k}=b^{ij}_k(u)+b^{ji}_k(u), \tag{2.5}$$

$$g^{is}(u)b^{jr}_s(u)=g^{js}(u)b^{ir}_s(u), \tag{2.6}$$

$$g^{is}(u)\left(\frac{\partial b^{jr}_s}{\partial u^k}-\frac{\partial b^{jr}_k}{\partial u^s}\right)+b^{ij}_s(u)b^{sr}_k(u)-b^{ir}_s(u)b^{sj}_k(u)=K(g^{ir}(u)\delta^j_k-g^{ij}(u)\delta^r_k), \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}\sum_{(i,j,r)}\Bigg[b^{si}_p(u)\left(\frac{\partial b^{jr}_k}{\partial u^s}-\frac{\partial b^{jr}_s}{\partial u^k}\right)+K(b^{ij}_k(u)-b^{ji}_k(u))\delta^r_p&\\+b^{si}_k(u)\left(\frac{\partial b^{jr}_p}{\partial u^s}-\frac{\partial b^{jr}_s}{\partial u^p}\right)+K(b^{ij}_p(u)-b^{ji}_p(u))\delta^r_k\Bigg]&=0,\end{aligned} \tag{2.8}$$

где $\sum_{(i,j,r)}$ означает суммирование по всем циклическим перестановкам индексов $i,\ j,\ r$.

§ 3. Каноническая форма согласованных пар скобок

По теореме Дубровина–Новикова [5] для невырожденной локальной скобки Пуассона гидродинамического типа $\{I,J\}_2$ всегда существуют локальные координаты $u^1,\dots,u^N$ (плоские координаты метрики $g^{ij}_2(u)$), в которых эта скобка постоянна, т.е. $g^{ij}_2(u)=\eta^{ij}=\mathrm{const}$, $b^{ij}_{2,k}(u)=\Gamma^i_{2,jk}(u)=0$. Таким образом, мы можем выбрать плоские координаты метрики $g^{ij}_2(u)$ и в дальнейшем считать, что скобка Пуассона $\{I,J\}_2$ постоянна и имеет вид

$$\{I,J\}_2=\int\frac{\delta I}{\delta u^i(x)}\,\eta^{ij}\,\frac{d}{dx}\,\frac{\delta J}{\delta u^j(x)}\,dx, \tag{3.1}$$

где $\eta^{ij}=\eta^{ji}$, $\eta^{ij}=\mathrm{const}$, $\det\eta^{ij}\neq 0$. В дальнейшем мы будем также использовать в рассматриваемых плоских координатах ковариантную метрику η_{ij}, обратную к контравариантной метрике η^{ij}, $\eta^{is}\eta_{sj}=\delta^i_j$.

Теорема 3.1. *Произвольная нелокальная скобка Пуассона $\{I,J\}_1$ вида* (2.1) (*возможно, вырожденная*) *согласована с постоянной скобкой Пуассона* (3.1) *тогда и только тогда, когда она имеет вид*

$$\begin{aligned}\{I,J\}_1=\int\frac{\delta I}{\delta u^i(x)}\Bigg(&\left[\eta^{is}\frac{\partial H^j}{\partial u^s}+\eta^{js}\frac{\partial H^i}{\partial u^s}-K_1u^iu^j\right]\frac{d}{dx}\\&+\left[\eta^{is}\frac{\partial^2H^j}{\partial u^s\partial u^k}-K_1\delta^i_ku^j\right]u^k_x+K_1u^i_x\left(\frac{d}{dx}\right)^{-1}u^j_x\Bigg)\frac{\delta J}{\delta u^j(x)}\,dx,\end{aligned} \tag{3.2}$$

где $H^i(u)$, $1\leqslant i\leqslant N$, — гладкие функции, определенные в некоторой области локальных координат.

В плоском случае согласованных скобок Дубровина–Новикова ($K_1 = 0$) соответствующее утверждение было сформулировано автором в [14, 15] (см. также условия на плоские пучки метрик в [16]).

Доказательство. Из соотношений (2.4)–(2.8) следует, что в рассматриваемых локальных координатах условия согласованности скобок Пуассона $\{I,J\}_1$ и $\{I,J\}_2$ или, другими словами, условия, что скобка

$$\{I,J\} = \int \frac{\delta I}{\delta u^i(x)} \biggl((g_1^{ij}(u(x)) + \lambda \eta^{ij}) \frac{d}{dx} + b^{ij}_{1,k}(u(x))\, u^k_x + K_1 u^i_x \left(\frac{d}{dx}\right)^{-1} u^j_x \biggr) \frac{\delta J}{\delta u^j(x)}\, dx \tag{3.3}$$

является скобкой Пуассона для всех значений параметра λ, имеют вид

$$\eta^{is} b^{jr}_{1,s}(u) = \eta^{js} b^{ir}_{1,s}(u), \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial b^{jr}_{1,s}}{\partial u^k} - \frac{\partial b^{jr}_{1,k}}{\partial u^s} = K_1(\delta^r_s \delta^j_k - \delta^j_s \delta^r_k). \tag{3.5}$$

Определим функции $A^{ij}_k(u)$ соотношениями

$$A^{ij}_k(u) = b^{ij}_{1,k}(u) - K_1 \delta^j_k u^i. \tag{3.6}$$

Из формулы (3.5) следует, что

$$\frac{\partial A^{jr}_s}{\partial u^k} - \frac{\partial A^{jr}_k}{\partial u^s} = 0,$$

т. е. по лемме Пуанкаре локально существуют функции $P^{ij}(u)$, такие, что

$$A^{ij}_k(u) = \frac{\partial P^{ij}}{\partial u^k},$$

и из (3.6) находим необходимое выражение для коэффициента $b^{ij}_{1,k}(u)$:

$$b^{ij}_{1,k}(u) = \frac{\partial P^{ij}}{\partial u^k} + K_1 \delta^j_k u^i.$$

Найдем выражение для метрики $g_1^{ij}(u)$. Из соотношения (2.5) для скобки Пуассона $\{I,J\}_1$ получаем

$$\frac{\partial g_1^{ij}}{\partial u^k} = \frac{\partial P^{ij}}{\partial u^k} + \frac{\partial P^{ji}}{\partial u^k} + K_1 \delta^j_k u^i + K_1 \delta^i_k u^j$$

и, следовательно, учитывая соотношение (2.4),

$$g_1^{ij}(u) = P^{ij}(u) + P^{ji}(u) + K_1 u^i u^j + c^{ij}, \qquad c^{ij} = \mathrm{const},\ c^{ij} = c^{ji}.$$

Таким образом, доказано, что коэффициенты скобки Пуассона $\{I,J\}_1$ имеют так называемый лиувиллев вид (подробнее о важном свойстве лиувиллевости см. §5):

$$g_1^{ij}(u) = R^{ij}(u) + R^{ji}(u) + K_1 u^i u^j,$$

$$b^{ij}_{1,k}(u) = \frac{\partial R^{ij}}{\partial u^k} + K_1 u^i \delta^j_k,$$

где

$$R^{ij}(u) = P^{ij}(u) + \frac{1}{2}\, c^{ij}.$$

Кроме того, из соотношения (3.4) дополнительно получаем

$$\eta_{pj} b^{jr}_{1,l}(u) = \eta_{li} b^{ir}_{1,p}(u),$$

т. е.

$$\frac{\partial(\eta_{ps}R^{sr}(u))}{\partial u^l} + K_1\eta_{ps}u^s\delta^r_l = \frac{\partial(\eta_{ls}R^{sr}(u))}{\partial u^p} + K_1\eta_{ls}u^s\delta^r_p.$$

Последняя формула эквивалентна соотношению

$$\frac{\partial(\eta_{ps}R^{sr}(u) + K_1\eta_{ps}u^s u^r)}{\partial u^l} = \frac{\partial(\eta_{ls}R^{sr}(u) + K_1\eta_{ls}u^s u^r)}{\partial u^p}.$$

Следовательно, по лемме Пуанкаре локально существуют функции $H^r(u)$, $1 \leqslant r \leqslant N$, такие, что

$$\eta_{ps}R^{sr}(u) + K_1\eta_{ps}u^s u^r = \frac{\partial H^r}{\partial u^p}\,.$$

Таким образом, доказано, что

$$R^{sr}(u) = \eta^{sp}\frac{\partial H^r}{\partial u^p} - K_1 u^s u^r,$$

а коэффициенты скобки Пуассона $\{I, J\}_1$ имеют вид

$$g^{ij}_1(u) = \eta^{is}\frac{\partial H^j}{\partial u^s} + \eta^{js}\frac{\partial H^i}{\partial u^s} - K_1 u^i u^j, \tag{3.7}$$

$$b^{ij}_{1,k}(u) = \eta^{is}\frac{\partial^2 H^j}{\partial u^s \partial u^k} - K_1\delta^i_k u^j. \tag{3.8}$$

Поскольку в этом случае, как легко проверить, все соотношения согласованности (3.4) и (3.5) выполнены, важная для всей нашей дальнейшей конструкции теорема 3.1 доказана.

§4. Интегрируемые уравнения для канонических согласованных пар скобок

Теорема 4.1. *Нелокальная скобка вида* (3.2) (*возможно, вырожденная*) *является скобкой Пуассона тогда и только тогда, когда выполнены следующие уравнения*:

$$\frac{\partial^2 H^i}{\partial u^k \partial u^s}\,\eta^{sp}\,\frac{\partial^2 H^j}{\partial u^p \partial u^l} = \frac{\partial^2 H^j}{\partial u^k \partial u^s}\,\eta^{sp}\,\frac{\partial^2 H^i}{\partial u^p \partial u^l}, \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned}\left(\eta^{ir}\frac{\partial H^s}{\partial u^r} + \eta^{sr}\frac{\partial H^i}{\partial u^r} - K_1 u^i u^s\right)\eta^{jp}\frac{\partial^2 H^k}{\partial u^p \partial u^s}&\\ = \left(\eta^{jr}\frac{\partial H^s}{\partial u^r} + \eta^{sr}\frac{\partial H^j}{\partial u^r} - K_1 u^j u^s\right)\eta^{ip}\frac{\partial^2 H^k}{\partial u^p \partial u^s}&\,.\end{aligned} \tag{4.2}$$

В плоском случае ($K_1 = 0$) соответствующая теорема получена автором в [15], где была сформулирована также и гипотеза об интегрируемости системы (4.1), (4.2) при $K_1 = 0$ методом обратной задачи рассеяния, доказанная впоследствии в работах автора [4, 6, 7] (см. также [8], где найдена пара Лакса для этой системы в плоском случае). Соответствующие общие условия на плоские пучки метрик указаны в [16].

Для нелокальной скобки вида (3.2) соотношения (2.4), (2.5), (2.8) выполняются тождественно. Соотношение (2.7) в этом случае принимает вид

$$b^{ij}_{1,s}(u)b^{sr}_{1,k}(u) = b^{ir}_{1,s}(u)b^{sj}_{1,k}(u), \tag{4.3}$$

что дает уравнения

$$\begin{aligned}\Bigl(\eta^{ip}\frac{\partial^2 H^j}{\partial u^p\partial u^s} - K_1\delta^i_s u^j\Bigr)\Bigl(\eta^{sl}\frac{\partial^2 H^r}{\partial u^l\partial u^k} - K_1\delta^s_k u^r\Bigr)& \\ = \Bigl(\eta^{ip}\frac{\partial^2 H^r}{\partial u^p\partial u^s} - K_1\delta^i_s u^r\Bigr)&\Bigl(\eta^{sl}\frac{\partial^2 H^j}{\partial u^l\partial u^k} - K_1\delta^s_k u^j\Bigr),\end{aligned} \tag{4.4}$$

эквивалентные уравнениям (4.1).

Соотношение (2.6) дает уравнения

$$\begin{aligned}\Bigl(\eta^{ip}\frac{\partial H^s}{\partial u^p} + \eta^{sp}\frac{\partial H^i}{\partial u^p} - K_1 u^i u^s\Bigr)\Bigl(\eta^{jl}\frac{\partial^2 H^r}{\partial u^l\partial u^s} - K_1\delta^j_s u^r\Bigr)& \\ = \Bigl(\eta^{jp}\frac{\partial H^s}{\partial u^p} + \eta^{sp}\frac{\partial H^j}{\partial u^p} - K_1 u^j u^s\Bigr)&\Bigl(\eta^{il}\frac{\partial^2 H^r}{\partial u^l\partial u^s} - K_1\delta^i_s u^r\Bigr),\end{aligned} \tag{4.5}$$

эквивалентные уравнениям (4.2).

Из теоремы 4.1 немедленно получаем следующее элементарное следствие.

Следствие 4.1. *Очевидно, что любой набор N линейных функций $H^i(u) = c^i_k u^k + c^i$, $c^i_k = \mathrm{const}$, $c^i = \mathrm{const}$, является тривиальным решением нелинейной системы уравнений* (4.1), (4.2). *Таким образом, скобка*

$$\begin{aligned}\{I, J\}_1 = \int \frac{\delta I}{\delta u^i(x)}\biggl(\Bigl[\eta^{is}c^j_s + \eta^{js}c^i_s - K_1 u^i u^j\Bigr]\frac{d}{dx}& \\ - K_1\delta^i_k u^j u^k_x + K_1 u^i_x\Bigl(\frac{d}{dx}\Bigr)^{-1}&u^j_x\biggr)\frac{\delta J}{\delta u^j(x)}\,dx\end{aligned} \tag{4.6}$$

является скобкой Пуассона при любых константах c^i_k. В частности, для любой симметричной постоянной матрицы (μ^{ij}), $\mu^{ij} = \mu^{ji}$, $\mu^{ij} = \mathrm{const}$, контравариантная метрика $\mu^{ij} - Ku^iu^j$ всегда является метрикой постоянной кривизны K, если она невырожденна (*при условии невырожденности матрицы* (μ^{ij}) *эта метрика является, очевидно, невырожденной*); *при этом порождаемая этой метрикой связность Леви-Чивиты определяется формулой $\Gamma^{ij}_k(u) = (\mu^{is} - Ku^iu^s)\Gamma^j_{sk}(u) = K\delta^i_k u^j$.*

Рассмотрим, в частности, контравариантную метрику вида

$$g^{ij}(u) = a^i\delta^{ij} - Ku^iu^j, \tag{4.7}$$

где a^i, $1 \leqslant i \leqslant N$, — произвольные ненулевые константы, так что метрика $g^{ij}(u)$ является невырожденной. Нетрудно доказать, что

$$\det(g^{ij}(u)) = a^1\cdots a^N\Bigl(1 - K\sum_{s=1}^{N}\frac{(u^s)^2}{a^s}\Bigr). \tag{4.8}$$

Ковариантная метрика $g_{ij}(u)$, обратная к контравариантной метрике $g^{ij}(u)$, $g^{is}(u)g_{sj}(u) = \delta^i_j$, имеет вид

$$g_{ij}(u) = \frac{1}{a^i}\,\delta_{ij} + \frac{Ku^iu^j}{a^ia^j\bigl(1 - K\sum_{s=1}^N \frac{(u^s)^2}{a^s}\bigr)} \tag{4.9}$$

и является метрикой постоянной римановой кривизны K при любых значениях ненулевых констант a^i. Любопытно, что рассматриваемые локальные координаты являются геодезическими в точке с координатами $(0,\dots,0)$ $(u^i = 0,\ 1 \leqslant i \leqslant N)$, но не являются не только нормальными координатами Биркгофа для метрики, но даже и римановыми координатами, в которых, как известно, метрика имеет подобное разложение. Более важно, что эти локальные координаты являются, как будет показано в §5, специальными лиувиллевыми координатами для соответствующей скобки Пуассона.

Отметим, что метрика $g^{ij}(u)$ является невырожденной тогда и только тогда, когда не более чем одна из $N+1$ констант a^i, $1 \leqslant i \leqslant N$, и K равна нулю. Укажем соответствующие формулы для интересного случая, когда любая одна из этих констант равна нулю. Случай $K=0$ тривиален. Если же $a^m = 0$, то

$$\det(g^{ij}(u)) = -K\biggl(\prod_{s\neq m} a^s\biggr)(u^m)^2. \tag{4.10}$$

Компоненты ковариантной метрики $g_{ij}(u)$ постоянной римановой кривизны K в этом случае имеют вид

$$g_{mm}(u) = -\frac{1}{K(u^m)^2}\biggl(1 - K\sum_{s\neq m}\frac{(u^s)^2}{a^s}\biggr), \tag{4.11}$$

$$g_{im}(u) = g_{mi}(u) = -\frac{1}{a^i}\,\frac{u^i}{u^m}, \qquad i \neq m, \tag{4.12}$$

$$g_{ii}(u) = \frac{1}{a^i}, \qquad i \neq m, \tag{4.13}$$

$$g_{ij}(u) = 0, \qquad i \neq j,\ i \neq m,\ j \neq m. \tag{4.14}$$

Все эти модели пространств постоянной кривизны играют важную роль в гамильтоновой теории систем гидродинамического типа. Скобки Мохова–Ферапонтова, задаваемые при $a^i = \varepsilon^i = \pm 1$ метриками (4.7) постоянной римановой кривизны K, названы в [17] *каноническими*. Такие канонические скобки естественно возникали также в приложениях в работе [18].

Теорема 4.2 [2, 3]. *Система нелинейных уравнений* (4.1), (4.2) *интегрируется методом обратной задачи рассеяния.*

Отметим, что в [2, 3] получена и проинтегрирована система нелинейных уравнений, эквивалентная системе (4.1), (4.2) и тоже описывающая согласованные нелокальные скобки Пуассона вида (1.1), но в других локальных координатах, гораздо более удобных для интегрирования (в этих координатах метрики обеих согласованных скобок диагональны). Но локальные координаты, в которых метрики скобок диагонализируются, плохо приспособлены для эффективного построения интегрируемых иерархий, соответствующих рассматриваемым согласованным скобкам Пуассона. Для этой цели в данной работе развит другой подход. В плоском случае ($K_1 = 0$) система (4.1), (4.2) проинтегрирована в [6, 7].

§ 5. Лиувиллевы и специальные лиувиллевы координаты

Определение 5.1. Локальные координаты $u = (u^1, \dots, u^N)$ называются *лиувиллевыми* для произвольной скобки Пуассона $\{I, J\}$, если функции (поля) $u^i(x)$ являются плотностями интегралов в инволюции относительно этой скобки, т. е.

$$\{U^i, U^j\} = 0, \qquad 1 \leqslant i, j \leqslant N, \tag{5.1}$$

где $U^i = \int u^i(x)\,dx$, $1 \leqslant i \leqslant N$. В этом случае скобка Пуассона также называется *лиувиллевой* в этих координатах.

Лиувиллевы координаты естественно возникают и играют существенную роль в процедуре Дубровина–Новикова усреднения гамильтоновых уравнений [5]. Физические координаты, получаемые усреднением плотностей участвующих в процедуре Дубровина–Новикова N инволютивных локальных интегралов изначальной гамильтоновой системы, всегда являются лиувиллевыми для соответствующей усредненной скобки. Это свойство и явилось мотивировкой определения лиувиллевых координат для локальных скобок Пуассона гидродинамического типа в [5]. Для общих слабо нелокальных скобок Пуассона гидродинамического типа (скобок Ферапонтова [19, 20]) лиувиллевы координаты введены в [17].

Нелокальная скобка Пуассона гидродинамического типа (1.1) является лиувиллевой в локальных координатах $u = (u^1, \dots, u^N)$ тогда и только тогда, когда существует матричная функция $\Phi^{ij}(u)$, такая, что

$$b^{ij}_k(u) = \frac{\partial \Phi^{ij}}{\partial u^k} - K\delta^i_k u^j. \tag{5.2}$$

В этом случае в силу соотношений (2.4), (2.5) метрика $g^{ij}(u)$ обязана иметь вид

$$g^{ij}(u) = \Phi^{ij}(u) + \Phi^{ji}(u) - Ku^i u^j \tag{5.3}$$

(функцию $\Phi^{ij}(u)$ при этом можно подправить на произвольную постоянную матричную функцию $c^{ij} = \mathrm{const}$). Матричная функция $\Phi^{ij}(u)$ называется *лиувиллевой функцией* соответствующей лиувиллевой скобки Пуассона.

Таким образом, нелокальная скобка Пуассона (1.1) лиувиллева, если она имеет вид

$$\begin{aligned}\{I, J\} = \int \frac{\delta I}{\delta u^i(x)} \biggl(\Bigl(\Phi^{ij}(u) + \Phi^{ji}(u) - Ku^i u^j \Bigr) \frac{d}{dx} \\ + \biggl(\frac{\partial \Phi^{ij}}{\partial u^k} - K\delta^i_k u^j \biggr) u^k_x + Ku^i_x \biggl(\frac{d}{dx} \biggr)^{-1} u^j_x \biggr) \frac{\delta J}{\delta u^j(x)}\,dx.\end{aligned} \tag{5.4}$$

Из теоремы 3.1 следует

Теорема 5.1. *Плоские координаты произвольной невырожденной локальной скобки Пуассона гидродинамического типа* $\{I,J\}_2$ *всегда являются лиувиллевыми для любой нелокальной скобки Пуассона* $\{I,J\}_1$ *вида* (1.1), *согласованной с* $\{I,J\}_2$. *Более того, при этом соответствующая лиувиллева функция* $\Phi^{ij}(u)$ *всегда имеет специальный вид*

$$\Phi^{ij}(u) = \eta^{is}\frac{\partial H^j}{\partial u^s}\,. \tag{5.5}$$

Определение 5.2. Локальные координаты $u=(u^1,\dots,u^N)$ называются *специальными лиувиллевыми координатами* [15, 21] для произвольной скобки Пуассона $\{I,J\}$, если существует ненулевая постоянная симметричная матрица (η_{ij}), такая, что функции (поля) $u^i(x)$, $1\leqslant i\leqslant N$, и $\eta_{ij}u^i(x)u^j(x)$ являются плотностями интегралов в инволюции относительно этой скобки, т. е.

$$\{U^i,U^j\}=0, \qquad 1\leqslant i,j\leqslant N+1, \tag{5.6}$$

где $U^i=\int u^i(x)\,dx$, $1\leqslant i\leqslant N$, $U^{N+1}=\int \eta_{ij}u^i(x)u^j(x)\,dx$. В этом случае скобка Пуассона также называется *специальной лиувиллевой* в этих координатах.

Специальные лиувиллевы координаты были введены в работах автора [15, 21]. Наиболее важным является случай невырожденной матрицы η_{ij}.

Теорема 5.2. *Нелокальная скобка Пуассона вида* (1.1) *является специальной лиувиллевой в локальных координатах* $u=(u^1,\dots,u^N)$ *тогда и только тогда, когда она лиувиллева со специальной лиувиллевой функцией* $\Phi^{ij}(u)$, *такой, что*

$$\eta_{ks}\Phi^{sj}(u)=\frac{\partial H^j}{\partial u^k}\,. \tag{5.7}$$

Для невырожденной матрицы (η_{ij}) получаем в этом случае в точности нашу скобку (3.2) из канонической согласованной пары.

Таким образом, наша задача о согласованных нелокальных скобках Пуассона гидродинамического типа эквивалентна задаче классификации специальных лиувиллевых координат для нелокальных скобок Пуассона гидродинамического типа.

Теорема 5.3. *Произвольная нелокальная скобка Пуассона гидродинамического типа вида* (1.1) *согласована с постоянной скобкой Пуассона* (3.1) *тогда и только тогда, когда функции* $u^i(x)$, $1\leqslant i\leqslant N$, *и* $\eta_{ij}u^i(x)u^j(x)$, $\eta^{is}\eta_{sj}=\delta^i_j$, *являются плотностями интегралов в инволюции относительно скобки Пуассона* (1.1).

Отметим, что $u^i(x)$, $1\leqslant i\leqslant N$, — плотности аннуляторов скобки (3.1), а $\frac12\eta_{ij}u^i(x)u^j(x)$ — плотность импульса скобки (3.1).

Теорема 5.4. *Произвольная нелокальная скобка Пуассона гидродинамического типа вида* (1.1) *согласована с произвольной невырожденной локальной скобкой Пуассона* (2.2) *тогда и только тогда, когда* N *аннуляторов и импульс скобки* (2.2) *являются интегралами в инволюции относительно скобки Пуассона* (1.1).

В плоском случае $K=0$ все утверждения данного параграфа были доказаны ранее в работах автора [14, 15, 21].

§ 6. Интегрируемые бигамильтоновы системы гидродинамического типа

Рассмотрим произвольную пару согласованных нелокальных гамильтоновых операторов гидродинамического типа P_1^{ij} и P_2^{ij}, порождаемых метриками постоянной римановой кривизны. Как показано выше в лемме 2.1, один из этих операторов, скажем P_2^{ij}, можно считать локальным без ограничения общности. Если локальный гамильтонов оператор P_2^{ij} является невырожденным, то из теоремы 3.1 следует, что локальной заменой координат пара согласованных гамильтоновых операторов P_1^{ij} и P_2^{ij} приводится к следующему каноническому виду:

$$P_2^{ij}[v(x)] = \eta^{ij}\frac{d}{dx}, \tag{6.1}$$

$$\begin{aligned} P_1^{ij}[v(x)] &= \left(\eta^{is}\frac{\partial h^j}{\partial v^s} + \eta^{js}\frac{\partial h^i}{\partial v^s} - Kv^iv^j\right)\frac{d}{dx} \\ &\qquad + \left(\eta^{is}\frac{\partial^2 h^j}{\partial v^s \partial v^k} - K\delta_k^i v^j\right)v_x^k + Kv_x^i\left(\frac{d}{dx}\right)^{-1} v_x^j, \end{aligned} \tag{6.2}$$

где (η^{ij}) — произвольная невырожденная постоянная симметричная матрица, т. е. $\det(\eta^{ij}) \neq 0$, $\eta^{ij} = \mathrm{const}$, $\eta^{ij} = \eta^{ji}$; K — произвольная константа; $h^i(v)$, $1 \leqslant i \leqslant N$, — гладкие функции, заданные в некоторой области локальных координат, такие, что оператор (6.2) является гамильтоновым, т. е. функции $h^i(v)$ удовлетворяют интегрируемым уравнениям (4.1), (4.2) (см. теоремы 4.1 и 4.2 выше).

Замечание 6.1. Очевидно, что здесь всегда можно считать, что $\eta^{ij} = \varepsilon^i\delta^{ij}$, $\varepsilon^i = 1$ при $i \leqslant p$, $\varepsilon^i = -1$ при $i > p$, где p — положительный индекс инерции метрики, $0 \leqslant p \leqslant N$, и, кроме того, необходимо классифицировать гамильтоновы операторы (6.2) относительно действия группы движений соответствующего N-мерного псевдоевклидова пространства $\mathbb{R}_p^N$. Это нетрудно сделать, но для наших целей достаточно (и удобнее) пользоваться указанным выше представлением канонической согласованной пары («условно каноническим» представлением).

Рассмотрим оператор рекурсии, задаваемый каноническими согласованными гамильтоновыми операторами (6.1), (6.2),

$$\begin{aligned} R_l^i[v(x)] &= [P_1[v(x)](P_2[v(x)])^{-1}]_l^i \\ &= \left(\left(\eta^{is}\frac{\partial h^j}{\partial v^s} + \eta^{js}\frac{\partial h^i}{\partial v^s} - Kv^iv^j\right)\frac{d}{dx}\right. \\ &\qquad \left. + \left(\eta^{is}\frac{\partial^2 h^j}{\partial v^s \partial v^k} - K\delta_k^i v^j\right)v_x^k + Kv_x^i\left(\frac{d}{dx}\right)^{-1} v_x^j\right)\eta_{jl}\left(\frac{d}{dx}\right)^{-1} \end{aligned} \tag{6.3}$$

(об операторах рекурсии, задаваемых парами согласованных гамильтоновых операторов, см. [13, 22–26]).

Применим полученный нами оператор рекурсии (6.3) к системе трансляций по x, т. е. системе гидродинамического типа

$$v_t^i = v_x^i, \tag{6.4}$$

которая, очевидно, является гамильтоновой с гамильтоновым оператором (6.1):

$$v^i_t = v^i_x \equiv \eta^{ij} \frac{d}{dx} \frac{\delta H}{\delta v^j(x)}, \qquad H = \frac{1}{2} \int \eta_{jl} v^j(x) v^l(x)\, dx. \tag{6.5}$$

Любая система из иерархии

$$v^i_{t_n} = (R^n)^i_j v^j_x, \qquad n \in \mathbb{Z}, \tag{6.6}$$

является мультигамильтоновой интегрируемой системой.

В частности, интегрируемой является любая система вида

$$v^i_{t_1} = R^i_j v^j_x, \tag{6.7}$$

т. е. система гидродинамического типа

$$\begin{aligned} v^i_{t_1} &= \left(\left(\eta^{is} \frac{\partial h^j}{\partial v^s} + \eta^{js} \frac{\partial h^i}{\partial v^s} - K v^i v^j \right) \frac{d}{dx} \right. \\ &\qquad \left. + \left(\eta^{is} \frac{\partial^2 h^j}{\partial v^s \partial v^k} - K \delta^i_k v^j \right) v^k_x + K v^i_x \left(\frac{d}{dx} \right)^{-1} v^j_x \right) \eta_{jl} v^l \\ &\equiv \left(\eta^{is} \frac{\partial h^j}{\partial v^s}\, \eta_{jk} + \frac{\partial h^i}{\partial v^k} + \eta^{is} \eta_{jl} \frac{\partial^2 h^j}{\partial v^s \partial v^k}\, v^l - K \eta_{sk} v^i v^s - \frac{K}{2}\, \delta^i_k \eta_{sl} v^s v^l \right) v^k_x \\ &\equiv \left(h^i(v) + \eta^{is} \frac{\partial h^j}{\partial v^s} \eta_{jl} v^l - \frac{K}{2} \eta_{sk} v^i v^s v^k \right)_x, \end{aligned} \tag{6.8}$$

где $h^i(v)$, $1 \leqslant i \leqslant N$, — произвольное решение интегрируемой системы (4.1), (4.2).

Эта система гидродинамического типа является бигамильтоновой с парой канонических согласованных гамильтоновых операторов (6.1), (6.2):

$$\begin{gathered} v^i_{t_1} = \left(\left(\eta^{is} \frac{\partial h^j}{\partial v^s} + \eta^{js} \frac{\partial h^i}{\partial v^s} - K v^i v^j \right) \frac{d}{dx} \right. \\ \left. + \left(\eta^{is} \frac{\partial^2 h^j}{\partial v^s \partial v^k} - K \delta^i_k v^j \right) v^k_x + K v^i_x \left(\frac{d}{dx} \right)^{-1} v^j_x \right) \frac{\delta H_1}{\delta v^j(x)}, \\ H_1 = \frac{1}{2} \int \eta_{jl} v^j(x) v^l(x)\, dx, \end{gathered} \tag{6.9}$$

$$\begin{gathered} v^i_{t_1} = \eta^{ij} \frac{d}{dx} \frac{\delta H_2}{\delta v^j(x)}, \\ H_2 = \int \left(\eta_{jk} h^k(v(x)) v^j(x) - \frac{K}{8}\, \eta_{jk} \eta_{sl} v^j(x) v^k(x) v^s(x) v^l(x) \right) dx. \end{gathered} \tag{6.10}$$

Следующей системой в иерархии (6.6) (при $n = 2$) является интегрируемая система гидродинамического типа

$$\begin{aligned} v^i_{t_2} = \Bigg(\left(\eta^{is} \frac{\partial h^j}{\partial v^s} + \eta^{js} \frac{\partial h^i}{\partial v^s} - K v^i v^j \right) \frac{d}{dx} + \left(\eta^{is} \frac{\partial^2 h^j}{\partial v^s \partial v^k} - K \delta^i_k v^j \right) v^k_x \\ + K v^i_x \left(\frac{d}{dx} \right)^{-1} v^j_x \Bigg) \eta_{jl} \left(h^l(v) + \eta^{lp} \frac{\partial h^r}{\partial v^p}\, \eta_{rq} v^q - \frac{K}{2}\, \eta_{pr} v^l v^p v^r \right) \end{aligned}$$

$$\equiv \Bigg(\bigg(\eta^{is}\frac{\partial h^j}{\partial v^s} + \eta^{js}\frac{\partial h^i}{\partial v^s} - Kv^iv^j\bigg)\bigg(\eta_{jl}\frac{\partial h^l}{\partial v^k} + \eta_{rk}\frac{\partial h^r}{\partial v^j} + \eta_{rq}v^q\frac{\partial^2 h^r}{\partial v^j\partial v^k} - K\eta_{jl}\eta_{pk}v^lv^p - \frac{K}{2}\,\eta_{jk}\eta_{pl}v^lv^p\bigg) + \bigg(\eta^{is}\frac{\partial^2 h^j}{\partial v^s\partial v^k} - K\delta^i_kv^j\bigg)\bigg(\eta_{jl}h^l(v) + \eta_{rq}v^q\frac{\partial h^r}{\partial v^j} - \frac{K}{2}\,\eta_{jl}\eta_{pr}v^lv^pv^r\bigg) + K\delta^i_k\bigg(\eta_{jl}h^l(v)v^j - \frac{K}{8}\,\eta_{jl}\eta_{pr}v^jv^lv^pv^r\bigg)\Bigg)v^k_x. \tag{6.11}$$

Даже тривиальные, линейные по полям $v^i(x)$, решения системы (4.1), (4.2) порождают нетривиальные интегрируемые системы гидродинамического типа. Все представленные в данной работе результаты обобщаются прямым образом на случай общих нелокальных скобок Пуассона гидродинамического типа (скобок Ферапонтова [19, 20]), хотя формулы становятся значительно более громоздкими и менее эффективными. Эти результаты будут опубликованы в другой работе.

Литература

1. *Мохов О. И., Ферапонтов Е. В.* О нелокальных гамильтоновых операторах гидродинамического типа, связанных с метриками постоянной кривизны. УМН, **45**, вып. 3, 191–192 (1990).
2. *Мохов О. И.* Согласованные метрики постоянной римановой кривизны: локальная геометрия, нелинейные уравнения и интегрируемость. Функц. анализ и его прил., **36**, вып. 3, 36–47 (2002); arXiv: math.DG/0201280 (2002).
3. *Мохов О. И.* Пара Лакса для неособых пучков метрик постоянной римановой кривизны. УМН, **57**, вып. 3, 155–156 (2002).
4. *Мохов О. И.* Согласованные и почти согласованные псевдоримановы метрики. Функц. анализ и его прил., **35**, вып. 2, 24–36 (2001); arXiv: math.DG/0005051 (2000).
5. *Дубровин Б. А., Новиков С. П.* Гамильтонов формализм одномерных систем гидродинамического типа и метод усреднения Боголюбова–Уизема. ДАН СССР, **270**, №4, 781–785 (1983).
6. *Мохов О. И.* Об интегрируемости уравнений для неособых пар согласованных плоских метрик. Теор. матем. физ., **130**, вып. 2, 233–250 (2002); arXiv: math.DG/0005081 (2000).
7. *Мохов О. И.* Плоские пучки метрик и интегрируемые редукции уравнений Ламе. УМН, **56**, вып. 2, 221–222 (2001).
8. *Ferapontov E. V.* Compatible Poisson brackets of hydrodynamic type. J. Phys. A, **34**, 2377–2388 (2001); arXiv: math.DG/0005221 (2000).
9. *Мохов О. И.* Согласованные гамильтоновы операторы Дубровина–Новикова, производная Ли и интегрируемые системы гидродинамического типа. Труды Международной конференции «Нелинейные эволюционные уравнения и динамические системы», Кембридж (Англия), 24–30 июля 2001 г., Теор. матем. физ., **133**, вып. 2, 279–288 (2002); arXiv: math.DG/0201281 (2002).
10. *Мохов О. И.* Интегрируемые бигамильтоновы системы гидродинамического типа. УМН, **57**, вып. 1, 157–158 (2002).
11. *Magri F.* A simple model of the integrable Hamiltonian equation. J. Math. Phys., **19**, No. 5, 1156–1162 (1978).
12. *Mokhov O. I.* Hamiltonian systems of hydrodynamic type and constant curvature metrics. Phys. Letters. A, **166**, Nos. 3–4, 215–216 (1992).

13. *Мохов О. И.* Симплектические и пуассоновы структуры на пространствах петель гладких многообразий и интегрируемые системы. УМН, **53**, вып. 3, 85–192 (1998).
14. *Мохов О. И.* О согласованных пуассоновых структурах гидродинамического типа. УМН, **52**, вып. 6, 171–172 (1997).
15. *Мохов О. И.* Согласованные пуассоновы структуры гидродинамического типа и уравнения ассоциативности. Труды МИРАН, **225**, 284–300 (1999).
16. *Dubrovin B.* Geometry of 2D topological field theories. In: Lect. Notes in Math., Vol. 1620, 1996, pp. 120–348; arXiv: hep-th/9407018 (1994).
17. *Maltsev A. Ya., Novikov S. P.* On the local systems Hamiltonian in the weakly nonlocal Poisson brackets. Physica D, **156**, Nos. 1–2, 53–80 (2001); arXiv: nlin.SI/0006030 (2000).
18. *Павлов М. В.* Эллиптические координаты и мультигамильтоновы структуры систем гидродинамического типа. ДАН, **339**, №1, 21–23 (1994).
19. *Ферапонтов Е. В.* Дифференциальная геометрия нелокальных гамильтоновых операторов гидродинамического типа. Функц. анализ и его прил., **25**, вып. 3, 37–49 (1991).
20. *Ferapontov E. V.* Nonlocal Hamiltonian operators of hydrodynamic type: differential geometry and applications. In: Topics in topology and mathematical physics (S. P. Novikov, ed.), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995, pp. 33–58.
21. *Mokhov O. I.* Compatible Poisson structures of hydrodynamic type and the equations of associativity in two-dimensional topological field theory. Rep. Math. Phys., **43**, No. 1/2, 247–256 (1999).
22. *Гельфанд И. М., Дорфман И. Я.* Гамильтоновы операторы и связанные с ними алгебраические структуры. Функц. анализ и его прил., **13**, вып. 4, 13–30 (1979).
23. *Fuchssteiner B.* Application of hereditary symmetries to nonlinear evolution equations. Nonlinear Anal., **3**, 849–862 (1979).
24. *Fokas A. S., Fuchssteiner B.* On the structure of symplectic operators and hereditary symmetries. Lettere al Nuovo Cimento, **28**, No. 8, 299–303 (1980).
25. *Олвер П.* Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. Мир, М., 1989.
26. *Dorfman I.* Dirac structures and integrability of nonlinear evolution equations. John Wiley & Sons, Chichester, England, 1993.

Центр нелинейных исследований
при Институте теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН
e-mail: mokhov@mi.ras.ru, mokhov@landau.ac.ru

Поступило в редакцию
9 апреля 2002 г.