I. O. Kalinin, Cohomological characteristics of real projective hypersurfaces,
Algebra i Analiz, 1991, Volume 3, Issue 2, 91–110

https://www.mathnet.ru/eng/aa243

Алгебра и анализ
Том 3 (1991), вып. 2

КОГОМОЛОГИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ПРОЕКТИВНЫХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ

И. О. Калинин

В настоящей работе для неособых вещественных проективных гиперповерхностей устанавливаются новые соотношения между топологическими инвариантами множества вещественных точек и действием инволюции комплексного сопряжения в кольце когомологий множества комплексных точек. В доказательстве существенную роль играет подходящий вариант спектральной последовательности инволюции.

Множество вещественных точек $\mathbb{R}A$ вещественной гиперповерхности пространства $\mathbb{R}P^{n+1}$ является множеством неподвижных точек инволюции комплексного сопряжения conj, действующей в множестве $\mathbb{C}A$ ее комплексных точек. В настоящей работе устанавливаются новые соотношения между топологическими инвариантами пары $(\mathbb{R}P^{n+1}, \mathbb{R}A)$, с одной стороны, и действием инволюции conj в кольце $H^*(\mathbb{C}A, \mathbb{Z})$ — с другой. Для всех гиперповерхностей достаточно больших степеней и размерностей (см. $(*)$,§ 1) вместе с известными ранее соотношениями они определяют действие инволюции conj в $H^*(\mathbb{C}P^{n+1}; \mathbb{Z})$-алгебре $H^*(\mathbb{C}A; \mathbb{Z})$ с точностью до изоморфизма. В качестве следствия новых соотношений также доказываются новые ограничения на топологию множества вещественных точек гиперповерхности.

В доказательствах существенную роль играют вариант спектральной последовательности инволюции с $\mathbb{Z}$-градуировкой (а не $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ — как обычно), а также стабилизация когомологий множеств вещественных точек при переходе от гиперповерхности степени m к m-листному разветвленному накрытию проективного пространства с ветвлением над исходной гиперповерхностью.

Все гомологии и когомологии, если не указано противное, берутся с коэффициентами в поле $\mathbb{Z}/2$. Через C_m будем обозначать циклическую группу порядка m.

Автор благодарит О.Я.Виро и В.М.Харламова за полезные обсуждения и советы.

§ 1. Основные результаты

1.1. В настоящей работе будут рассматриваться неособые вещественные гиперповерхности степени m в проективном пространстве $\mathbb{P}^{n+1}$. Пусть A — такая гиперповерхность. Тогда множества ее комплексных и вещественных точек будут обозначаться через $\mathbb{C}A$ и $\mathbb{R}A$ соответственно. В силу определения, $\mathbb{C}A$ и $\mathbb{R}A$ являются гладкими подмногообразиями соответствующих проективных пространств.

Ключевые слова: вещественная проективная гиперповехность, спектральная последовательность инволюций.

Инволюции комплексного сопряжения, действующие в $\mathbb{C}P^{n+1}$,$\mathbb{C}A$ и $\mathbb{C}P^{n+1}\backslash\mathbb{C}A$, будем обозначать через conj.

1.2. Топологические инварианты. Пусть X — подпространство пространства $\mathbb{R}P^q$,$\mathrm{in}: X \to \mathbb{P}P^q$ — включение. Положим

$$l(x) = \begin{cases} \max\{i/\mathrm{in}^i H^i(\mathbb{R}P^q) \to H^i(X) \text{ ненулевой} \\ \text{гомоморфизм }\}, \text{ если } X \neq \emptyset; \\ -1, \text{ если } X = \emptyset. \end{cases} \tag{1}$$

Для пространства с инволюцией из теории Смита (см. также § 2) известно, что разность размерностей тотальных когомологий самого пространства и его множества неподвижных точек есть неотрицательное четное число. Положим

$$a(A) = (\dim(H^*(\mathbb{C}A)) - \dim(H^*(\mathbb{R}A)))/2. \tag{2}$$

Обозначим через z_A образующую группы $\mathrm{Im}(\mathrm{in}^n)$, где гомоморфизм in^n : $H^n(\mathbb{C}P^{n+1}) \to H^n(\mathbb{C}A)$ индуцирован включением $\mathrm{in} : \mathbb{C}A \to \mathbb{C}P^{n+1}$(заметим, что $h_A = 0$ для нечетного n). Через $[\mathbb{R}A]$ обозначим элемент группы $H^n(\mathbb{C}A)$, двойственный гомологическому классу подмногообразия $\mathbb{R}A$ в $\mathbb{C}A$. Положим

$$\varphi(A) = \begin{cases} 0, \text{ если } [\mathbb{R}A] = 0; \\ 1, \text{ если } [\mathbb{R}A] = h_A \neq 0; \\ 2, \text{ в остальных случаях .} \end{cases}$$

Через χ будет обозначаться эйлерова характеристика. Как известно, если n нечетно, то $\chi(\mathbb{R}A) = 0$.

1.3. Включение $\mathrm{in} : \mathbb{C}A \to \mathbb{C}P^{n+1}$ индуцирует на кольце $H^*(\mathbb{C}A; \mathbb{Z})$ структуру $H^*(\mathbb{C}P^{n+1}; \mathbb{Z})$-алгебры.

Теорема А. *Пусть A и B неособые вещественные гиперповерхности степени m в $\mathbb{P}^{n+1}$.*

а) *Пусть*

$$(n,m) \notin \{(Z,k)/k \geqslant 5\} \cup \{(4,3),(4,4),(4,5),(6,3),(8,3)\}; \tag{$*$}$$

1) $a(A) = a(B)$;
2) $\chi(\mathbb{R}A) = \chi(\mathbb{R}B)$;
3) $l(\mathbb{R}A) = l(\mathbb{R}B)$;
4) $\varphi(A) = \varphi(B)$.

Тогда $H^*(\mathbb{C}P^{n+1}; \mathbb{Z})$-алгебры $H^*(\mathbb{C}A; \mathbb{Z})$ и $H^*(\mathbb{C}B; \mathbb{Z})$ эквивариантно изоморфны (относительно действия инволюции conj*).

б) *Если $H^*(\mathbb{C}P^{n+1}; \mathbb{Z})$-алгебры $H^*(\mathbb{C}A; \mathbb{Z})$ и $H^*(\mathbb{C}B; \mathbb{Z})$ эквивариантно изоморфны и выполнено* 1) *или* 3), *то выполнены и оставшиеся три равенства из утверждения* а) *теоремы.*

1.4. Замечания к теореме А.

1.4.1. Поскольку группа $H^*(\mathbb{C}A; \mathbb{Z})$ не содержит кручения, теорема А показывает, что $H^*(\mathbb{C}P^{n+1}; K)$-алгебра $H^*(\mathbb{C}A; K)$ с инволюцией conj* определяется числами n,m,$a(A)$,$\chi(\mathbb{R}A)$,$l(\mathbb{R}A)$,$\varphi(A)$ с точностью до эквивариантного изоморфизма алгебр для любого кольца K(если, конечно, пара (n, m) удовлетворяет условию $(*)$ в формулировке теоремы).

1.4.2. Обратный вопрос — в какой мере $H^*(\mathbb{C}P^{n+1}; \mathbb{Z})$-алгебра $H^*(\mathbb{C}A; \mathbb{Z})$ с инволюцией conj* определяет топологию пары $(\mathbb{R}P^{n+1}; \mathbb{R}A)$ — полностью не решен. Теорема А сводит этот вопрос к следующему:

для данной $H^*(\mathbb{C}P^{n+1};\mathbb{Z})$-алгебры $\mathcal{A}$ с инволюцией T описать следующее множество:

$L(\mathcal{A},T) = \{l \in \mathbb{Z}|$ существует неособая гиперповерхность A в $\mathbb{P}^{n+1}$ степени m такая, что пара $(\mathcal{A},T)$ эквивариантно изоморфна алгебре $H^*(\mathbb{C}A;\mathbb{Z})$ с инволюцией conj^* и $l = l(\mathbb{R}A)\}$.

Например, для квадрики A, задаваемой в $\mathbb{P}^{n+1}$ уравнением $-x_0^2-\dots-x_s^2+x_{s+1}^2+\dots+x_{n+1}^2=0$,

$$L(H^*(\mathbb{C}A;\mathbb{Z}),\mathrm{conj}^*) = \begin{cases} \{i\in\mathbb{Z}|i\equiv s\,(\mathrm{mod}\,2),\ i\in[-1,n/2]\}, \\ \text{если } n \text{ четно ;} \\ \mathbb{Z}\cap[-1,(n-1)/2], \text{ если } n \text{ нечетно} \end{cases}$$

Для некоторых пар $(\mathcal{A},T)$ множество $L(\mathcal{A},T)$ состоит из одного элемента, см. предложение 1.2. Имеется несколько других ограничений на множество $L(\mathcal{A},T)$, см. теорему C, а также предложение 1.3.

1.4.3. С теоремой A тесно связан вопрос об описании соотношений между числами $a(A)$,$\chi(\mathbb{R}A)$,$l(\mathbb{R}A)$,$\varphi(A)$. Благодаря работе В.В.Никулина [8] последний вопрос сводится к проблеме описания $H^*(\mathbb{C}P^{n+1};\mathbb{Z})$-алгебр с инволюцией conj^*, для которых $L\neq\emptyset$.

1.5. О доказательстве теоремы A. Доказательство теоремы A разбивается на две части: первая — описание инвариантов, однозначно определяющих $H^*(\mathbb{C}P^{n+1};\mathbb{Z})$-алгебру $H^*(\mathbb{C}A;\mathbb{Z})$ с инволюцией conj^*, вторая — выражение этих инвариантов через числа n,m,$a(A)$,$\chi(\mathbb{R}A)$,$l(\mathbb{R}A)$,$\varphi(A)$.

1.5.1. В силу простого строения алгебры $H^*(\mathbb{C}A;\mathbb{Z})$ первая задача сводится к изучению троек, состоящих из формы индексов пересечения на группе $H^n(\mathbb{C}A;\mathbb{Z})$, инволюции conj^* на ней и отмеченного элемента h_A.

Нечетномерный случай — описание унимодулярной кососимметрической формы с инволюцией — давно известен. Есть три инварианта таких форм, которые определяют форму с инволюцией с точностью до эквивариантного изоморфизма (см. теорему 6.1).

Четномерный случай рассмотрен в работе [8]. В этой работе выписаны 10 инвариантов таких троек, которые однозначно определяют род тройки. В настоящей работе доказано, что для проективных гиперповерхностей, удовлетворяющих условию (*), эти 10 инвариантов определяют тройку $(H^n(\mathbb{C}A;\mathbb{Z}),\mathrm{conj}^*,h_A)$ с точностью до эквивариантного изоморфизма (см. предложение 6.3).

1.5.2. Так или иначе все 10 инвариантов троек были известны задолго до работы [8], и для полных пересечений 8 из них были выражены через числа n,m,$a(A)$,$\chi(\mathbb{R}A)$,$\varphi(A)$, см.[1, 9, 11, 12, 4], а также § 6. В настоящей работе вычисляются оставшиеся два инварианта тройки $(H^n(\mathbb{C}A;\mathbb{Z}),\mathrm{conj}^*,h_A)$, см. теоремы B и C ниже.

1.6. Определение двух инвариантов тройки $(H^n(\mathbb{C}A;\mathbb{Z}),\mathrm{conj}^*,h_A)$.

Положим

$$\tilde{a}(A) := \dim(H^0(C_2,H^n(\mathbb{C}A))) - \dim(H^1(C_2,H^n(\mathbb{C}A))). \tag{3}$$

В работе [8] приведено другое определение этого инварианта:

$2^{\tilde{a}(A)}$ — определитель формы индексов пересечения суженной на подгруппу элементов инвариантных относительно инволюции conj^* на группе $H^n(\mathbb{C}A;\mathbb{Z})$.

Положим

$$\delta_h(A)=\begin{cases}0, \text{ если } h_A=(1+\mathrm{conj}^*)u \text{ для}\\ \quad \text{некоторого } u\in H^n(\mathbb{C}A);\\ 1 \text{ в противном случае .}\end{cases} \tag{4}$$

В силу определения для нечетномерных гиперповерхностей $\delta_h=0$.

1.7. Теорема B. 1. *Если* $l(\mathbb{R}A)\geqslant[(n-1)/2]$, *то* $\tilde{a}(A)=a(A)$.

2. *Пусть* $l(\mathbb{R}A)<[(n-1)/2]$. *Тогда если* $m\equiv 0 \pmod 4$, *то* $\tilde{a}(A)=a(A)-2([(n-1)/2]-l(\mathbb{R}A))$; *если* $m\equiv 2\pmod 4$, *то*

$$\tilde{a}(A)=a(A)-\begin{cases}2[(n/2-l(\mathbb{R}A))/2], & \textit{если } n \textit{ четно};\\ (n-1)/2-l(\mathbb{R}A), & \textit{если } n \textit{ нечетно}.\end{cases}$$

1.7.1. Замечания к теореме B. 1. Если m нечетно, то число $l(\mathbb{R}A)$ равно n (см., например, [7]). Поэтому теорема B показывает, что число $a(A)-\tilde{a}(A)$ при любых фиксированных n и m определяется числом $l(\mathbb{R}A)$.

2. Утверждение теоремы для поверхностей и многообразий нечетной степени доказал В.М.Харламов, в его же работе [11] доказано неравенство $a(A)\geqslant n/2-l(\mathbb{R}A)$.

1.8. Теорема C. *Пусть n четно. Тогда если* $m\equiv 2\pmod 4$, *то*

$$\delta_h(A)=\begin{cases}0, & \textit{если } l(\mathbb{R}A)<n/2 \textit{ и } l(\mathbb{R}A)\equiv n/2-1\pmod 2;\\ 1, & \textit{в остальных случаях};\end{cases}$$

если $m\equiv 0\pmod 4$, *то*

$$\delta_h(A)=\begin{cases}0, & \textit{если } l(\mathbb{R}A)<n/2;\\ 1, & \textit{если } l(\mathbb{R}A)\geqslant n/2.\end{cases}$$

1.9. По-видимому, теоремы B и C, следовательно, и теорема A справедливы не только для гиперповерхностей, но и для полных пересечений в проективных пространствах, а возможно, и для более широкого класса многообразий.

В предварительных публикациях [5, 6] теоремы B и C были сформулированы неверно.

1.10. Следствия теорем B и C. Теоремы B и C показывают, что „комплексные" инварианты $\tilde{a}$ и δ_h на самом деле „вещественны", а „относительные" - l и δ_h „абсолютны". Точнее:

Следствие 1.1. *Пусть A,B — вещественные неособые гиперповерхности степени m в пространстве* $\mathbb{P}^{n+1}$.

1. *Пусть $\mathbb{R}A$ и $\mathbb{R}B$ изотопны в многообразии $\mathbb{R}P^{n+1}$ как гладкие подмногообразия. Тогда $\tilde{a}(A)=\tilde{a}(B)$ и $\delta_h(A)=\delta_h(B)$.*

2. *Пусть $n\geqslant 3$ и пространства $\mathbb{C}A$ и $\mathbb{C}B$ эквивариантно гомеоморфны. Тогда $l(\mathbb{R}A)=l(\mathbb{R}B)$ и $\delta_h(A)=\delta_h(B)$.*

Как объяснил автору В.М.Харламов, ограничение на размерность в утверждении 2 следствия существенно: среди поверхностей степени 4 в $\mathbb{R}P^3$ есть много пар поверхностей с эквивариантно гомеоморфными множествами комплексных точек и различными инвариантами. Например, есть две такие поверхности, множество вещественных точек которых гомеоморфно тору, причем у одной тор стягивается в $\mathbb{R}P^3$, а у другой — нет.

1.11. Следствия соотношений работы [8]. Для четномерного случая между уже упоминавшимися в п.1.4 10 инвариантами троек имеется большое число соотношений. Именно они являлись алгебраическим источником ограничений на топологию и расположение гиперповерхности, полученных в работах [9, 4, 11, 12]. Полностью эти соотношения выписаны в работе [8]. Пользуясь теоремами B и C, можно переписать их, используя только инварианты $l(\mathbb{R}A)$,$a(A)$,$\varphi(A)$,$\chi(\mathbb{R}A)$, и получить соотношения между последними. Получается несколько десятков соотношений между числами $l(\mathbb{R}A)$,$a(A)$,$\varphi(A)$,$\chi(\mathbb{R}A)$. Поскольку новые соотношения довольно громоздки, я ограничусь лишь некоторыми следствиями из них.

Предложение 1.2. *Для четномерной гиперповерхности степени* $m \equiv 0 \pmod 4$ *справедливы следующие утверждения:*

1) *если* $\delta_h(A) = 1$, *то* $a(A) = \tilde{a}(A)$;
2) $\tilde{a}(A) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $a(A) = 0$;
3) $\tilde{a}(A) = 1$ *тогда и только тогда, когда* $a(A) = 1$.

В каждом из этих трех случаев $L(H^*(\mathbb{C}A;\mathbb{Z}),\mathrm{conj}^*) = \{n/2\}$.

Пусть n четно. Положим

$$\delta_L = \begin{cases} 0, & \text{если форма на } H^n(\mathbb{C}A;\mathbb{Z}) \text{ четна ;} \\ 1, & \text{в противном случае .} \end{cases}$$

Через $\sigma(\mathbb{C}A)$ обозначим сигнатуру многообразия $\mathbb{C}A$.

Заметим, что и δ_L и σ однозначно определяются числами n и m.

Предложение 1.3. *Пусть A четномерная гиперповерхность в $\mathbb{P}^{n+1}$ степени* $m \equiv 2 \pmod 4$. *Тогда*

1) *если* $\varphi(A) = 0$, *то* $l(\mathbb{R}A) \equiv n/2 + \delta_L \pmod 2$;
2) *если* $\varphi(A) = 1$, *то* $l(\mathbb{R}A) \equiv n/2 - 1 + \delta_L \pmod 2$.

Следующее предложение обобщает некоторые сравнения для эйлеровой характеристики множества вещественных точек из работ [11] и [4].

Предложение 1.4. *Пусть A — четномерная гиперповерхность в $\mathbb{P}^{n+1}$ степени m. Тогда*

1. *Если* $m \equiv \pm 2 \pmod 8$, $a(A)$ *нечетно,* $a(A) = n/2 - l(\mathbb{R}A)$, *то* break$\chi(\mathbb{R}A) \equiv \sigma(\mathbb{C}A) \mp 2 \pmod{16}$.

2. *Если* $m \equiv \pm 2 \pmod 8$,$a(A)$ *четно,* $a(A) = n/2 - l(\mathbb{R}A) + 1$, *то* $\chi(\mathbb{R}A) \equiv \sigma(\mathbb{C}A)$, $\sigma(\mathbb{C}A) \mp 4 \pmod{16}$.

3. *Если* $m \equiv 0 \pmod 8$, $l(\mathbb{R}A) < n/2$,$a(A) = n - 2l(\mathbb{R}A)$, *то* $\chi(\mathbb{R}A) \equiv \sigma(\mathbb{C}A) \pmod{16}$.

4. *Если* $m \equiv 0 \pmod 8$, $l(\mathbb{R}A) < n/2$,$a(A) = n - 2l(\mathbb{R}A) + 1$, *то* $\chi(\mathbb{R}A) \equiv \sigma(\mathbb{C}A) \pm 2 \pmod{16}$.

Доказательства предложений 1.2, 1.3, 1.4 и теоремы A будут даны в § 6, доказательства теорем B и C, следствия 1.1 будут даны в § 5.

1.12. План статьи.

1.12.1. В § 2 построен удобный вариант спектральной последовательности инволюции (теорема 2.1). Пусть X — конечное клеточное пространство с инволюцией, т.е. с действием группы C_2. Пусть

$$X_{C_2} \to BC_2 \tag{5}$$

— расслоение со слоем X, ассоциированное с классифицирующим расслоением группы C_2. Спектральная последовательность Серра расслоения (5) — весьма популярный инструмент исследования действия группы C_2 на пространстве X (см., например, [10]). Как известно, $H^*(BC_2) = \mathbb{Z}/2[t]$. Значит, для каждого $r \geqslant 1$, член E_r^{**} этой спектральной последовательности является биградуированной $\mathbb{Z}/2[t]$-алгеброй. Для $i > \dim X$ умножение на t задает изоморфизм $E_r^{i,*} \to E_r^{i+1,*}$. Поэтому $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$-градуированную спектральную последовательность E^{**} можно „свернуть" по первому индексу и получить $\mathbb{Z}$-градуированную спектральную последовательность E_{r-1}^*. Можно показать, что первоначальная спектральная последовательность восстанавливается по спектральной последовательности E_r^* (в настоящей работе этот факт не потребуется). Член E_∞^* новой спектральной последовательности присоединен к кольцу $H^*(F)$, где F — множество неподвижных точек инволюции, относительно некоторой естественной фильтрации. Эта фильтрация является нетривиальным и содержательным инвариантом инволюции: для гладких многообразий она связана с классами Штифеля–Уитни нормального расслоения множества неподвижных точек, для многих инволюций (см., например, лемму 3.6) фильтрация связана с квадратами Стинрода и обладает еще некоторыми полезными свойствами. Все это в настоящей работе не потребуется, и автор намеревается опубликовать отдельную работу, посвященную этим вопросам. В этой же работе основные вычисления проводятся при помощи спектральной последовательности инволюции, а вычисления самой спектральной последовательности инволюции проводятся при помощи этой фильтрации.

1.12.2. В § 3 изучается спектральная последовательность инволюции комплексного сопряжения на многообразии $\mathbb{C}A$. Гомоморфизм включения $H^i(\mathbb{C}P^{n+1}) \to H^i(\mathbb{C}A)$ является изоморфизмом для $i < n$, и спектральная последовательность E_r^* для пространства $\mathbb{C}P^{n+1}$ вырождается. Из этого в силу естественности следует, что для нахождения члена $E_\infty^*(\mathbb{C}A)$ достаточно найти вышеупомянутую фильтрацию кольца когомологий множества неподвижных точек инволюции на пространстве $\mathbb{C}P^{n+1}$,т.е. фильтрацию кольца $H^*(\mathbb{R}P^{m+1})$. Это центральное вычисление параграфа (лемма 3.6). В итоге вычисляется член $E_\infty^*(\mathbb{C}A)$ и находятся необходимые и достаточные условия вырождения спектральной послеодовательности $E_r^*(\mathbb{C}A)$.

1.12.3. Для доказательства теорем B и C необходимо вычислить спектральную последовательность инволюции на пространстве $\mathbb{C}P^{n+1} \backslash \mathbb{C}A$. Чтобы провести это вычисление по схеме § 3, нужно найти начальные члены фильтрации кольца $H^*(\mathbb{R}P^{n+1} \backslash \mathbb{R}A)$, а для этого достаточно построить стандартное (например, для всех гиперповерхностей) пространство X с инволюцией, содержащее $\mathbb{C}P^{n+1} \backslash \mathbb{C}A$, такое, что гомоморфизм включения $H^i(X) \to H^i(\mathbb{C}P^{n+1} \backslash \mathbb{C}A)$ изоморфизм для $i < n+1$. Такое пространство построить не удается. Приходится строить пространство Y (зависящее от гиперповерхности), содержащее $\mathbb{C}P^{n+1} \backslash \mathbb{C}A$, и некоторое стандартное (не зависящее от A) подпространство X пространства Y. Разумеется, все пространства — с инволюциями — и включения эквивариантны. От пространств X,Y и соответствующих включений требуется, чтобы гомоморфизмы включения $H^i(Y) \to H^i(\mathbb{C}P^{n+1} \backslash \mathbb{C}A)$, $H^i(Y) \to H^i(X)$, $H^i(FY) \to H^i(FX)$ были изоморфизмами для $i < n+1$,(здесь FX и FY множества неподвижных точек соответствующих пространств). Это построение производится в § 4. Оно основано на стабилизации когомологий множества неподвижных точек при итерациях взятия m-листного разветвленного накрытия комплексного пространства с ветвлением над гиперповерхностью (предложение 4.4).

В качестве X и Y берутся дополнения комплексных точек гиперповерхностей в

$(2k+1)$- и $(n+2k+2)$-мерных проективных пространствах, задаваемых уравнениями

$$x_0^m + \cdots + x_k^m - x_{k+1}^m - \cdots - x_{2k+1}^m = 0,$$
$$f(y_0, \ldots, y_{n+1}) + x_0^m + \cdots + x_k^m - x_{k+1}^m - \cdots - x_{2k+1}^m = 0$$

соответственно, где $f = 0$ — уравнение, задающее гиперповерхность A, $\{x_i\}$ и $\{y_j\}$ — независимые переменные, $k \geqslant n$.

1.12.4. В § 5 по схеме § 3 вычисляется спектральная последовательность инволюции пространства $\mathbb{C}P^{n+1} \setminus \mathbb{C}A$, что позволяет вычислить $\dim(H^*(\mathbb{R}P^{n+1} \setminus \mathbb{R}A))$. Это число в силу двойственности можно выразить через $\dim(H^*(\mathbb{R}A))$. В свою очередь число $\dim(H^*(\mathbb{R}A))$ известно из вычислений § 3. Сравнивая эти выражения, получаем теоремы B и C.

1.12.5. В § 6 доказывается теорема A. Сначала дается определение инвариантов тройки $(H^n(\mathbb{C}A; \mathbb{Z}), \mathrm{conj}^*, h_A)$(см.[8]).

Для нечетномерного случая сформулирован подходящий вариант известной теоремы о классификации кососимметричных форм, из которого, теорем B и C и ряда результатов работ [1, 9] вытекает теорема A.

В четномерном случае этими инвариантами определяются однозначно тройки, удовлетворяющие некоторому условию (см. теорему 6.2). Основная деятельность в § 6 связана с проверкой этого условия для проективных гиперповерхностей, удовлетворяющих условию (∗). Это делается при помощи теории Ходжа. Далее теорема A доказывается так же, как и в нечетномерном случае.

§ 2. Спектральная последовательность инволюции

Теорема 2.1. *Пусть X — клеточное пространство размерности n с инволюцией T и множеством неподвижных точек F. Тогда существуют*

фильтрация кольца $H^*(F)$

$$0 = \mathcal{F}^{-1}(X) \subset \mathcal{F}^0(X) \subset \cdots \subset \mathcal{F}^n(X) = H^*(F); \tag{6}$$

$\mathbb{Z}$-градуированная спектральная последовательность

$$(E_r^*(X), d_r^*(X)), \quad \text{где} \quad d_r^i(X) : E_r^i(X) \to E_r^{i-r}(X); \tag{7}$$

изоморфизмы

$$\varphi_i : \mathcal{F}^i(X)/F^{i-1}(X) \to \mathcal{E}_\infty^i(X); \tag{8}$$

$\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}$ — градуированная спектральная последовательность

$$(E_r^{**}(X), d_r^{**}(X)), \quad \text{где} \quad d_r^{ji}(X) : E_r^{ji}(X) \to E_r^{j-r+1, i-r}(X); \tag{9}$$

морфизм спектральных последовательностей

$$\psi_i : E_r^{0,i}(X) \oplus E_r^{1,i}(X) \to E_r^i(X); \tag{10}$$

такие, что

$$1. \qquad E_1^i(X) = H^1(C_2; H^i(X)); \tag{11}$$

$$E_1^{0,i}(X) = H^2(C_2 H^i(X; \mathbb{Z})), \quad E_1^{1,i}(X) = H^1(C_2, H^i(X; \mathbb{Z})). \tag{12}$$

2. *Спектральные последовательности* (7) *и* (9), *фильтрация* (6), *гомоморфизмы* (8), (10) *естественны относительно эквивариантных отображений.*

3. *Спектральные последовательности мультипликативны, умножение в члене E_1 индуцировано умножением в $H^*(X)$ и $H^*(X; \mathbb{Z})$, фильтрация* (6) *мультипликативна (т.е. если $x \in \mathcal{F}^i(X), y \in \mathcal{F}^j(X)$, то $xy \in \mathcal{F}^{i+j}(X)$), гомоморфизмы* (8), (10) *сохраняют умножения.*

4. *Если группа $H^*(X; \mathbb{Z})$ не содержит 2-кручения, то ψ^* — изоморфизм.*

Замечание 2.2. Как известно,

$$H^*(C_2;\mathbb{Z}/2)=\mathbb{Z}/2[x], \deg x=1;$$
$$H^*(C_2;\mathbb{Z})=\mathbb{Z}[y]/2y, \deg y=2.$$

Умножение на y (на x соответственно) дает нам изоморфизм $H^i(C_2,V)\to H^{i+2}(C_2,V)(H^i(C_2,V)\to H^{i+1}(C_2V)$ соответственно), где V — конечно-порожденный $\mathbb{Z}$-модуль ($\mathbb{Z}/2$ — модуль соответственно) с инволюцией, а i — положительное число. Поэтому в (12) (в (11) соответственно) существенна только четность и положительность (положительность соответственно) числа i.

Доказательство теоремы. Пусть $(E_r^{i,j}(K),\ d_r^{i,j}(K))$ — спектральная последовательность Серра расслоения (5) с коэффициентами в кольце K.

Кольца $H^*(X_{C_2};K)$, $E_r^{**}(K)$ — градуированные алгебры над $H^*(C_2;K)$.

Обозначим через $E_r^i(X)$, $E_r^{j,i}(x)$, где $i\in\mathbb{Z}, j=0$ или 1, — прямые пределы систем

$$E_{r+1}^{0,i}(\mathbb{Z}/2)\overset{\smile x}{\to}\ldots\overset{\smile x}{\to}E_{r+1}^{k,i}(\mathbb{Z}/2)\overset{\smile x}{\to}\ldots \tag{13}$$
$$E_{r+1}^{j,i}(\mathbb{Z})\overset{\smile x}{\to}\ldots\overset{\smile x}{\to}E_{r+1}^{2k+j,i}(\mathbb{Z})\overset{\smile x}{\to}\ldots \tag{14}$$

Через $d_r^i(X), d_r^{j,i}(X)$ обозначим соответствующие пределы гомоморфизмов систем (13), (14):

$$d_r^i(X):=\varinjlim_k d_{r+1}^{k,i}(\mathbb{Z}/2),\qquad d_r^{j,i}(X):=\varinjlim_k d_{r+1}^{2k+j,i}(\mathbb{Z}).$$

В $H^*(C_2,\mathbb{Z}/2)$–алгебре $H^*(X_{C_2})$ имеется фильтрация однородными идеалами

$$H^*(X_{C_2})=\mathcal{F}_0^l\supset\mathcal{F}_1^l\supset\ldots,$$

и существуют канонические изоморфизмы

$$\varphi_{ij}:(\mathcal{F}_r^l\cap H^{i+j}(X_{C_2}))/(\mathcal{F}_{i+1}^l\cap H^{i+j}(X_{C_2}))\to E_\infty^{ij}(\mathbb{Z}/2).$$

Очевидно, что $x\smile\mathcal{F}_i^l\subset\mathcal{F}_{i+1}^l$ и $\varphi_{i+1,j}(x\smile -)=x\smile\varphi_{ij}(-)$.

Положим

$$\mathcal{F}^j(X):=\varinjlim_i\mathcal{F}_i^l\cap H^{i+j}(X_{C_2}),$$
$$\varphi_j=(\varinjlim_i\varphi_{ij}):\varinjlim_i((\mathcal{F}_i^l\cap H^{i+j}(X_{C_2}))/(\mathcal{F}_{i+1}^l\cap H^{i+j}(X_{C_2})))\to E_\infty^j(X),$$

где пределы берутся по прямой системе:

$$\mathcal{F}_0^l\cap H^j(X_{C_2})\overset{\smile x}{\to}\ldots\overset{\smile x}{\to}\mathcal{F}_i^l\cap H^{i+j}(X_{C_2})\overset{\smile x}{\to}\ldots$$

В силу точности функтора $\varinjlim$ наборы комплексов $(E_r^*(X),d_r^*(X))$ и $(E_r^{**}(X),d_r^{**}(X))$ являются спектральными последовательностями, а последовательность

$$0\to\mathcal{F}^{j-1}(X)\to\mathcal{F}^j(X)\to\varinjlim_i((\mathcal{F}_i^l\cap H^{i+j}(X_{C_2}))/(\mathcal{F}_{i+1}^l\cap H^{i+j}(X_{C_2})))\to 0$$

точна для каждого j. Значит, $\cdots\subset\mathcal{F}^j\subset\mathcal{F}^{j+1}\subset\ldots$ — фильтрация кольца $\varinjlim_i H^i(X_{C_2})$ и $\varphi_j:\mathcal{F}^j(X)/\mathcal{F}^{j-1}(X)\to E_\infty^j(X)$ — изоморфизм, что в свою очередь влечет стабилизацию: $\mathcal{F}^n(X)=\mathcal{F}^{n+1}(X)=\ldots$ (так как для $j>n$ группа $E_\infty^j(X)$ тривиальна).

С другой стороны, $\mathcal{F}_i^l\subset H^{\geqslant i}(X_{C_2})$, следовательно, $\mathcal{F}^j(X)=0$ для $j<0$.

Рассмотрим на пространстве F тождественную инволюцию. Вложение
$$F \xrightarrow{\text{in}} X \tag{15}$$
эквивариантно. Следовательно, оно индуцирует вложение $F_{C_2} \to X_{C_2}$. По теореме Бореля (см. [2]) для $i > n$ гомоморфизм включения $\text{in}^* : H^i(X_{C_2}) \to H^i(F_{C_2})$ — изоморфизм, значит, $\varinjlim(H^i(X_{C_2})) \to \varinjlim(H^i(F_{C_2}))$ — изоморфизм. Так как $F_{C_2} = F \times BC_2$, из формулы Кюннета следует, что $H^i(F_{C_2}) = H^*(F)$. Значит, $H^*(F) = \varinjlim(H^i(X_{C_2}))$. Тем самым, фильтрация (6), спектральные последовательности (7), (9), изоморфизм (8) построены.

Построим гомоморфизм (10). Для этого рассмотрим композицию
$$\psi_{ij} : E_r^{2i,j}(\mathbb{Z}) \oplus E_r^{2i-1,j}(\mathbb{Z}) \to E_r^{2i,j}(\mathbb{Z}/2) \oplus E_r^{2i-1,j}(\mathbb{Z}/2) \to E_r^{2i}(\mathbb{Z}/2),$$
где первый гомоморфизм коэффициентный, а второй $(a,b) \mapsto (a + x \smile b)$. Эта композиция — морфизм спектральных последовательностей. По построению
$$\psi_{i+2,j}(y \smile a, y \smile b) = x^2 \smile \psi_{ij}(a,b).$$
Это позволяет перейти к пределу по прямым системам (13), (14). Положим $\psi_j := \varinjlim \psi_{ij}$. Пусть $H^*(X;\mathbb{Z})$ не имеет 2–кручения. Очевидная проверка показывает, что ψ_{ij} изоморфизм в члене E_2, а значит, ψ_j — изоморфизм. Утверждение 4 доказано.

Утверждение 1 сразу следует из выражения для E_2–члена спектральной последовательности Серра расслоения (5).

Все конструкции естественны и сохраняют умножения, что и доказывают утверждения 2 и 3. •

Предложение 2.3. *Если* $\dim(H^*(X)) = \dim(H^*(F)) < +\infty$, *то* $E_\infty^*(X) = E_1^*(X) = H^*(X)$, *и спектральная последовательность вырождается.* •

Предложение 2.4. 1. $\mathcal{F}^i(X) \subset H^{\leqslant i}(F)$.

2. *Если* X *связно и* $F \neq 0$, *то* $\mathcal{F}^0(X) = \langle 1_{H^*(F)} \rangle$.

Доказательство. 1. Рассмотрим отображение $F_{C_2} \xrightarrow{\text{in}} X_{C_2}$, индуцированное вложением (15). Гомоморфизм $\text{in}^* = \text{id}_{H^*(F)} : H^*(F) \to H^*(F)$ переводит $\mathcal{F}^i(X)$ в $\mathcal{F}^i(F)$, т.е. $\mathcal{F}^i(X) \subset \mathcal{F}^i(F)$.

С другой стороны, $F_{C_2} = F \times BC_2$ и из формулы Кюннета следует, что $\mathcal{F}^i(F) = H^{\leqslant i}(F)$.

2. Постоянное отображение $p : X \to *$ эквивариантно. Индуцированный гомоморфизм $(p|_F)^* : H^*(*) \to H^*(F)$ переводит 1 в 1. Очевидно, что $\mathcal{F}^0(*) = H^*(*) = \mathbb{Z}/2$ и $p^*(\mathcal{F}^0(*)) \subset \mathcal{F}^0(X)$. С другой стороны, $\dim H^0(X) = 1$, следовательно, $\dim \mathcal{F}^0(X) \leqslant 1$. •

Предложение 2.5. (*см.*[1]). *Если* X *— связное пространство с* n*–мерной двойственностью Пуанкаре, то для* $1 \leqslant r \leqslant +\infty$ *кольцо* $E_r^*(X)$ *удовлетворяет* n*–мерной двойственности Пуанкаре (т.е. если* $E_r^n(X) = \mathbb{Z}/2$, *то спаривание* $E_r^k(X) \otimes E_r^{n-k}(X) \to E_r^n(X)$ *невырождено для* $0 \leqslant k \leqslant n$, *а если* $E_r^n(X) \neq \mathbb{Z}/2$, *то* $E_r^i(X) = 0$ *для всех* i *и* $F = \varnothing$). •

В следующих параграфах потребуется лемма, используемая в доказательстве предложения 2.5.

Лемма 2.6. *Пусть* X *удовлетворяет условиям теоремы* 2.1, *пусть* $a \in E_r^{i+r}(X)$, $b \in E_r^{n-i}(X)$ *таковы, что* $b \cdot d_r(a) \neq 0$. *Тогда* $d_r(b) \neq 0$.

Доказательство. Пусть $d_r(b) = 0$, тогда $b \cdot d_r(a) = d_r(ab) \neq 0$, но $\deg(ab) = n + r > n$. Получено противоречие. •

§ 3. Спектральная последовательность $E_r^*(\mathbb{C}A)$

Рассмотрим пространство $\mathbb{C}P^{n+1}$ с инволюцией conj. Из предложения 2.3 и из равенства $\dim(H^*(\mathbb{C}P^{n+1})) = \dim(H^*(\mathbb{R}P^{n+1}))$ следует, что спектральная последовательность $E_r^*(\mathbb{C}P^{n+1})$ вырождается. Многообразие $\mathbb{C}A$ — подмногообразие многообразия $\mathbb{C}P^{n+1}$, поэтому на кольцах $H^*(\mathbb{C}A)$ и $E_r^*(\mathbb{C}A)$ есть естественные структуры $H^*(\mathbb{C}P^{n+1})$–алгебр (напомним, что $H^*(\mathbb{C}P^{n+1}) = \mathbb{Z}/2[y]/y^{n+2}, \deg y = 2$). Эти структуры будут использоваться в этом и в следующем параграфах.

Предложение 3.1. *Пусть дифференциал $d_r^i : E_r^i(\mathbb{C}A) \to E_r^{i-r}(\mathbb{C}A)$ ненулевой. Тогда*

1. $i \geqslant n, \quad i - r \leqslant n.$
2. *Если* $i = n$ ($i = n + r$ *соответственно*), *то* $d_r^{n+r} \neq 0$, $d_r^n \neq 0$ (*соответственно*).
3. *Если* $i > n$ *и* $i - r < n$, *то* $r \equiv 2 \pmod 4$.

Доказательство. Легко вычислить структуру $\mathbb{Z}/2[y]/y^{n+2}$–модуля на $H^*(\mathbb{C}A)$ в размерностях, отличных от n:

$$H^j(\mathbb{C}A) = \begin{cases} \langle y^{j/2} \cdot 1 \rangle, & \text{если} \quad j \in 2\mathbb{Z} \cap [0, n-1]; \\ \langle y^{[(j-n-1)/2]} z \rangle, & \text{если} \quad j \in 2\mathbb{Z} \cap [n+1, 2n]; \\ 0, & \text{для остальных} \quad j \neq n. \end{cases} \tag{16}$$

Здесь z — образующая группы $H^{2[n/2+1]}(\mathbb{C}A)$. Отсюда следует, что $i \geqslant n$. Пусть $i - r > n$, тогда существуют такие $a \in E_r^i(\mathbb{C}A) \setminus \{0\}$ и $b \in \mathbb{Z}/2[y]/y^{n+2}$, что $a = bd_r(a)$. Но тогда $a = b(d_r(b \cdot d_r(a))) = 0$. Противоречие. Утверждение 1 доказано.

Утверждение 2 — частный случай леммы 2.6.

Пусть $i > n$ и $i - r < n$. В силу теоремы 2.1 гомоморфизм $\psi_* : E_r^{0,*}(\mathbb{C}A) \oplus E_r^{1,*}(\mathbb{C}A) \to E_r^*(\mathbb{C}A)$ — изоморфизм, и степень дифференциала d_r относительно $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}$–градуировки равна $(1, -r)$. Из (16) следует, что для $i \neq n$

$$E_1^{ji}(\mathbb{C}A) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2, & \text{если } i \in 2\mathbb{Z} \cap [0, 2n] \setminus \{n, j\} \equiv i/2 \pmod 2) \\ 0 & \text{для остальных } i \neq n, \quad j \in \mathbb{Z}/2. \end{cases}$$

Следовательно, $(i/2) + 1 \equiv (i - r)/2 \pmod 2$, значит, $r \equiv 2 \pmod 4$. •

Следствие 3.2. *Для любого $0 \leqslant r \leqslant +\infty$ существуют $l_r \in 2\mathbb{Z}$ и $z_r \in E^{2n-l_r}(\mathbb{C}A)$ такие, что в размерностях, отличных от n,*

$$E_r^j(\mathbb{C}A) = \begin{cases} \langle y^{j/2} \cdot 1 \rangle, & \textit{если} \quad j \in 2\mathbb{Z} \cap [0, l_r]; \\ \langle y^{(j+l_r)/2-n} z_r \rangle, & \textit{если} \quad j \in 2\mathbb{Z} \cap [2n - l_r, 2n]; \\ 0, & \textit{для остальных } j \neq n. \end{cases}$$ •

Удобно связать со спектральной последовательностью $E_r^*(\mathbb{C}A)$ следующие множества, индексирующие ненулевые дифференциалы:

$$D_1(A) = \{i \in \mathbb{N} / \exists r > 0 \quad \text{такое, что} \quad i < n + r \quad \text{и} \quad d_r^i(\mathbb{C}A) \neq 0\};$$
$$D_2(A) = \{i \in \mathbb{N} / \exists r > 0 \quad \text{такое, что} \quad i = n + r \quad \text{и} \quad d_r^i(\mathbb{C}A) \neq 0\}.$$

По множествам D_1 и D_2 все индексы ненулевых дифференциалов спектральной последовательности $E_r^*(\mathbb{C}A)$ не восстанавливаются, но для доказательства теорем B и C достаточно знать мощность этих множеств. Информация о самих множествах D_1 и D_2, а не об их мощностях будет полезна в следующих параграфах.

Так как множества D_1 и D_2 индексируют все ненулевые дифференциалы и $\dim(H^i(\mathbb{C}A)) \leqslant 1$ для $i \neq n$ имеем

Следствие 3.3. $a(A) - \tilde{a}(A) - \mathrm{Card}D_1(A) + 2\mathrm{Card}D_2(A)$. •

Предложение 3.4. 1. *Если* $l(\mathbb{R}A) \geqslant [(n-1)/2]$, *то* $D_1(A) = D_2(A) = \varnothing$, *т.е. спектральная последовательность* $E_r^*(\mathbb{C}A)$ *вырождается.*

2. *Если* $l(\mathbb{R}A) < [(n-1)/2]$, *то*

$$D_1(A) \cup D_2(A) = 2\mathbb{Z} \cap [n+1, 2(n - l(\mathbb{R}A) - 1)].$$

Следствие 3.5. *Если* $l(\mathbb{R}A) \leqslant [(n-1)/2]$, *то*

$$\mathrm{Card}D_1(A) + \mathrm{Card}D_2(A) = [(n-1)/2] - l(\mathbb{R}A). \quad \bullet$$

Доказательство предложения. Вычислим фильтрацию (6) кольца когомологий множества неподвижных точек инволюций conj на $\mathbb{C}P^q$.

Лемма 3.6. $\mathcal{F}^i(\mathbb{C}P^q) = \mathrm{Sq}(H^{\leqslant[i/2]}(\mathbb{R}P^q))$.

Доказательство леммы. Напомним, что спектральная последовательность $E_r^*(\mathbb{C}P^q)$ вырождается. Как известно, $H^*(\mathbb{R}P^q) = \mathbb{Z}/2[x]/x^{q+1}$, где $\deg x = 1$. В силу предложения 2.5 $\mathcal{F}^0(\mathbb{C}P^q) = \mathcal{F}^1(\mathbb{C}P^q) = \langle 1_{H^*(\mathbb{R}P^q)}\rangle$ и можно считать, что $\mathcal{F}^2(\mathbb{C}P^q) = \langle 1, \alpha x + \beta x^2\rangle$, где α и β — какие-то элементы поля $\mathbb{Z}/2$. Найдем их.

В силу утверждения 3 теоремы 2.1 степени элемента $(\alpha x + \beta x^2)$ аддитивно порождают всю группу $H^*(\mathbb{R}P^q)$. Значит, $\alpha = 1$, так как в противном случае $x \equiv p(x^2) (\mathrm{mod}\, x^{q+1})$, где $p(x)$ — какой-то многочлен, что, очевидно, невозможно. В силу утверждения 2 теоремы 2.1, примененного к эквивариантному отображению $\mathrm{in} : \mathbb{R}P^q \to \mathbb{C}P^q$, следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{F}^2(\mathbb{C}P^q)/\mathcal{F}^1(\mathbb{C}P^q) & \xrightarrow{\mathrm{in}^*} & \mathcal{F}^2(\mathbb{R}P^q)/\mathcal{F}^1(\mathbb{R}P^q) & = & H^2(\mathbb{R}P^q) \\
\downarrow{\scriptstyle \varphi_2} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_2} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_2} \\
E^2_\infty(\mathbb{C}P^q) & \xrightarrow{\mathrm{in}^*} & E^2_\infty(\mathbb{R}P^q) & = & H^2(\mathbb{R}P^q)
\end{array}$$

Значит, $\mathrm{in}^*\overline{(x+\beta x^2)} = \overline{\beta x^2}$ (здесь $\overline{x+\beta x^2}$ и $\overline{\beta x^2}$ — образы соответствующих элементов в $\mathcal{F}^2/\mathcal{F}^1$). С другой стороны, $\mathrm{in}^* : H^2(\mathbb{C}P^q) \to H^2(\mathbb{R}P^q)$ — изоморфизм, следовательно, $\beta x^2 \neq 0$, поэтому $\mathcal{F}^2(\mathbb{C}P^q) = \langle 1, \mathrm{Sq}(x)\rangle = \mathrm{Sq}(H^{\leqslant 1}(\mathbb{R}P^q))$.

Утверждение леммы следует теперь из мультипликативности операции Sq и фильтрации $\{\mathcal{F}^i\}$. •

Покажем, что

$$\mathcal{F}^i(\mathbb{C}A) = \mathrm{in}^*(\mathcal{F}^i(\mathbb{C}P^{n+1})), \text{ если } i < n/2. \tag{17}$$

Для указанных i гомоморфизм $\mathrm{in}^* : H^i(\mathbb{C}P^{n+1}) \to H^i(\mathbb{C}A)$ — изоморфизм, значит, $\mathrm{in}^* : E^i_\infty(\mathbb{C}P^{n+1}) \to E^i_\infty(\mathbb{C}A)$ — эпиморфизм. Теперь (17) следует из общих теорем о фильтрированных модулях (см., например, [2]).

В силу леммы 3.6 для $i < n/2$ имеем

$$\begin{gathered}
E^i_\infty(\mathbb{C}A) = \mathcal{F}^i(\mathbb{C}A)/\mathcal{F}^{i-1}(\mathbb{C}A) = \\
= \mathrm{Sq}(\mathrm{in}^*(H^{\leqslant[i/2]}(\mathbb{R}P^{n+1})))/\mathrm{Sq}(\mathrm{in}^*(H^{\leqslant[(i-1)/2]}(\mathbb{R}P^{n+1}))) = \\
= \mathrm{in}^*(H^{\leqslant[i/2]}(\mathbb{R}P^{n+1}))/\mathrm{in}^*(H^{\leqslant[(i-1)/2]}(\mathbb{R}P^{n+1})).
\end{gathered}$$

Пусть i четно. Из вышеприведенных равенств следует, что $E^i_\infty(\mathbb{C}A) \neq 0$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{in}^*(x^{i/2}) \neq 0$, т.е. когда $l(\mathbb{R}A) \geqslant i/2$. Отсюда и из следствия 3.2 вытекает утверждение предложения. •

§ 4. Стабилизация

Пусть неособая гиперповерхность A задана в $\mathbb{P}^q$ уравнением $f(x_0,\dots,x_q)=0$, где f — однородный вещественный многочлен степени m. В этом параграфе число m предполагается четным. Обозначим через A^+ (или A^{+1}) многообразие, заданное в $\mathbb{P}^{q+1}$ уравнением $f+x_{q+1}^m=0$ (безусловно, эта операция зависит от выбора многочлена f), а через $A^{+(k+1)}$ обозначим $(A^{+k})^+$.

Положим

$$N(A)=\{(x_0:x_1:\dots:x_q)\in\mathbb{R}P^q|f(x_0,\dots,x_q)\leqslant 0\};$$
$$P(A)=\{(x_0:x_1:\dots:x_q)\in\mathbb{R}P^q|f(x_0,\dots,x_q)\geqslant 0\}.$$

Если $\mathbb{R}A$ непусто, то $N(A)$ и $P(A)$ — q-мерные многообразия с краем $\mathbb{R}A$.

Из последовательности Майера–Виеториса триады $(N(A),P(A),\mathbb{R}A)$ вытекает

Лемма 4.1. $\min\{l(N(A),l(P(A))\}=l(\mathbb{R}A)$;$\max\{l(N(A)),l(P(A))\}=q-1-l(\mathbb{R}A)$. •

Следствие 4.2. $l(\mathbb{R}A)\leqslant(q-1)/2$. •

Через $p_k:\mathbb{R}A^{+k}\to\mathbb{R}P^q$ обозначим проекцию

$$(x_0;\dots;x_8:\ldots:x_{q+k})\mapsto(x_0:\ldots:x_q). \tag{18}$$

Образ проекции содержится в $N(A)$, поэтому обычно через p_k будем обозначать отображение $\mathbb{R}A^{+k}\to N(A)$. Соответствие (18) определяет также отображение $p_k:N(A^{+k}\to N(A)$. (заметим, что центр проекции (18) не пересекается с $N(A^{+k})$).

Лемма 4.3. $p_k:N(A^{+k})\to N(A)$ — *гомотопическая эквивалентность.*

Доказательство. $N(A)$ — подпространство пространства $N(A^{+k})$, поэтому p_k — ретракция. На самом деле, p_k — деформационная ретракция. Стягивающее отображение задается формулой

$$((x_0:\ldots:x_{q+k}),t\mapsto((x_0:\ldots:x_q:tx_{q+1}:\ldots:tx_{q+k}),$$

где $t\in[0,1]$. Очевидно, для любого t точка $(x_0:\ldots:x_q:tx_{q+1}:\ldots:tx_{q+k})$ принадлежит $N(A^{+k})$. •

Предложение 4.4. *Гомоморфизм включения* $H^i(N(A^{+k}))\to H^i(\mathbb{R}A^{+k})$ — *изоморфизм для* $i\leqslant k-1$.

Доказательство. Как отмечалось выше, $N(A^{+k})$ — $(q+k)$-мерное многообразие с краем $\mathbb{R}A^{+k}$. В силу леммы 4.3 для $i\geqslant 0$ группа $H_{q+i}(N(A^{+k}))$ нулевая. Из двойственности Александера–Понтрягина вытекает $H^j(N(A^{+k}),\mathbb{R}A^{+k})=0$ для $j\leqslant k$. Утверждение предложения следует теперь из точной последовательности пары $(N(A^{+k}),\mathbb{R}A^{+k})$.

Следствие 4.5. *Для каждого i последовательность групп и гомоморфизмов включения* $H^i(\mathbb{R}A)\leftarrow H^i(\mathbb{R}A^{+1})\leftarrow\dots$ *стабилизируется на* $(i+1)$*-м шаге и* $\varprojlim_k H^i(\mathbb{R}A^{+k})=H^i(N(A))$.

Доказательство следует из коммутативности соответствующих диаграмм и предложения 4.4. •

Следствие 4.6. *Для $i \leqslant k-1$ гомоморфизм включения $H^i(\mathbb{R}P^{q+k}) \to H^i(P(A^{+k}))$ — изоморфизм.*

Доказательство следует из последовательности Майера–Виеториса триады $(N(A^{+k}),\ P(A^{+k}),\ \mathbb{R}A^{+k})$ и предложения 4.4. •

Следствие 4.7. *Пусть гиперповерхность B задана в $\mathbb{P}^{q+2k}$ уравнением $f + x^m_{q+1} + \cdots + x^m_{q+k} - x^m_{q+k+1} - \cdots - x^m_{q+2k} = 0$. Тогда для всех $i \leqslant k-1$ гомоморфизмы включения*

$$H^i(\mathbb{R}P^{q+2k}) \to H^i(\mathbb{R}B), \tag{19}$$

$$H^i(\mathbb{R}P^{q+2k}) \to H^i(N(B)), \tag{20}$$

$$H^i(\mathbb{R}P^{q+2k}) \to H^i(P(B)). \tag{21}$$

— изоморфизмы.

Доказательство. В силу следствия 4.6 гомоморфизм включения $H^i(\mathbb{R}P^{q+k}) \to H^i(P(A^{+k}))$ — изоморфизм для $i \leqslant k-1$. Рассмотрим гиперповерхность C, заданную в $\mathbb{R}P^{q+k}$ уравнением $-f - x^m_{q+1} - \cdots - x^m_{q+k} = 0$. Очевидно, что $C = A^{+k}$, $P(A^{+k}) = N(C)$ и $B = C^{+k}$. Из предложения 4.4 следует биективность гомоморфизма (19). Отсюда и из последовательности Майера–Виеториса триады $(N(B),P(B),\mathbb{R}B)$ следует биективность гомоморфизмов (20), (21). •

§ 5. Спектральная последовательность $E^*_r(\mathbb{C}P^{n+1} \setminus \mathbb{C}A)$

Как и в § 4 число m предполагается четным. Многообразие A есть гиперплоское сечение многообразия A^+. В силу теоремы Лефшица пространство $\mathbb{C}A^+ \setminus \mathbb{C}A$ гомотопически эквивалентно букету $(n+1)$–мерных сфер, поэтому $P : \mathbb{C}A^+ \setminus \mathbb{C}A \to \mathbb{C}P^{n+1} \setminus \mathbb{C}A$ —универсальное накрытие. Следовательно, $\pi_1(\mathbb{C}P^{n+1} \setminus \mathbb{C}A) = C_m$, и каноническое отображение $\varphi : \mathbb{C}P^{n+1} \setminus \mathbb{C}A \to K(C_m;1)$ индуцирует изоморфизм в когомологиях в размерностях, меньших $n+1$, мономорфизм в размерности $n+1$, а также делает кольцо $H^*(\mathbb{C}P^{n+1} \setminus \mathbb{C}A)$–алгеброй над кольцом $H^*(C_m;\mathbb{Z}/2)$.

Как известно,

$$H^*(C_m;\mathbb{Z}/2) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2[z,y]/z^2, & \text{если} \quad m \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 4); \\ \mathbb{Z}/2[z], & \text{если} \quad m \equiv 2 \,(\mathrm{mod}\, 4); \end{cases}$$

где $\deg z = 1$, $\deg y = 2$.

Пусть e — единица алгебры $H^*(\mathbb{C}P^{n+1} \setminus \mathbb{C}A)$. Элементы $z \cdot e$ и $y \cdot e$ будут обычно обозначаться буквами z и y.

Пространство $\mathbb{C}P^{n+1} \setminus \mathbb{C}A$ инвариантно относительно инволюции $\mathrm{conj} : \mathbb{C}P^{n+1} \to \mathbb{C}P^{n+1}$ и будет рассматриваться само как пространство с инволюцией. Множество неподвижных точек пространства $\mathbb{C}P^{n+1} \setminus \mathbb{C}A$ есть, очевидно, $\mathbb{R}P^{n+1} \setminus \mathbb{R}A$.

Лемма 5.1. *Рассмотрим спектральную последовательность $E^*_r(\mathbb{C}P^{n+1} \setminus \mathbb{C}A)$. Тогда для любых r*

1. $d_r(z) = 0$.
2. *Пусть $m \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 4)$, тогда $d_r(y) = 0$.*

Доказательство. Пусть $d_r(z) \neq 0$, тогда $r = 1$ и $d_1(z) = e$, что противоречит предложению 2.4.

Для доказательства утверждения 2 леммы заметим, что y — образ класса из $H^2(\mathbb{C}P^{n+1})$ при гомоморфизме, индуцированном включением

$$\mathbb{C}P^{n+1} \setminus \mathbb{C}A \to \mathbb{C}P^{n+1} \tag{22}$$

и что, как было показано в § 3, спектральная последовательность $E_r^*(\mathbb{C}P^{n+1})$ вырождается. •

Следствие 5.2. *Структура $H^*(C_m,\mathbb{Z}/2)$-алгебры на кольце $H^*(\mathbb{C}P^{n+1}\setminus\mathbb{C}A)$ индуцирует структуру $H^*(C_m,\mathbb{Z}/2)$-алгебры на кольце $E_r^*(\mathbb{C}P^{n+1}\setminus\mathbb{C}A)$ для каждого $r\leqslant+\infty$.* •

Следствие 5.3. *Если гомоморфизм $d_r^i(\mathbb{C}P^{n+1}\setminus\mathbb{C}A)$ ненулевой, то $i=n+1$.* •

Положим

$$D_3(A):=\{r\in\mathbb{N}|d_r^{n+1}(\mathbb{C}P^{n+1}\setminus\mathbb{C}A)\neq 0\}.$$

В силу последнего следствия

$$\dim(H^*(\mathbb{C}P^{n+1}\setminus\mathbb{C}A))-\dim(H^*(\mathbb{R}P^{n+1}\setminus\mathbb{R}A))=$$
$$=2\mathrm{Card}D_3(A)+\dim(H^{n+1}(\mathbb{C}P^{n+1}\setminus\mathbb{C}A))-\dim(E_1^{n+1}(\mathbb{C}P^{n+1}\setminus\mathbb{C}A)).\qquad(23)$$

Вычислим правую часть (23). Для этого заметим, что $\mathbb{R}P^{n+1}\setminus\mathbb{R}A=(N(A)\setminus\mathbb{R}A)=(P(A)\setminus\mathbb{R}A)$ и что пространство $N(A)\setminus\mathbb{R}A$ гомотопически эквивалентно пространству $N(A)$, а $P(A)\setminus\mathbb{R}A$ — пространству $P(A)$.

Вложение пространств $\mathbb{R}P^{n+1}\setminus\mathbb{R}A$, $N(A)$ и $P(A)$ в $\mathbb{R}P^{n+1}$ делает кольца $H^*(\mathbb{R}P^{n+1}\setminus\mathbb{R}A)$, $H^*(N(A))$ и $H^*(P(A))$ алгебрами над $\mathbb{Z}/2[x]$, где $\deg x=1$. Вследствие очевидного равенства $H^*(\mathbb{R}P^{n+1}\setminus\mathbb{R}A)=H^*(N(A))\times H^*(P(A))$, $\mathbb{Z}/2[x]$-алгебра $H^*(\mathbb{R}P^{n+1}\setminus\mathbb{R}A)$ является также $\mathbb{Z}/2[x_-]\times\mathbb{Z}/2[x_+]$-алгеброй, где $x_-+x_+=x$ и $1_-+1_+=1$. Вычислим фильтрацию (6) на кольце когомологий множества неподвижных точек пространства $\mathbb{C}P^{n+1}\setminus\mathbb{C}A$, т.е. на $H^*(\mathbb{R}P^{n+1}\setminus\mathbb{R}A)$.

Предложение 5.4. *Пусть $m\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,4)$, тогда для $i<n+1$*

$$\mathcal{F}^i(\mathbb{C}P^{n+1}\setminus\mathbb{C}A)=\begin{cases}\mathrm{Sq}(\langle 1,1_+,x,x_+,\dots,x^{j-1},x_+^{j-1},x^j\rangle), & \text{если}\quad i=2j;\\ \mathrm{Sq}(\langle 1,1_+,x,x_+,\dots,x^j,x_+^j\rangle|, & \text{если}\quad i=2j+1.\end{cases}$$

Пусть $m\equiv 2\,(\mathrm{mod}\,4)$, тогда для $i<n+1$ $\mathcal{F}^i(\mathbb{C}P^{n+1}\setminus\mathbb{C}A)=\langle 1,(x+1_+),\dots,(x+1_+)^i\rangle$.

Лемма 5.5. *Пусть гиперповерхность B_k задана в $\mathbb{P}^{2k+1}$ уравнением $x_0^m+\dots+x_k^m-x_{k+1}^m-\dots-x_{2k+1}^m=0$, пусть $k\geqslant 3$, тогда для $m\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,4)$*

$$\mathcal{F}^1(\mathbb{C}P^{2k+1}\setminus\mathbb{C}B_k)=\mathrm{Sq}(\langle 1,1_+\rangle),$$
$$F^2(\mathbb{C}P^{2k+1}\setminus\mathbb{C}B_k)=$$
$$=\mathrm{Sq}(\langle 1,1_+,x\rangle);$$

для $m\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,4)$

$$\mathcal{F}^1(\mathbb{C}P^{2k+1}\setminus\mathbb{C}B_k)=\langle 1,x+1_+\rangle.$$

Доказательство. Рассмотрим $B_0\subset\mathbb{P}^1$. Несложно увидеть, что $E_\infty^1(\mathbb{C}P^1\setminus\mathbb{C}B_0)=\mathbb{Z}/2$, следовательно, для всех $k\geqslant 0$ группа $E_\infty^1(\mathbb{C}P^{2k+1}\setminus\mathbb{C}B_k)$ равна $\mathbb{Z}/2$, так как включение

$$\mathbb{C}P^1\setminus\mathbb{C}B_0\to\mathbb{C}P^{2k+1}\setminus\mathbb{C}B_k\qquad(24)$$

индуцирует изоморфизм

$$H^1(\mathbb{C}P^{2k+1}\setminus\mathbb{C}B_k)\to H^1(\mathbb{C}P^1\setminus\mathbb{C}B_0).$$

В силу предложения 2.4 имеет $\mathcal{F}^0(\mathbb{C}P^{2k+1}\setminus\mathbb{C}B_k)=\langle 1\rangle$. Пусть $\alpha\in\mathcal{F}^1\setminus\mathcal{F}^0$, тогда $\alpha=\alpha_0+\alpha_1$, где $\alpha_i\in H^i(\mathbb{C}P^{2k+1}\setminus\mathbb{C}B_k)$.

Из следствия 4.7, примененного к многообразию B_0, следует, что $H^*(\mathbb{R}P^{2k+1} \setminus \mathbb{R}B_k)/H^{\geqslant k}(\mathbb{R}P^{2k+1} \setminus \mathbb{R}B_k = (\mathbb{Z}/2[x_-]/x_-^k) \times (\mathbb{Z}/2[x_+]/x_+^k)$.

Пусть $m \equiv 0 \pmod 4$. Тогда $\alpha^2 \in \mathcal{F}^1$, значит, $\alpha_1^2 = 0$, следовательно, $\alpha_1 = 0$. Так как $\alpha \neq 0$ и 1, можно считать, что $\alpha_0 = 1_+$. Значит, $\mathcal{F}^1 = \langle 1, 1_+ \rangle = \mathrm{Sq}(\langle 1, 1_+ \rangle)$. Как уже отмечалось, вложение (22) индуцирует изоморфизм $H^2(\mathbb{C}P^{2k+1}) \to H^2(\mathbb{C}P^{2k+1} \setminus \mathbb{C}B_k)$,. а значит, — эпиморфизм $E^2_\infty(\mathbb{C}P^{2k+1}) \to E^2_\infty(\mathbb{C}P^{2k+1} \setminus \mathbb{C}B_k)$, следовательно, $\mathcal{F}^2 = \langle 1, 1_+, \mathrm{Sq}x \rangle$.

Пусть $m \equiv 2 \pmod 4$, тогда в силу последнего рассуждения $\alpha^2 \equiv x + x^2 \pmod{F^1}$. Следовательно, $\alpha_1^2 = x^2$, значит, $\alpha_1 = x$. Гомоморфизм, индуцированный включением, переводит $\alpha_0 + \alpha_1$ в 1_+, следовательно, $\alpha_0 = 1_+$. •

Через C_k обозначим гиперповерхность в $\mathbb{P}^{n+2k+1}$, заданную уравнением

$$f + x^m_{n+2} + \dots + x^m_{n+k+1} - x^m_{n+k+2} - \dots - x^m_{n+2k+1} = 0.$$

Очевидно, $A \subset C_k$ и $B_{k-1} \subset C_k$. В силу следствия 4.7 для $i = 0, 1, 2$ гомоморфизмы включения $H^i(\mathbb{R}P^{n+2k+1} \setminus \mathbb{R}C_k) \to H^i(\mathbb{R}P^{2k-1} \setminus \mathbb{R}B_{k-1})$ — изоморфизмы. Гомоморфизмы $E^i_\infty(\mathbb{C}P^{n+2k+1} \setminus \mathbb{C}C_k) \to E^i_\infty(\mathbb{C}P^{2k-1} \setminus \mathbb{C}B_{k-1})$ — изоморфизмы, следовательно, $\mathcal{F}^1(\mathbb{C}P^{n+2k+1} \setminus \mathbb{C}C_k)$ и $\mathcal{F}^2(\mathbb{C}P^{n+2k+1} \setminus \mathbb{C}C_k)$ такие же, как и в лемме 5.5. Для $i < 3$ гомоморфизм включения $E^i_\infty(\mathbb{C}P^{n+2k+1} \setminus \mathbb{C}C_k) \xrightarrow{\mathrm{in}^*} E^i_\infty(\mathbb{C}P^{n+1} \setminus \mathbb{C}A)$ сюръективен, значит, $\mathcal{F}^i(\mathbb{C}P^{n+1} \setminus \mathbb{C}A) = \mathrm{in}^*(\mathcal{F}^i(\mathbb{C}P^{n+2k+1} \setminus \mathbb{C}C_k))$. Утверждение предложения вытекает теперь из мультипликативности фильтрации $\{\mathcal{F}^i\}$. •

Предложение 5.6.1. *1. Пусть $m \equiv 0 \pmod 4$, тогда*

$$D_3(A) = \begin{cases} \varnothing, & \textit{если} \quad l(\mathbb{R}A) \geqslant n/2 - 1; \\ (1 + 2\mathbb{Z}) \cap [2l(\mathbb{R}A) + 3, n], & \textit{если} \quad l(\mathbb{R}A) < n/2 - 1. \end{cases}$$

Кроме того, если n нечетно, то $y^{(n+1)/2} \neq 0$ в группе $E^{n+1}_\infty(\mathbb{C}P^{n+1} \setminus \mathbb{C}A)$.

2. Пусть $m \equiv 2 \pmod 4$, тогда $D_3(A) = \varnothing$ и $z^{n+1} = 0$ в группе $E^{n+1}_\infty(\mathbb{C}P^{n+1} \setminus \mathbb{C}A)$.

Доказательство. В силу следствия 5.2 на кольце $E^*_\infty(\mathbb{C}P^{n+1} \setminus \mathbb{C}A)$ есть структура $H^*(C_m, \mathbb{Z}/2)$–алгебры. Через φ обозначим соответствующий гомоморфизм колец: $H^*(C_m; \mathbb{Z}/2) \to E^*_\infty(\mathbb{C}P^{n+1} \setminus \mathbb{C}A)$. Как легко видеть, найдутся такие целые k, k_1, k_2, что

$$\mathrm{Im}\varphi = \begin{cases} \mathbb{Z}/2[y, z]/(z^2, y^{k_1}, zy^{k_2}), & \text{если} \quad m \equiv 0 \pmod 4; \\ \mathbb{Z}/2[z]/z^k, & \text{если} \quad m \equiv 2 \pmod 4). \end{cases}$$

Найдем числа k, k_1, k_2.

Пусть $m \equiv 0 \pmod 4$ и $2j < n + 1$, тогда $(j \geqslant k_1 \Leftrightarrow \mathcal{F}^{2j} = \mathcal{F}^{2j-1})$, последнее равенство в силу предложения 5.4 равносильно $x^j = \sum_{i=0}^{j-1}(a_i x^i + b_i x^i_+)$, где $a_i, b_i \in \mathbb{Z}/2$, что эквивалентно: $x^j = 0$ в кольце $H^*(\mathbb{R}P^{n+1} \setminus \mathbb{R}A)$. Значит, $k_1 = n - l(\mathbb{R}A) + 1$. Отсюда и из следствия 4.2 вытекает, что $2k_1 \geqslant n + 2$. Поэтому для нечетного n имеем $y^{(n+1)/2} \neq 0$ в $E^{n+1}_\infty(\mathbb{C}P^{n+1} \setminus \mathbb{C}A)$, и для $i < (n+1)/2$ множество $F^{2i} \setminus F^{2i-1}$ непусто.

Аналогично пусть $2j + 1 < n + 1$, тогда $(j \geqslant k_2 \Leftrightarrow \mathcal{F}^{2j+1} = \mathcal{F}^{2j})$. В силу предложения 5.4 последнее равенство эквивалентно равенству $x^j_+ = a_j x^j + \sum\limits_{i=0}^{j-1}(a_i x^i + b_i x^i_+)$, где $a_i, b_i \in \mathbb{Z}/2$, что равносильно $x^j_+ = 0$ или $x^j_- = 0$ в кольце $H^*(\mathbb{R}P^{n+1} \setminus \mathbb{R}A)$. Значит, $E^{2j+1}_\infty(\mathbb{C}P^{n+1} \setminus \mathbb{C}A) = 0$ тогда и только тогда, когда $2l(\mathbb{R}A) + 3 \leqslant 2j + 1$, и, следовательно, $k_2 = l(\mathbb{R}A) + 1$.

Пусть $m \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 4)$ и $j < n+1$, тогда $j \geqslant k \Leftrightarrow \mathcal{F}^j = \mathcal{F}^{j-1}$). В силу предложения 5.4 последнее равенство эквивалентно равенству $(x+1_+)^j = \sum_{i=0}^{j-1} a_i(x+1_+)^i$, что равносильно системе

$$x_-^j = \sum_{i=0}^{j-1} a_i x_-^i;$$
$$(x_+ + 1_+)^j = \sum_{i=0}^{j-1} a_i (x_+ + 1_+)^i.$$

Эта система в свою очередь равносильна неравенству $j > l(P(A)) + l(N(A))$. В силу следствия 4.2 $j > n+1$. Значит, $k = n+1$. Откуда и вытекает утверждение предложения. •

Лемма 5.7. $\dim(E_1^{n+1}(\mathbb{C}P^{n+1} \setminus \mathbb{C}A)) = \dim(H^n(\mathbb{C}A)) - 2\tilde{a}(A) + 1 - 2\delta_h(A)$.

Доказательство. Если n четно, то последовательность

$$0 \to H^n(\mathbb{C}P^{n+1}) \to H^n(\mathbb{C}A) \to H^{n+1}(\mathbb{C}P^{n+1}, \mathbb{C}A) \to 0$$

точна, а если n нечетно, то

$$0 \to H^n(\mathbb{C}A) \to H^{n+1}(\mathbb{C}P^{n+1}, \mathbb{C}A) \to H^{n+1}(\mathbb{C}P^{n+1}) \to 0$$

точна. Эти последовательности эквивариантны, следовательно, применив к каждой из них функтор $H^*(C_2, -)$, получим длинную точную последовательность. Периодичность этих последовательностей (см. замечание 2.2) дает точный треугольник

$$\begin{array}{ccc} H^1(C_2, H^n(\mathbb{C}A)) & \longrightarrow & H^1(C_2, H^{n+1}(\mathbb{C}P^{n+1}, \mathbb{C}A)) \\ {\scriptstyle\partial}\nwarrow & & \swarrow{\scriptstyle\varphi} \\ & H^1(C_2; \mathbb{Z}/2) & \end{array}$$

Для четного n гомоморфизм $\partial = \mathrm{in}^* : E_1^n(\mathbb{C}P^{n+1}) \to E_1^n(\mathbb{C}A)$ нулевой тогда и только тогда, когда $\delta_h = 0$, следовательно,

$$\dim H^1(C_2, H^{n+1}(\mathbb{C}P^{n+1}, \mathbb{C}A)) = \dim(E_1^n(\mathbb{C}A)) + 1 - 2\delta_h.$$

В силу двойственности группа $H^{n+1}(\mathbb{C}P^{n+1} \setminus \mathbb{C}A)$ эквивариантно изоморфна группе $H_{n+1}(\mathbb{C}P^{n+1}, \mathbb{C}A) = \hom(H^{n+1}(\mathbb{C}P^{n+1}, \mathbb{C}A); \mathbb{Z}/2)$. Как нетрудно видеть, $H^1(C_2, H^{n+1}(\mathbb{C}P^{n+1}, \mathbb{C}A)) = \hom(E_1^{n+1}(\mathbb{C}P^{n+1} \setminus \mathbb{C}A), \mathbb{Z}/2)$, и для нечетного n гомоморфизм φ сопряжен гомоморфизму включения $E_1^{n+1}(\mathbb{C}P^{n+1}) \to E_1^{n+1}(\mathbb{C}P^{n+1} \setminus \mathbb{C}A)$. Последний гомоморфизм в силу предложения 5.6 ненулевой, следовательно, φ ненулевой; значит, для нечетного n справедливо $\dim(H^1(C_2, H^{n+1}, (\mathbb{C}P^{n+1}, \mathbb{C}A))) = \dim(E_1^n(\mathbb{C}A)) + 1$. Осталось заметить, что

$$\dim(H^1(C_2, H^{n+1}(\mathbb{C}P^{n+1}, \mathbb{C}A))) = \dim(E_1^{n+1}(\mathbb{C}P^{n+1} \setminus \mathbb{C}A))$$

и что по определению для нечетного n имеем $\delta_h = 0$.

Лемма 5.8. *Пусть* $l(\mathbb{R}A) < (n-1)/2$. *Тогда* $\mathrm{Card} D_2 = \mathrm{Card} D_3 + \delta_h$.

Отсюда и из предложения 5.6 вытекает

Следствие 5.9. *Пусть* $m \equiv 0 \pmod 4$, *тогда* $D_1 = \varnothing$, *и, если* $l(\mathbb{R}A) < (n-1)/2$, *то* $\delta_h = 0$ *и* $\mathrm{Card} D_2 = [(n-1)/2] - l(\mathbb{R}A)$.

Пусть $m \equiv 2 \pmod 4$, *и пусть* $l(\mathbb{R}A) \leqslant (n-1)/2$, *тогда* $\mathrm{Card} D_2 = \delta_h$.

Доказательство леммы. Из длинных точных последовательностей пар $(\mathbb{C}P^{n+1}, \mathbb{C}A)$, $(\mathbb{R}P^{n+1}, \mathbb{R}A)$ и двойственности Александера–Понтрягина следует, что

$$\dim(H^*(\mathbb{C}P^{n+1} \setminus \mathbb{C}A)) = \dim(H^*(\mathbb{C}A)) + n + 2 - 2([n/2]+1),$$
$$\dim(H^*(\mathbb{R}P^{n+1} \setminus \mathbb{R}A)) = \dim(H^*(\mathbb{R}A)) + n + 2 - 2(l(\mathbb{R}A)+1).$$

Значит,

$$\dim(H^*(\mathbb{C}P^{n+1} \setminus \mathbb{C}A)) - \dim(H^*(\mathbb{R}P^{n+1} \setminus \mathbb{R}A)) = 2(a(A) + l(\mathbb{R}A) - [n/2]).$$

Левую часть этого равенства сосчитаем при помощи спектральной последовательности $E_r^*(\mathbb{C}P^{n+1} \setminus \mathbb{C}A)$, а правую при помощи $E_r^*(\mathbb{C}A)$. Из (23) и леммы 5.7 вытекает

$$\dim(H^*(\mathbb{C}P^{n+1} \setminus \mathbb{C}A)) - \dim(H^*(\mathbb{R}P^{n+1} \setminus \mathbb{R}A)) =$$
$$= 2\mathrm{Card} D_3 + 2\tilde{a} + \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ нечетно;} \\ 2(\delta_h - 1), & \text{если } n \text{ четно.} \end{cases}$$

Следовательно,

$$a(A) - \tilde{a}(A) + l(\mathbb{R}A) - [n/2] = \mathrm{Card} D_3 + \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ нечетно;} \\ \delta_h - 1, & \text{если } n \text{ четно.} \end{cases}$$

Подставляя в последнее равенство равенства из следствий 3.3 и 3.5, получаем утверждение леммы. •

Доказательство теоремы С. Пусть $l(\mathbb{R}A) \geqslant n/2$. Тогда в силу леммы 3.6 гомоморфизм $\mathbb{Z}/2 = E_\infty^n(\mathbb{C}P^{n+1}) \to E_\infty^n(\mathbb{C}A)$ ненулевой, следовательно, гомоморфизм $E_1^n(\mathbb{C}P^{n+1}) \to E_1^n(\mathbb{C}A)$ ненулевой, следовательно, $\delta_h = 1$.

Пусть $l(\mathbb{R}A) < n/2$.

Лемма 5.10. $\mathrm{Card} D_1(A) \equiv 0 \pmod 2$.

Доказательство. Пусть $i \in D_1(A)$ и $d_r^i(\mathbb{C}A)$ — соответствующий ненулевой дифференциал. Положим $\varphi(i)$ равным $2n - (i - r)$. Из леммы 2.6 следует, что $\varphi(i) \in D_1(A)$. По построению отображение $\varphi : D_1 \to D_1$ — инволюция. В силу предложения 3.1 имеем $r \equiv 2 \pmod 4$, следовательно, $\varphi(i) \neq i$, т.е. φ не имеет неподвижных точек. •

Пусть $m \equiv 2 \pmod 4$. Число $\mathrm{Card} D_1$ четно, а $\mathrm{Card} D_2$ равно либо 0, либо 1. В силу следствия 3.5 δ_h есть остаток при делении на 2 числа $[n/2 - 1] - l(\mathbb{R}A)$.

Случай $m \equiv 0 \pmod 4$ вытекает из следствия 5.9. •

Доказательство теоремы *B*. . Пусть $l(\mathbb{R}A) \leqslant [(n-1)/2]$. В силу следствий 3.5 и 5.9 имеем для $m \equiv 2 \pmod 4$: $\mathrm{Card} D_2 = \delta_h$, $\mathrm{Card} D_1 = [(n-1)/2] - l(\mathbb{R}A) - \delta_h$; для $m \equiv 0 \pmod 4$: $\mathrm{Card} D_1 = 0$, $\mathrm{Card} D_2 = [(n-1)/2] - l(\mathbb{R}A)$. Доказательство теоремы завершается подстановкой выражений для $\mathrm{Card} D_1$, $\mathrm{Card} D_2$ и δ_h в равенство из следствия 3.3.

Пусть $l(\mathbb{R}A) > [(n-1)/2]$. Утверждение теоремы в этом случае следует из предложения 3.5. •

§ 6. Доказательство теоремы А

6.1. Тройки. Пусть L — свободная абелева группа, снабженная симметричным или кососимметричным билинейным унимодулярным спариванием $\varphi : L \otimes L \to \mathbb{Z}$. Пусть h — элемент группы L, равный нулю в кососимметричном случае. Пусть $T : L \to L$ — инволюция такая, что для любых x, y

$$\varphi(Th, Ty) = \begin{cases} \varphi(x,y), & \text{если} \quad \varphi \text{ симметрично ;} \\ -\varphi(x,y), & \text{если} \quad \varphi \text{ кососимметрично,} \end{cases}$$

и пусть $T(h) = \pm h$.

Будем называть симметричной тройкой тройку $((L,\varphi), T, h)$, если форма на L симметрична, в противном случае тройку будем называть кососимметричной.

6.2. Каждой гиперповерхности A в $\mathbb{P}^{n+1}$ сопоставим тройку

$$(H^n(\mathbb{C}A; \mathbb{Z}), \mathrm{conj}^*, h_A). \tag{25}$$

Очевидно, в четномерном случае тройка будет симметричной, в нечетномерном — кососимметричной. Из описания $H^*(\mathbb{C}P^{n+1}; \mathbb{Z})$–алгебры $H^*(\mathbb{C}A; \mathbb{Z})$, данного в § 3, следует, что по тройке (25) $H^*(\mathbb{C}P^{n+1}; \mathbb{Z})$–алгебра $H^*(\mathbb{C}A; \mathbb{Z})$ с инволюцией conj^* восстанавливается однозначно.

6.3. Инварианты троек.

6.3.1. Некоторые инварианты троек определяются независимо от симметричности или кососимметричности формы φ. Перечислим их.

6.3.1.1. **Инварианты $\tilde{a}$ и δ_h.** Их определения, данные в § 1 для тройки (25), дословно переносятся на общий случай. Отметим, что для кососимметричной тройки число δ_h всегда равно нулю.

6.3.1.2. Положим

$$\delta_\varphi = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \forall x \in L \quad \varphi(x, Tx) \equiv 0 \pmod 2; \\ 1, & \text{в противном случае .} \end{cases}$$

6.3.1.3. Положим

$$L_\pm = \{x \in L / Tx = \pm x\}, \quad l_\pm = \mathrm{rg}(L_\pm).$$

Нетрудно видеть, что для кососимметричной формы $l_+ = l_- = (\mathrm{rg}L) \cdot /2$.

6.3.2. **Симметричный случай.**

6.3.2.1. Положим

$$\delta_L = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \forall x \quad \varphi(x,x) \equiv 0 \pmod 2; \\ 1, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

6.3.2.2. Положим

$$m = \varphi(z, z).$$

Заметим, что для тройки (25) число m совпадает со степенью гиперповерхности.

6.3.2.3. Положим

$$\delta_{\varphi,h} = \begin{cases} 0, & \text{если } \forall x \in L \quad \varphi(x, Tx) \equiv \varphi(x, h) \pmod 2; \\ 1, & \text{в противном случае .} \end{cases}$$

6.3.2.4. Рассмотрим квадратичные формы на $L_+ \otimes \mathbb{R}$ и $L_- \otimes \mathbb{R}$, индуцированные формой φ. Обозначим через t_+ и t_- число положительных квадратов приведений форм на $L_+ \otimes \mathbb{R}$ и $L_- \otimes \mathbb{R}$ соответственно к диагональному виду.

6.4. Алгебраическая часть доказательства.

Теорема 6.1. *Кососимметричная тройка определяется числами $L_+, \tilde{a}, \delta_\varphi$ с точностью до изоморфизма.* •

Теорема 6.2(см.[8]). *Пусть симметричная тройка* $((L,\varphi),T,h)$ *такова, что* φ *индуцирует на группах* $L_+ \cap z^\perp$ *и* $L_- \cap z^\perp$ *неопределенные формы. Тогда эта тройка определяется числами*

$$(l_+,l_-;t_+,t_-;\tilde{a};\delta_L;\delta_h;\delta_\varphi,\delta_{\varphi,h};m) \qquad (26)$$

с точностью до изоморфизма. •

Предложение 6.3. *Пусть размерность* n*, степень* m *четномерной гиперповерхности* A *в* $\mathbb{P}^{n+1}$ *удовлетворяют условию* (∗) *теоремы* A. *Тогда тройка* (25) *определяется числами* (26) *с точностью до изоморфизма.*

Доказательство. Пусть $H^n(\mathbb{C}A;\mathbb{C}) = \bigoplus\limits_{p+q=n} H^{p,q}(\mathbb{C}A)$ — разложение Ходжа. Пусть $p < n/2$. Положим

$$H^p = H^n(\mathbb{C}A;\mathbb{R}) \cap (H^{p,q}(\mathbb{C}A) \oplus H^{q,p}(\mathbb{C}A)), \text{ где } p+q=n;$$
$$H^{n/2} = H^n(\mathbb{C}A;\mathbb{R}) \cap H^{n/2,n/2}(\mathbb{C}A).$$

Легко проверяется справедливость следующих утверждений:

1) форма на $H^n(\mathbb{C}A;\mathbb{R})$ является прямой суммой своих подформ H^p;

2) для $p < n/2$ форма на H^p положительно определена, если p четно, и отрицательно — если p нечетно;

3) $z_A \in H^{n/2}$;

4) подпространства H^p инвариантны относительно conj*;

5) для $p < n/2$ размерности пространств векторов из H^p инвариантных и косоинвариантных относительно инволюции conj совпадают.

В силу этих утверждений для доказательства предложения достаточно показать, что группы $H^{n/2-1}$,$H^{n/2-2}$ ненулевые или, что то же самое, что числа $h^{n/2-1,n/2+1}$ и $h^{n/2-2,n/2+2}$ положительны. Из вычислений чисел Ходжа неособой проективной гиперповерхности (см., например, [14], с.183) вытекает следующее утверждение:

Лемма 6.4. *Пусть* $n,m > 2$ *и* $(n,m) \notin \{(4,3),(4,4),(4,5),(6,3),(8,3)\}$. *Тогда числа* $h^{n/2-1,n/2+1}$ *и* $h^{n/2-2,n/2+2}$ *положительны.*

Осталось доказать утверждение предложения для квадрик произвольной размерности (т.е. $n > 0, m = 2$*) и поверхностей степени 3 и 4 (т.е.* $n = 2, m = 3,4$*). Во всех этих случаях предложение следует из грубой проективной классификации этих многообразий. Для квадрик эта классификация очевидна (все определяется числом* l*). Для поверхностей степени 3 и 4 эта классификация приведена в обзоре* [13], *с.481.* •

6.5. Окончание доказательства теоремы А.

6.5.1. **Доказательство утверждения а) теоремы.** Достаточно показать, что у троек гиперповерхностей A и B инварианты $(l_+,\tilde{a},\delta_\varphi)$ в нечетномерном случае и инварианты (26) в четномерном совпадают.

Поскольку числа n и m у гиперповерхностей совпадают по условию теоремы, многообразия $\mathbb{C}A$ и $\mathbb{C}B$ диффеоморфны. Поэтому числа δ_L,$l_+ + l_-$,$t_+ + t_-$ в четномерном случае и l_+ в нечетномерном у них совпадают.

В силу теорем B и C у гиперповерхностей равны инварианты $\tilde{a}$ и δ_h.

В силу формулы Лефшица о неподвижных точках числа l_+ совпадают тогда и только тогда, когда $\chi(\mathbb{R}A) = \chi(\mathbb{R}B)$.

В работе [1] показано, что $\delta_\varphi(A) = 0$ тогда и только тогда, когда $\varphi(A) = 0$, и в четномерном случае $\delta_{\varphi,h}(A) = 0$ тогда и только тогда, когда $\varphi(A) = 1$. Отсюда следует совпадение инвариантов δ_φ, а в четномерном случае — и $\delta_{\varphi,h}$.

И, наконец, из теоремы о G-сигнатуре (см.[9], с.63) следует, что числа t_+ совпадают у гиперповерхностей тогда и только тогда, когда $\chi(\mathbb{R}A) = \chi(\mathbb{R}B)$. •

6.5.2. **Доказательство утверждения б) теоремы.**

Пусть $l(\mathbb{R}A) = l(\mathbb{R}B)$. Покажем, что для гиперповерхностей A и B числа a,χ,φ равны. Из теоремы В вытекает равенство $a(A) = a(B)$. Совпадение чисел χ,φ следует из рассуждений п.6.5.1. •

6.6. Доказательство предложения 1.2. Пусть выполнены условия предложения. 6.6.1. **Утверждение 1.** Пусть $\delta_h = 1$, из теоремы С вытекает, что $l(\mathbb{R}A) = n/2$, в свою очередь из теоремы В вытекает, что $a = \tilde{a}$. 6.6.2. **Утверждения 2,3.** Пусть $a(A) \leqslant 1$. В силу теоремы В $\tilde{a} \equiv a \pmod 2$ и $\tilde{a} \leqslant a$, следовательно, $\tilde{a} = a$. Пусть $\tilde{a} \leqslant 1$. В силу соотношений работы [8] $\delta_h = 1$, поэтому из утверждения 1 вытекает равенство $\tilde{a} = a$. •

6.7. Доказательства предложений 1.3 и 1.4. Утверждения этих предложений следуют из соотношений работы [8] и теорем В и С.

Список литературы

[1] Арнольд В.И., *О расположении овалов вещественных плоских алгебраических кривых, инволюциях четырехмерных гладких многообразий и арифметике целочисленных квадратичных форм*, Функцион. анализ и его прил. **5**, вып. 3 (1971), 1–9.

[2] Бредон Г., *Введение в теорию компактных групп преобразований*, Наука, М., 1980.

[3] Бурбаки Н., *Коммутативная алгебра*, Мир, М., 1971.

[4] Гудков Д.А., Крахнов А.Д., *О периодичности эйлеровой характеристики вещественных алгебраических ($M-1$)-многообразий*, Функцион. анализ и его прил. **7**, вып. 2 (1973), 15–19.

[5] Калинин И.О., *Когомологические инварианты вещественных алгебраических многообразий. Тез. Клейна*, Тез. XIX Всесоюзн. алг. конф. (1987), Львов.

[6] Калинин И.О., *Когомологические свойства вещественных алгебраических многообразий*, Тез. Межд. Топ. конф. (1987), Баку.

[7] Краснов В.А., *Неравенства Гарнака–Тома для отображений вещественных алгебраических многообразий*, Изв. АН СССР. Сер. мат. **47** (1983), 268–297.

[8] Никулин В.В., *Целочисленные симметричные билинейные формы и некоторые их геометрические приложения*, Изв. АН СССР. Сер. мат. **43** (1979), 111–177.

[9] Рохлин В.А., *Сравнения по модулю 16 в шестнадцатой проблеме Гильберта*, Функцион. анализ его прил. **6**, вып. 4 (1972), 58–64.

[10] Сян У.И., *Когомологическая теория топологических групп преобразований*, Мир, М., 1979.

[11] Харламов В.М., *Новые сравнения для эйлеровой характеристики вещественных алгебраических многообразий*, Функцион.анализ и его прил. **7**, вып. 2 (1973), 74–78.

[12] Харламов В.М., *Дополнительные сравнения для эйлеровой характеристики четномерных вещественных алгебраических многобразий*, Функцион. анализ и его прил. **9**, вып. 2 (1975), 51–60.

[13] Харламов В.М., *Топология действительных алгебраических многообразий*, (комментарий к работам 7, 8), Петровский И.Г. Избранные труды. Системы уравнений с частными производными. Алгебраическая геометрия, Наука, М., 1986, с. 465–493.

[14] Куликов В.С., Курчанов П.В., *Комплексные алгебраические многообразия: периоды интегралов, структуры Ходжа*, Современные проблема математики. Фундаментальыне направления, т. 36, М., 1989, с. 5–232.

Ленинградское отделение
Математического института
им.В.А.Стеклова АН СССР
191011, Ленинград, наб.р.Фонтанки, 27

Поступило 25 июня 1990 г.