A. N. Sergeev, Calogero Operator and Lie Superalgebras, *TMF*, 2002, Volume 131, Number 3, 355–376

DOI: 10.4213/tmf334

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 131, № 3
июнь, 2002

А. Н. Сергеев*

ОПЕРАТОР КАЛОДЖЕРО И СУПЕРАЛГЕБРЫ ЛИ

Построен супераналог оператора Калоджеро $\mathcal{SL}$, зависящий от параметра k. Он связан с системой корней супералгебры Ли $\mathfrak{gl}(n|m)$. Для $m=0$ это обычный оператор Калоджеро, а для $m=1$, с точностью до замены переменных и параметра k, это оператор, построенный Веселовым, Чалых и Фейгиным. Для $k=1,\,1/2$ оператор $\mathcal{SL}$ является радиальной частью оператора Лапласа второго порядка для симметрических суперпространств, соответствующих парам $(\mathfrak{gl}\oplus\mathfrak{gl},\mathfrak{gl})$, $(\mathfrak{gl},\mathfrak{osp})$. Показано, что при любых m и n супераналоги полиномов Джека, построенные Керовым, Окуньковым и Ольшанским, являются собственными функциями оператора $\mathcal{SL}$. Для $k=1,1/2$ супераналоги полиномов Джека совпадают со сферическими функциями на суперпространствах. Изучается также алгебраический аналог интеграла Березина.

1. ВВЕДЕНИЕ

Данная работа является подробным изложением статьи [1]. В настоящей работе определен и исследован супераналог оператора Калоджеро, связанный с системой корней супералгебры Ли $\mathfrak{gl}(n|m)$. Следует отметить, что построенный супераналог оператора Калоджеро зависит только от четных переменных. В работе [2] был определен супераналог оператора Калоджеро, содержащий одинаковое количество четных и нечетных переменных. В работах [3], [4] были определены и исследованы зависящие от четных и нечетных переменных супераналоги полиномов Джека, связанные с супераналогом оператора Калоджеро, построенного в [2]. В работе [5] доказано существование инвариантного интеграла для классических супералгебр Ли. В разделе 7 передоказан результат работы [5] без привлечения теории супералгебр Хопфа, а также доказана двусторонняя инвариантность построенного интеграла. По-видимому, с помощью результатов работы [6] можно построить супераналоги оператора Калоджеро для других простых супералгебр Ли.

---

[*] Балаковский университет техники, технологии и контроля, Балаково, Саратовская обл., Россия. E-mail: sergeev@bittu.org.ru

Гамильтониан квантовой задачи Калоджеро имеет вид

$$\mathcal{L}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial t_i}\right)^2-\frac{1}{2}k(k-1)\sum_{i<j}\frac{\omega^2}{\operatorname{sh}^2\frac{\omega}{2}(t_i-t_j)}. \tag{1.1}$$

Этот оператор является частным случаем (соответствующим системе корней R алгебры Ли $\mathfrak{gl}(n)$) оператора, построенного Ольшанецким и Переломовым [7]:

$$\mathcal{L}=\Delta-\sum_{\alpha\in R^+}k_\alpha(k_\alpha-1)\frac{(\alpha,\alpha)}{(e^{\frac{\alpha}{2}}-e^{-\frac{\alpha}{2}})^2}. \tag{1.2}$$

Веселов, Фейгин и Чалых предложили [8], [9] следующее обобщение оператора (1.1):

$$\begin{aligned}\mathcal{L}'=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial t_i}\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial t_{n+1}}\right)^2-\frac{1}{2}k(k+1)\sum_{i<j}\frac{\omega^2}{\operatorname{sh}^2\frac{\omega}{2}(t_i-t_j)}-\\-\frac{1}{2}(k+1)\sum_{i=1}^{n}\frac{\omega^2}{\operatorname{sh}^2\frac{\omega}{2}(t_i-\sqrt{k}t_{n+1})}.\end{aligned} \tag{1.3}$$

Известно [10], что собственные функции оператора (1.1) могут быть выражены через полиномы Джека $P_\lambda(x_1,\dots,x_n;k)$, где λ – разбиение (определения и свойства полиномов Джека см. в [11], [12]). Известно также [11], что для $k=1, 1/2, 2$ (мы используем параметр $k=1/\alpha$, обратный параметру полиномов Джека α, который использует Макдональд [11]) полиномы Джека интерпретируются как сферические функции на симметрических пространствах, соответствующие парам $(\mathfrak{gl}\oplus\mathfrak{gl},\mathfrak{gl})$, $(\mathfrak{gl},\mathfrak{sp})$ и $(\mathfrak{gl},\mathfrak{o})$. В этих случаях оператор Калоджеро является радиальной частью оператора Лапласа второго порядка.

Корни супералгебры $\mathfrak{gl}(n|m)$. Пусть $I=I_{\bar0}\coprod I_{\bar1}$ – объединение четных индексов $I_{\bar0}=\{1,\dots,n\}$ и нечетных индексов $I_{\bar1}=\{\bar1,\dots,\overline{m}\}$. Пусть $\dim V=(n|m)$ и $e_1,\dots,e_n$, $e_{\bar1},\dots,e_{\overline{m}}$ – базис V такой, что четность каждого вектора равна четности его индекса. Пусть $\{e_{ij}\mid i,j\in I\}$ – базис $\mathfrak{gl}(V)$, состоящий из матричных единиц. Пусть также $\mathfrak{h}=\operatorname{Span}(e_{ii}\mid i\in I)$ – подалгебра Картана, состоящая из диагональных матриц, и $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n,\varepsilon_{\bar1},\dots,\varepsilon_{\overline{m}}$ – левый дуальный базис к $\{e_{ii}\mid i\in I\}$ в $\mathfrak{h}^*$. Тогда множество корней описывается следующим образом: $R=R_{11}\coprod R_{22}\coprod R_{12}\coprod R_{21}$, где

$$\begin{aligned}&R_{11}=\{\varepsilon_i-\varepsilon_j\mid i,j\in I_{\bar0}\}, && R_{22}=\{\varepsilon_i-\varepsilon_j\mid i,j\in I_{\bar1}\},\\ &R_{12}=\{\varepsilon_i-\varepsilon_j\mid i\in I_{\bar0},\ j\in I_{\bar1}\}, && R_{21}=\{\varepsilon_i-\varepsilon_j\mid i\in I_{\bar1},\ j\in I_{\bar0}\}.\end{aligned} \tag{1.4}$$

На $\mathfrak{h}^*$ определим зависящее от параметра k скалярное произведение, полагая

$$(v_1^*,v_2^*)_k=\sum_{i=1}^{n}v_1^*(e_{ii})v_2^*(e_{ii})-k\sum_{\bar{j}=1}^{m}v_1^*(e_{\bar{j}\bar{j}})v_2^*(e_{\bar{j}\bar{j}}), \tag{1.5}$$

и положим $\rho_{(k)} = k\rho_1 + \rho_2/k - \rho_{12}$, где

$$\rho_1 = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in R_{11}^+}\alpha, \qquad \rho_2 = \frac{1}{2}\sum_{\beta\in R_{22}^+}\beta, \qquad \rho_{12} = \frac{1}{2}\sum_{\gamma\in R_{12}}\gamma.$$

Для любого $l \in \mathfrak{h}^*$ определим e^l как линейный функционал на $S(\mathfrak{h})$, который продолжает l до гомоморфизма $S(\mathfrak{h})$ в поле комплексных чисел, и обозначим через $\mathfrak{H}$ подалгебру в алгебре частных $S(\mathfrak{h}^*)$, порожденную элементами e^l для $l \in \mathfrak{h}^*$ и $(1-e^{\alpha})^{-1}$ для $\alpha \in R$. На $\mathfrak{H}$ определим операторы ∂_i, $\partial_{\bar{j}}$, полагая

$$\partial_i(e^{v^*}) = v^*(e_{ii})e^{v^*}, \qquad \partial_{\bar{j}}(e^{v^*}) = v^*(e_{\bar{j}\bar{j}})e^{v^*}.$$

Определим супераналог оператора Калоджеро

$$\begin{aligned}\mathcal{SL} = \sum_{i=1}^{n}\partial_i^2 - k\sum_{\bar{j}=1}^{m}\partial_{\bar{j}}^2 - k(k-1)\sum_{\alpha\in R_{11}^+}\frac{(\alpha,\alpha)_k}{(e^{\frac{\alpha}{2}} - e^{-\frac{\alpha}{2}})^2} +{}\\ + \frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}-1\right)\sum_{\beta\in R_{22}^+}\frac{(\beta,\beta)_k}{(e^{\frac{\beta}{2}} - e^{-\frac{\beta}{2}})^2} - 2\sum_{\gamma\in R_{12}}\frac{(\gamma,\gamma)_k}{(e^{\frac{\gamma}{2}} - e^{-\frac{\gamma}{2}})^2}.\end{aligned} \tag{1.6}$$

Легко проверить, что супераналог оператора Калоджеро может быть переписан в виде

$$\begin{aligned}\mathcal{SL} = \sum_{i=1}^{n}\partial_i^2 - k\sum_{\bar{j}=1}^{m}\partial_{\bar{j}}^2 - k(k-1)\sum_{\alpha\in R_{11}^+}\frac{1}{(e^{\frac{\alpha}{2}} - e^{-\frac{\alpha}{2}})^2} +{}\\ + \frac{2(1-k)}{k}\sum_{\beta\in R_{22}^+}\frac{1}{(e^{\frac{\beta}{2}} - e^{-\frac{\beta}{2}})^2} - 2(1-k)\sum_{\gamma\in R_{12}}\frac{1}{(e^{\frac{\gamma}{2}} - e^{-\frac{\gamma}{2}})^2}.\end{aligned} \tag{1.7}$$

Заметим, что замена переменных $k \to -s$, $\varepsilon_j \to \sqrt{s}\varepsilon_j$ для $j \in I_{\bar{1}}$ переводит $\mathcal{SL}$ в оператор

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{SL}} = \sum_{i=1}^{n}\partial_i^2 + \sum_{\bar{j}=1}^{m}\partial_{\bar{j}}^2 - s(s+1)\sum_{\alpha\in R_{11}^+}\frac{1}{(e^{\frac{\alpha}{2}} - e^{-\frac{\alpha}{2}})^2} -{}\\ - \frac{2(s+1)}{s}\sum_{\beta\in R_{22}^+}\frac{1}{(e^{\frac{\sqrt{s}\beta}{2}} - e^{-\frac{\sqrt{s}\beta}{2}})^2} - 2(s+1)\sum_{\gamma\in R_{12}}\frac{1}{(e^{\frac{\gamma_s}{2}} - e^{-\frac{\gamma_s}{2}})^2},\end{aligned} \tag{1.8}$$

где $\gamma_s = \varepsilon_i - \sqrt{s}\varepsilon_j$, если $\gamma = \varepsilon_i - \varepsilon_j$. Отсюда следует, что если $\dim V_{\bar{1}} = 1$, то оператор (1.8) совпадает с оператором (1.3), введенным в работе [8]. Для того чтобы описать собственные функции $\mathcal{SL}$, удобно ввести оператор

$$\mathcal{M} = \bigl(\delta^{(k)}\bigr)^{-1}\bigl(L - (\rho_{(k)},\rho_{(k)})_k\bigr)\delta^{(k)},$$

$$\delta^{(k)} = \prod_{\alpha\in R_{11}^+}(e^{\frac{\alpha}{2}} - e^{-\frac{\alpha}{2}})^k \prod_{\beta\in R_{22}^+}(e^{\frac{\beta}{2}} - e^{-\frac{\beta}{2}})^{1/k} \prod_{\gamma\in R_{12}}(e^{\frac{\gamma}{2}} - e^{-\frac{\gamma}{2}})^{-1}.$$

Лемма 1.1. *Следующее выражение дает явную форму оператора* $\mathcal{M}$:

$$\mathcal{M}=\sum_{i=1}^{n}\partial_i^2-k\sum_{\bar{j}=1}^{m}\partial_{\bar{j}}^2+k\sum_{\alpha\in R_{11}^{+}}\frac{e^{\alpha}+1}{e^{\alpha}-1}\partial_{\alpha}-\sum_{\beta\in R_{22}^{+}}\frac{e^{\beta}+1}{e^{\beta}-1}\partial_{\beta}-\sum_{\gamma\in R_{12}}\frac{e^{\gamma}+1}{e^{\gamma}-1}\partial_{\gamma,k}, \quad (1.9)$$

где

$$\begin{aligned}\partial_\alpha&=\partial_i-\partial_j &&\textit{для}\quad \alpha=\varepsilon_i-\varepsilon_j,\\ \partial_\beta&=\partial_{\bar{i}}-\partial_{\bar{j}} &&\textit{для}\quad \beta=\varepsilon_{\bar{i}}-\varepsilon_{\bar{j}},\\ \partial_{\gamma,k}&=\partial_i+k\partial_{\bar{j}} &&\textit{для}\quad \gamma=\varepsilon_i-\varepsilon_{\bar{j}}.\end{aligned} \quad (1.10)$$

В новых переменных $x_i=e^{\varepsilon_i}$ и $y_j=e^{\varepsilon_{\bar{j}}}$ оператор $\mathcal{M}$ имеет вид

$$\begin{aligned}\mathcal{M}=\sum_{i=1}^{n}\Big(x_i\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)^2-k\sum_{j=1}^{m}\Big(y_j\frac{\partial}{\partial y_j}\Big)^2+k\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\frac{x_i+x_j}{x_i-x_j}\Big(x_i\frac{\partial}{\partial x_i}-x_j\frac{\partial}{\partial x_j}\Big)-\\ -\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\frac{y_i+y_j}{y_i-y_j}\Big(y_i\frac{\partial}{\partial y_i}-y_j\frac{\partial}{\partial y_j}\Big)-\\ -\sum_{1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant m}\frac{x_i+y_j}{x_i-y_j}\Big(x_i\frac{\partial}{\partial x_i}+ky_j\frac{\partial}{\partial y_j}\Big).\end{aligned} \quad (1.11)$$

Супераналоги полиномов Джека. Следуя Керову, Окунькову, Ольшанскому [13], определим супераналоги полиномов Джека. Рассмотрим алгебру многочленов $\mathcal{A}$ от бесконечного числа переменных $x_1,x_2,\dots$ и $y_1,y_2,\dots$. Пусть $p_r(x,y)=\sum x_i^r+\sum y_j^r$ – степенная сумма. Определим автоморфизм ω_k алгебры $\mathcal{A}$ по формуле

$$\omega_k(p_r(x,y))=\sum x_i^r-\frac{1}{k}\sum y_j^r.$$

Пусть $P_\lambda(x,y,k)$ – обычный полином Джека. Тогда супераналог полинома Джека имеет вид

$$SP_\lambda(x,y,k)=\omega_k(P_\lambda(x,y,k)). \quad (1.12)$$

Если положить $x_{n+1}=\dots=y_{m+1}=\dots=0$, то можно рассматривать супераналоги полиномов Джека от конечного числа переменных $SP_\lambda(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m,k)$.

Теорема 1.1. *Полиномы* $SP_\lambda(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m,k)$ *являются собственными функциями оператора* (1.11).

Сферические функции. В настоящей работе мы используем алгебраический подход к теории сферических функций.

Пусть $\mathfrak{g}$ – конечномерная супералгебра Ли, $U(\mathfrak{g})$ – ее универсальная обертывающая алгебра, $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$ – подалгебра. Пусть $\pi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ – неприводимое представление, V^* – дуальное представление, $v \in V$ – ненулевой $\mathfrak{b}$-инвариантный вектор и $v^* \in V^*$ – также $\mathfrak{b}$-инвариантный вектор. Тогда матричный коэффициент $\theta^\pi(v^*, v) \in U(\mathfrak{g})^*$, где

$$\theta^\pi(v^*, v)(u) = (-1)^{p(u)p(v)} v^*(\pi(u)v) \quad \forall u \in U(\mathfrak{g}),$$

будем называть *сферической функцией, ассоциированной с тройкой* (π, v^*, v).

Пусть L^* – левое корегулярное представление $\mathfrak{g}$; напомним, что оно задается формулой

$$L^*(u)l(v) = (-1)^{p(u)p(l)} l({}^t u v) \quad \forall u, v \in U(\mathfrak{g}),$$

где t – главный антиавтоморфизм $U(\mathfrak{g})$. Пусть $l \in U(\mathfrak{g})^*$ – двусторонне $\mathfrak{b}$-инвариантный функционал, т.е.

$$l(xu) = l(uy) = 0 \quad \forall x, y \in \mathfrak{b} \ \text{ и } \ u \in U(\mathfrak{g}).$$

Тогда $L^*(z)l$, где $z \in Z(\mathfrak{g})$, также является двусторонне $\mathfrak{b}$-инвариантным функционалом.

Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(V) \oplus \mathfrak{gl}(V)$ и $\mathfrak{b} \simeq \mathfrak{gl}(V)$ – диагональная подалгебра, т.е. $\mathfrak{b} = \{(x, x) \mid x \in \mathfrak{gl}(V)\}$. Пусть λ – разбиение и V^λ – неприводимый $\mathfrak{gl}(V)$-подмодуль в тензорной алгебре тождественного представления $\mathfrak{gl}(V)$, соответствующий разбиению λ (см. [14]). Тогда $\mathfrak{g}$-модуль $W^\lambda = V^\lambda \otimes (V^\lambda)^*$ неприводим и содержит единственный с точностью до постоянного множителя $\mathfrak{b}$-инвариантный вектор v_λ. Дуальный модуль $(W^\lambda)^*$ содержит подобный вектор v_λ^*. Пусть $\varphi_\lambda = \theta^\pi(v_\lambda^*, v_\lambda)$ – соответствующая сферическая функция.

Пусть $\dim V = (n|m)$, $I_{\bar 0} = \{1, \dots, n\}$, $I_{\bar 1} = \{\bar 1, \dots, \overline{m}\}$, $\{e_{ij} \mid i, j \in I = I_{\bar 0} \coprod I_{\bar 1}\}$ – базис $\mathfrak{gl}(V)$, состоящий из матричных единиц, $\mathfrak{h} = \operatorname{Span}(e_{ii} \mid i \in I)$ – подалгебра Картана, состоящая из диагональных матриц, и $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \varepsilon_{\bar 1}, \dots, \varepsilon_{\overline{m}}$ – левый дуальный базис к $\{e_{ii} \mid i \in I\}$ в $\mathfrak{h}^*$. Пусть $\mathfrak{h}^+ = \{(x, -x) \mid x \in \mathfrak{h}\}$. Мы отождествляем $\mathfrak{h}$ с $\mathfrak{h}^+$, так же как и $\mathfrak{h}^*$ с $(\mathfrak{h}^+)^*$. Положим

$$C_2 = \sum_{i,j \in I} (-1)^{p(j)} e_{ij} e_{ji}.$$

Легко проверить, что C_2 – центральный элемент в обертывающей алгебре $\mathfrak{gl}(V)$ и в $\mathfrak{g}$, если $\mathfrak{gl}(V)$ рассматривается как первое слагаемое в $\mathfrak{g}$.

Теорема 1.2. А. *Каждый двусторонне инвариантный функционал* $l \in U(\mathfrak{g})^*$ *однозначно определяется своим ограничением на* $S(\mathfrak{h}^+)$.

Б. *Пусть* $(S(\mathfrak{h}^+)^*)^{\mathrm{inv}}$ *– множество ограничений двусторонне инвариантных функционалов из* $U(\mathfrak{g})^*$ *на* $S(\mathfrak{h}^+)$. *Тогда для любого* $z \in Z(\mathfrak{g})$ *существует однозначно определенный оператор* Ω_z *на* $(S(\mathfrak{h}^+)^*)^{\mathrm{inv}}$. *Он определяется по формуле*

$$(\Omega_z l')(u) = (L^*(z)l)(u)$$

для любого $l' \in (S(\mathfrak{h}^+)^*)^{\mathrm{inv}}$ *и его расширения* $l \in U(\mathfrak{g})^*$.

В. *Вышеопределенный оператор Ω_{C_2}, соответствующий C_2, совпадает с оператором $\mathcal{M}$, определенным в формуле* (1.9), *для* $k = 1$.

Г. *Функции φ_λ, как функционалы на $S(\mathfrak{h}^+)$, совпадают с точностью до постоянного множителя с полиномами $SP_\lambda(x, y; 1)$, где $x_i = e^{\varepsilon_i}$ для $i \in I_{\bar 0}$ и $y_j = e^{\varepsilon_j}$ для $j \in I_{\bar 1}$.*

Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(V)$, $\dim V = (n|m)$ и $m = 2r$ – четное число. Пусть $\mathfrak{b} = \mathfrak{osp}(V)$ – ортогонально-симплектическая подалгебра Ли в $\mathfrak{gl}(V)$, которая сохраняет тензор

$$\sum_{i \in I_{\bar 0}} e_i^* \otimes e_i^* + \sum_{j \in I_{\bar 1}} (e_{\bar j}^* \otimes e_{\overline{j+r}}^* - e_{\overline{j+r}}^* \otimes e_{\bar j}^*). \tag{1.13}$$

Пусть ψ – инволютивный автоморфизм $\mathfrak{g}$ такой, что он выделяет $\mathfrak{osp}(V)$:

$$\mathfrak{osp}(V) = \{x \in \mathfrak{gl}(V) \mid \psi(x) = -x\}.$$

Пусть V^λ – $\mathfrak{g}$-подмодуль в тензорной алгебре тождественного представления, отвечающий разбиению λ. Согласно [15] V^λ содержит единственный с точностью до постоянного множителя $\mathfrak{b}$-инвариантный вектор $\tilde v_\lambda$ тогда и только тогда, когда $\lambda = 2\mu$, т.е. все строки λ имеют четную длину. Вектор $\tilde v_\lambda^* \in (V^\lambda)^*$ определяется подобным образом. Пусть $\tilde\varphi_\lambda = \theta(v_\lambda^*, v_\lambda)$ – соответствующий матричный коэффициент. Положим $\mathfrak{h}^+ = \{x \in \mathfrak{h} \mid \psi(x) = x\}$, где $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ – подалгебра Картана.

ТЕОРЕМА 1.3. А. *Каждый двусторонне инвариантный функционал на $U(\mathfrak{g})$ однозначно определяется своим ограничением на $S(\mathfrak{h}^+)$.*

Б. *Пусть $(S(\mathfrak{h}^+)^*)^{\mathrm{inv}}$ – множество ограничений двусторонне инвариантных функционалов. Тогда для каждого $z \in Z(\mathfrak{g})$ существует единственный оператор Ω_z на $(S(\mathfrak{h}^+)^*)^{\mathrm{inv}}$. Он определяется по формуле*

$$(\Omega_z l')(u) = (L^*(z)l)(u)$$

для любого $l' \in (S(\mathfrak{h}^+)^*)^{\mathrm{inv}}$ и его расширения $l \in U(\mathfrak{g})^*$.

В. *Оператор Ω_{C_2}, соответствующий C_2, совпадает с оператором $\mathcal{M}$, определенным в формуле* (1.9), *для $m = r$ и $k = 1/2$.*

Г. *Функционалы $\tilde\varphi_\lambda$, как функции на $S(\mathfrak{h}^+)$, совпадают с точностью до постоянного множителя с полиномами $SP_\mu(x, y; 1/2)$, где $\lambda = 2\mu$, $x_i = e^{2\varepsilon_i}$ для $1 \leqslant i \leqslant n$ и $y_j = e^{2\varepsilon_j}$ для $1 \leqslant j \leqslant r$.*

Инвариантный интеграл. Для каждого $\mathfrak{g}$-модуля W определим в $U(\mathfrak{g})^*$ подпространство $C(W)$, являющееся линейной оболочкой матричных коэффициентов W. Обозначим через $A(\mathfrak{g})$ подалгебру в $U(\mathfrak{g})^*$, порожденную матричными коэффициентами конечномерных представлений W, которые являются полупростыми при ограничении на $\mathfrak{g}_{\bar 0}$. Пусть алгебра $\mathfrak{g}_{\bar 0}$ редуктивна, ее представление на $\mathfrak{g}_{\bar 1}$ полупросто, а представление на максимальной внешней степени $\mathfrak{g}_{\bar 1}$ тривиально (равносильное требование: $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}\, x) = 0$

в модуле $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$, если $x \in \mathfrak{g}_{\bar{0}}$). На $A(\mathfrak{g})$ определим скалярное произведение $\langle l_1, l_2\rangle = F(l_1^t l_2)$, где $l \mapsto l^t$ – главный автоморфизм $U(\mathfrak{g})^*$ (он соответствует главному антиавтоморфизму $U(\mathfrak{g})$). Утверждение А следующей теоремы – это основной результат работы [5]. Дополнительное утверждение, которое мы доказываем, – это двусторонняя инвариантность интеграла.

Теорема 1.4. А. *На $A(\mathfrak{g})$ существует и единственный с точностью до ненулевого постоянного множителя двусторонне инвариантный* (*относительно левого и правого корегулярных представлений*) *линейный функционал F и $F(\varepsilon) = 0$, где ε – коединица в $U(\mathfrak{g})$.*

Б. *Если V_1 и V_2 – неизоморфные конечномерные простые $\mathfrak{g}$-модули, тогда $\langle l_1, l_2\rangle = 0$ для любых $l_1 \in C(V_1)$, $l_2 \in C(V_2)$.*

В. *Если $\dim V_{\bar{0}} \neq \dim V_{\bar{1}}$, тогда $\langle l_1, l_2\rangle = 0$ для любых $l_1, l_2 \in C(V)$.*

2. ДУАЛЬНОЕ СУПЕРПРОСТРАНСТВО К ОБЕРТЫВАЮЩЕЙ АЛГЕБРЕ

В этом разделе мы приводим некоторые факты, касающиеся супералгебр Ли, мы следуем при этом книге Диксмье [16]. Доказательства стандартны и поэтому опускаются. Пусть $\mathfrak{g}$ – супералгебра Ли, $U(\mathfrak{g})$ – ее обертывающая алгебра. Алгебра $U(\mathfrak{g})$ обладает каноническим антиавтоморфизмом $u \mapsto {}^t u$, заданным на элементах супералгебры $\mathfrak{g}$ по правилу ${}^t x = -x$. На элементы $U(\mathfrak{g})$ антиавтоморфизм можно распространить по правилу ${}^t(uv) = (-1)^{p(u)p(v)}\, {}^t v\, {}^t u$.

Мы наделяем $U(\mathfrak{g})^*$ структурой коалгебры:

$$c\colon U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g}),$$
$$c(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x \quad \forall x \in \mathfrak{g}.$$

Легко проверить, что ${}^t(c(x)) = c({}^t x)$, где первый индекс t – канонический антиавтоморфизм $U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g}) \simeq U(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g})$.

Лемма 2.1. *Пусть $\dim \mathfrak{g} = (n|m)$. Тогда алгебра $U(\mathfrak{g})^*$ изоморфна алгебре формальных степенных рядов от n четных и m нечетных переменных.*

Левое и правое корегулярные представления. Положим

$$(L^*(u)l)(v) = (-1)^{p(u)p(l)} l({}^t uv),$$
$$(R^*(u)l)(v) = (-1)^{p(u)(p(l)+p(v))} l(vu) \quad \forall u, v \in U(\mathfrak{g}), \quad l \in U(\mathfrak{g})^*.$$

Следующие утверждения легко проверяются:

1) $u \mapsto L^*(u)$ – представление $U(\mathfrak{g})$ в $U(\mathfrak{g})^*$ (называемое *левым корегулярным* представлением);

2) $u \mapsto R^*(u)$ – представление $U(\mathfrak{g})$ в $U(\mathfrak{g})^*$ (называемое *правым корегулярным* представлением);

3) $L^*(x)$ и $R^*(x)$ являются супердифференцированиями супералгебры $U(g)^*$.

Заметим также, что супералгебра $U(\mathfrak{g})^*$ обладает каноническим автоморфизмом $l \mapsto l^t$, где $l^t(u) = l({}^t u)\ \forall u \in U(\mathfrak{g}),\ l \in U(\mathfrak{g})^*$.

Матричные коэффициенты. Пусть V – $\mathfrak{g}$-модуль, $\pi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ – соответствующее представление, V^* – дуальный модуль. Для любых $v \in V$ и $v^* \in V^*$ определим линейную форму $\theta^\pi(v^*, v)$ на $U(\mathfrak{g})^*$, полагая

$$\theta^\pi(v^*, v)(u) = (-1)^{p(u)p(v)} v^*(\pi(u)v). \tag{2.1}$$

Обозначим через $C(\pi)$ или $C(V)$ подпространство в $U(\mathfrak{g})^*$, порожденное $\theta^\pi(v^*, v)$ для всех $v \in V$ и $v^* \in V^*$.

Лемма 2.2. А. $\theta^{\pi_1 \otimes \pi_2}(v_1^* \otimes v_2^*, v_1 \otimes v_2) = (-1)^{p(v_1)p(v_2^*)}\theta^{\pi_1}(v_1^*, v_1)\theta^{\pi_2}(v_2^*, v_2)$.

Б. $C(\pi_1 \otimes \pi_2) = C(\pi_1)C(\pi_2)$.

В. *Если π – конечномерное представление, тогда*

$$\big(\theta^\pi(v^*, v)\big)^t = (-1)^{p(v)p(v^*)}\theta^{\pi^*}(v, v^*).$$

Будем рассматривать $U(\mathfrak{g})^*$ как $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$-модуль относительно левого и правого корегулярных представлений. Тогда справедливы следующие леммы

Лемма 2.3. *Отображение $V^* \otimes V \to U(\mathfrak{g})^*$, заданное формулой $(v^*, v) \mapsto \theta^\pi(v^*, v)$, является гомоморфизмом $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$-модулей. Если $\mathfrak{g}$-модуль V неприводим, то вышеопределенное отображение имеет тривиальное ядро.*

Рассмотрим $(V^* \otimes V) \otimes (V^* \otimes V)$ как $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$-модуль.

Лемма 2.4. *Пусть V – неприводимый $\mathfrak{g}$-модуль. Тогда отображение*

$$\varphi\colon V^* \otimes V \otimes V^* \otimes V \to U(\mathfrak{g}^*),$$

$$\varphi(v_1^* \otimes v_1 \otimes v_2^* \otimes v_2) = (-1)^{p(v_1^*)p(v_2^*)+p(v_1)p(v_2^*)+p(v_1^*)p(v_1)}\big(\theta^{\pi_1}(v_2^*, v_1)\big)^t\theta^{\pi_2}(v_1^*, v_2)$$

является гомоморфизмом $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$-модулей.

Лемма 2.5. *Пусть V – конечномерный $\mathfrak{g}$-модуль, π – соответствующее представление. Пусть $\{v_i\}_{i \in I}$ – базис V, $\{v_i^*\}_{i \in I}$ – дуальный базис V^*. Тогда*

$$\sum_i (\theta^\pi(v^*, v_i))^t\theta^\pi(v_i^*, v) = (v^*, v)\varepsilon$$

для любого $v \in V$ и $v^* \in V^*$, где ε – коединица $U(g)^*$.

Пусть $\mathfrak{g}$ – супералгебра Ли такая, что алгебра $\mathfrak{g}_{\bar 0}$ редуктивна, ее представление на $\mathfrak{g}_{\bar 1}$ полупросто, а представление на максимальной внешней степени $\mathfrak{g}_{\bar 1}$ тривиально. Пусть $A(\mathfrak{g})$ – подалгебра в $U(\mathfrak{g})^*$, порожденная матричными коэффициентами конечномерных представлений таких, что их ограничение на $\mathfrak{g}_{\bar 0}$ полупросто. Легко проверить, что подалгебра $A(\mathfrak{g})$ инвариантна относительно левого и правого корегулярных представлений. В разделе 7 будет доказано существование на $A(\mathfrak{g})$ нетривиального и инвариантного относительно левого и правого корегулярных представлений функционала F (интеграл Березина).

Лемма 2.6. *Пусть* W – *неприводимое подпредставление* $\pi\colon \mathfrak{g}\to T(V)$. *Тогда*:

1) $\langle\theta^\pi(w_1^*,w_1),\theta^\pi(w_2^*,w_2)\rangle=(-1)^{p(w_1^*)p(w_2^*)+p(w_1^*)p(w_1)+p(w_1)p(w_2^*)}d_W w_1^*(w_2)w_2^*(w_1)$ *для любых* $w_1,w_2\in W$ *и* $w_1^*,w_2^*\in W^*$, *где* d_W *зависит только от* W;

2) *пусть* $\dim W_{\bar 0}\neq\dim W_{\bar 1}$, *тогда* $\langle l_1,l_2\rangle=0$ *для любых* $l_1,l_2\in C(W)$.

3. СУПЕРАНАЛОГ ОПЕРАТОРА КАЛОДЖЕРО

Мы будем придерживаться здесь обозначений раздела 1. Положим для $\alpha\in R$

$$\Delta_\alpha^+=e^{\frac{\alpha}{2}}+e^{-\frac{\alpha}{2}},\qquad \Delta_\alpha^-=e^{\frac{\alpha}{2}}-e^{-\frac{\alpha}{2}},$$

$$\Delta_1=\prod_{\alpha\in R_{11}^+}\Delta_\alpha^-,\qquad \Delta_2=\prod_{\beta\in R_{22}^+}\Delta_\beta^-,\qquad \Delta_{12}=\prod_{\gamma\in R_{12}}\Delta_\gamma^-,$$

$$\delta^{(k)}=\Delta_1^k\Delta_2^{\frac{1}{k}}\Delta_{12}^{-1}.$$

Определим оператор

$$\mathcal{M}^*=\sum_{i=1}^n\partial_i^2-k\sum_{\bar j=1}^m\partial_{\bar j}^2+k\sum_{\alpha\in R_{11}^+}\frac{\Delta_\alpha^+}{\Delta_\alpha^-}\partial_\alpha-\sum_{\beta\in R_{22}^+}\frac{\Delta_\beta^+}{\Delta_\beta^-}\partial_\beta-\sum_{\gamma\in R_{12}}\frac{\Delta_\gamma^+}{\Delta_\gamma^-}\partial_{\gamma,k},\tag{3.1}$$

где ∂_α, ∂_β, $\partial_{\gamma,k}$ определены в (1.10).

Доказательство леммы 1.1. Докажем равенство

$$\delta^{(k)}\mathcal{M}^*(\delta^{(k)})^{-1}=\mathcal{SL}-(\rho_k,\rho_k)_k,$$

эквивалентное утверждению леммы 1.1. Следующие равенства легко проверяются:

$$\partial_i(\Delta_\alpha^+)=\frac{1}{2}\alpha(e_i)\Delta_\alpha^-,\qquad \partial_i(\Delta_\alpha^-)=\frac{1}{2}\alpha(e_i)\Delta_\alpha^+,\qquad \alpha\in R,\tag{3.2}$$

$$\delta^{(k)}\partial_i(\delta^{(k)})^{-1}=\partial_i-\frac{k}{2}\sum_{\alpha\in R_{11}^+}\alpha(e_i)\frac{\Delta_\alpha^+}{\Delta_\alpha^-}+\frac{1}{2}\sum_{\gamma\in R_{12}}\gamma(e_i)\frac{\Delta_\gamma^+}{\Delta_\gamma^-},\qquad i\in I_{\bar 0},\tag{3.3}$$

$$\delta^{(k)}\partial_i(\delta^{(k)})^{-1}=\partial_i-\frac{1}{2k}\sum_{\beta\in R_{22}^+}\beta(e_i)\frac{\Delta_\beta^+}{\Delta_\beta^-}+\frac{1}{2}\sum_{\gamma\in R_{12}}\gamma(e_i)\frac{\Delta_\gamma^+}{\Delta_\gamma^-},\qquad i\in I_{\bar 1}.\tag{3.4}$$

Оператор $\mathcal{M}^*$ может быть выражен в виде

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^*={}&\sum_{i\in I_{\bar 0}}\partial_i^2-k\sum_{j\in I_{\bar 1}}\partial_j^2+k\sum_{\alpha\in R_{11}^+,\ i\in I_{\bar 0}}\alpha(e_i)\frac{\Delta_\alpha^+}{\Delta_\alpha^-}\partial_i-\\&-\sum_{\beta\in R_{22}^+,\ j\in I_{\bar 1}}\beta(e_j)\frac{\Delta_\beta^+}{\Delta_\beta^-}\partial_j-\sum_{\gamma\in R_{12},\ i\in I_{\bar 0}}\gamma(e_i)\frac{\Delta_\gamma^+}{\Delta_\gamma^-}\partial_i+\\&+k\sum_{\gamma\in R_{12},\ j\in I_{\bar 1}}\gamma(e_j)\frac{\Delta_\gamma^+}{\Delta_\gamma^-}\partial_j.\end{aligned}\tag{3.5}$$

Далее положим $X_\alpha = \Delta_\alpha^+/\Delta_\alpha^-$ для $\alpha \in R^+$ и пусть

$$\begin{aligned} \varphi_i &= \sum_{\alpha \in R_{11}^+} \alpha(e_i) X_\alpha, & f_i &= \sum_{\gamma \in R_{12}^+} \gamma(e_i) X_\gamma, \quad i \in I_{\bar 0}, \\ h_j &= \sum_{\beta \in R_{22}^+} \beta(e_j) X_\beta, & g_j &= \sum_{\gamma \in R_{12}^+} \gamma(e_j) X_\gamma, \quad j \in I_{\bar 1}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Следующие равенства легко проверяются:

$$\begin{aligned} \delta^{(k)} \partial_i^2 (\delta^{(k)})^{-1} &= \partial_i^2 + (f_i - k\varphi_i)\partial_i + \frac{1}{4}(f_i - k\varphi_i)^2 + \frac{1}{2}(\partial_i f_i - k\partial_i \varphi_i), \quad i \in I_{\bar 0}, \\ \delta^{(k)} \partial_j^2 (\delta^{(k)})^{-1} &= \partial_j^2 + \left(g_j - \frac{1}{k} h_j\right)\partial_j + \frac{1}{4}\left(g_j - \frac{1}{k} h_j\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\partial_j g_j - \frac{1}{k}\partial_j h_j\right), \quad j \in I_{\bar 1}. \end{aligned}$$

Следовательно, после несложных преобразований получим

$$\begin{aligned} \delta^{(k)} \mathcal{M}^* (\delta^{(k)})^{-1} = {} & \sum_{i \in I_{\bar 0}} \partial_i^2 - 2k(k-1) \sum_{\alpha \in R_{11}} \frac{1}{(\Delta_\alpha^-)^2} - (k\rho_1, k\rho_1)_1 - \\ & - k\left(\sum_{j \in I_{\bar 1}} \partial_j^2 - \frac{2}{k}\left(\frac{1}{k} - 1\right) \sum_{\beta \in R_{22}} \frac{1}{(\Delta_\beta^-)^2} - \left(\frac{1}{k}\rho_2, \frac{1}{k}\rho_2\right)_2 \right) + \\ & + \left[-\frac{1}{4} \sum_{i \in I_{\bar 0}} f_i^2 + \frac{k}{2} \sum_{i \in I_{\bar 0}} f_i \varphi_i + \frac{1}{2} \sum_{i \in I_{\bar 0}} \partial_i f_i + \right. \\ & \left. + \frac{k}{4} \sum_{j \in I_{\bar 1}} g_j^2 - \frac{1}{2} \sum_{j \in I_{\bar 1}} g_j h_j - \frac{k}{2} \sum_{j \in I_{\bar 1}} \partial_j g_j \right]. \end{aligned}$$

Легко проверить, что $\partial_i(X_\gamma) = \gamma(e_i)(1 - X_\gamma^2)/2$. Остается преобразовать слагаемое в квадратных скобках (мы предполагаем, что $\gamma, \gamma_1, \gamma_2 \in R_{12},\ \alpha \in R_{11}^+,\ \beta \in R_{22}^+,\ i \in I_{\bar 0}$, $j \in I_{\bar 1}$, а также $\{\gamma_1, \gamma_2\}$ означает неупорядоченную пару различных элементов из R_{12}).

Легко проверить, что справедливо равенство

$$\sum_{\{\gamma_1, \gamma_2\}} (\gamma_1, \gamma_2)_2 X_{\gamma_1} X_{\gamma_2} + \sum_{\gamma, \alpha} (\gamma, \alpha)_1 X_\gamma X_\alpha = \sum_{\{\gamma_1, \gamma_2\}} (\gamma_1, \gamma_2)_2 + \sum_{\gamma, \alpha} (\gamma, \alpha)_1.$$

Аналогично доказывается равенство

$$\sum_{\{\gamma_1, \gamma_2\}} (\gamma_1, \gamma_2)_1 X_{\gamma_1} X_{\gamma_2} + \sum_{\gamma, \beta} (\gamma, \beta)_2 X_\gamma X_\beta = \sum_{\{\gamma_1, \gamma_2\}} (\gamma_1, \gamma_2)_1 + \sum_{\gamma, \alpha} (\gamma, \beta)_2.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\delta^{(k)}\mathcal{M}^*(\delta^{(k)})^{-1} &= \sum_{i\in I_{\bar 0}}\partial_i^2 - 2k(k-1)\sum_{\alpha\in R_{11}}\frac{1}{(\Delta_\alpha^-)^2} - (k\rho_1,k\rho_1)_1 - \\ &\quad - k\left(\sum_{j\in I_{\bar 1}}\partial_j^2 - \frac{2}{k}\left(\frac{1}{k}-1\right)\sum_{\beta\in R_{22}}\frac{1}{(\Delta_\beta^-)^2} - \left(\frac{1}{k}\rho_2,\frac{1}{k}\rho_2\right)_2\right) - \\ &\quad - 2\sum_{\{\gamma_1,\gamma_2\}}\frac{(\gamma_1,\gamma_2)_k}{(\Delta_\gamma^-)^2} + \frac{k}{2}\left(\sum_{\{\gamma_1,\gamma_2\}}(\gamma_1,\gamma_2)_2 + \sum_{\gamma,\alpha}(\gamma,\alpha)_1\right) - \\ &\quad - \frac{1}{2}\left(\sum_{\{\gamma_1,\gamma_2\}}(\gamma_1,\gamma_2)_1 + \sum_{\gamma,\alpha}(\gamma,\beta)_2\right) - \frac{1}{4}\sum_{\gamma}(\gamma,\gamma)_k = \\ &= \sum_{i\in I_{\bar 0}}\partial_i^2 - 2k(k-1)\sum_{\alpha\in R_{11}}\frac{1}{(\Delta_\alpha^-)^2} - (k\rho_1,k\rho_1)_1 - \\ &\quad - k\left(\sum_{j\in I_{\bar 1}}\partial_j^2 - \frac{2}{k}\left(\frac{1}{k}-1\right)\sum_{\beta\in R_{22}}\frac{1}{(\Delta_\beta^-)^2} - \left(\frac{1}{k}\rho_2,\frac{1}{k}\rho_2\right)_2\right) - \\ &\quad - 2\sum_{\{\gamma_1,\gamma_2\}}\frac{(\gamma_1,\gamma_2)_k}{(\Delta_\gamma^-)^2} - (\rho_{12},\rho_{12})_k + (\rho_{12},k\rho_1)_k - \left(\rho_{12},\frac{1}{k}\rho_2\right)_k.\end{aligned}$$

Лемма доказана.

4. СУПЕРАНАЛОГИ ПОЛИНОМОВ ДЖЕКА

Обычные полиномы Джека. Пусть $t_1, t_2, \ldots$ – последовательность независимых переменных, Λ – алгебра симметрических функций, λ – разбиение, а $t^\lambda \equiv t_1^{\lambda_1}t_2^{\lambda_2}\ldots$. Мономиальные симметрические функции m_λ являются суммой всех различных мономов, которые получаются из t^λ перестановкой t_i. Можно определить степенные суммы $p_r = \sum_i t_i^r$ и $p_\lambda = p_{\lambda_1}p_{\lambda_2}\ldots$. Полиномы Джека P_λ индексируются разбиениями и рационально зависят от параметра k (мы используем параметр $k = 1/\alpha$, обратный параметру Макдональда). Они характеризуются следующими свойствами:

$$P_\lambda = m_\lambda + \text{члены меньшего лексикографического порядка},$$
$$(P_\lambda, P_\mu) = 0, \quad \text{если} \quad \lambda \neq \mu,$$

где скалярное произведение определяется по формуле

$$(p_\lambda, p_\mu) = \delta_{\lambda,\mu}k^{-l(\lambda)}z_\lambda, \qquad z_\lambda = \prod i^{\mu_i}(\mu_i!).$$

Полагая $t_{N+1} = t_{N+2} = \cdots = 0$ в P_λ, мы можем рассматривать полиномы Джека от конечного числа переменных; они допускают другое описание. Пусть $t_1, \ldots, t_N$ – переменные и u – дополнительная переменная. Рассмотрим семейство дифференциальных операторов $D(u,k)$, называемых *операторами Секигучи* и определяемых по формуле

$$D(u,k)=\sum_{p=1}^{N}u^pD_p^{(k)}=V(t)^{-1}\det\bigl[t_i^{N-j}(t_i\partial t_i+(N-j)k+u)\bigr]_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant N},\tag{4.1}$$

где $V(t)=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant N}(t_i-t_j)$. Тогда полиномы Джека $P_\lambda(t_1,\dots,t_N)$, где λ – разбиение такое, что $\lambda_{N+1}=0$, однозначно определяются следующими свойствами:

1) $P_\lambda(t_1,\dots,t_N)$ симметричен относительно $t_1,\dots,t_N$;

2) $P_\lambda(t_1,\dots,t_N)=t_1^{\lambda_1}\dots t_N^{\lambda_N}$ + мономы меньшего лексикографического порядка;

3) $P_\lambda(t_1,\dots,t_N)$ – собственная функция операторов $D_p^{(k)}$. Более точно

$$D(u,k)P_\lambda(t_1,\dots,t_N)=\biggl(\prod_{i=1}^{N}(\lambda_i+(N-i)k+u)\biggr)P_\lambda(t_1,\dots,t_N).$$

Положим

$$\varphi(t)=\prod_{j=1}^{m}(1-y_jt)\prod_{i=1}^{n}(1-x_it)^{-k}$$

и $\varphi(t_1,\dots,t_N)=\varphi(t_1)\dots\varphi(t_N)=\varphi_N$.

Положим далее

$$\begin{aligned}\mathcal{H}={}&\sum_{i=1}^{n}\biggl(x_i\frac{\partial}{\partial x_i}\biggr)^2-k\sum_{j=1}^{m}\biggl(y_j\frac{\partial}{\partial y_j}\biggr)^2+k\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\frac{x_i+x_j}{x_i-x_j}\biggl(x_i\frac{\partial}{\partial x_i}-x_j\frac{\partial}{\partial x_j}\biggr)-\\&-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant m}\frac{y_i+y_j}{y_i-y_j}\biggl(y_i\frac{\partial}{\partial y_i}-y_j\frac{\partial}{\partial y_j}\biggr)-\\&-\sum_{1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant m}\frac{x_i+y_j}{x_i-y_j}\biggl(x_i\frac{\partial}{\partial x_i}+ky_j\frac{\partial}{\partial y_j}\biggr),\end{aligned}\tag{4.2}$$

$$\mathcal{L}_N=\sum_{i=1}^{N}\biggl(t_i\frac{\partial}{\partial t_i}\biggr)^2+k\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N}\frac{t_i+t_j}{t_i-t_j}\biggl(t_i\frac{\partial}{\partial t_i}-t_j\frac{\partial}{\partial t_j}\biggr).\tag{4.3}$$

Следующая лемма подобна лемме 3.1 из работы [17].

Лемма 4.1. *Справедливо равенство*

$$\mathcal{H}\varphi_N-\mathcal{L}_N\varphi_N=(k(n-N)-m)\biggl(\sum_{i=1}^{n}t_i\frac{\partial}{\partial t_i}\biggr)\varphi_N.\tag{4.4}$$

Доказательство несложно провести индукцией по N.

Доказательство теоремы 1.1. Легко проверить, что

$$\omega_k\left(\frac{1}{\prod_{i,l}(1-x_it_l)^k\prod_{j,l}(1-y_jt_l)^k}\right)=\frac{\prod_{j,l}(1-y_jt_l)}{\prod_{i,l}(1-x_it_l)^k}.$$

Тогда согласно тождеству Коши (см. [12])

$$\frac{1}{\prod_{i,l}(1-x_it_l)^k\prod_{j,l}(1-y_jt_l)^k}=\sum_\lambda\frac{1}{J_\lambda}P_\lambda(x,y,k)P_\lambda(t,k).$$

Применяя автоморфизм ω_k, получим

$$\omega_k\left(\frac{1}{\prod_{i,l}(1-x_it_l)^k\prod_{j,l}(1-y_jt_l)^k}\right)=\sum_\lambda\frac{1}{J_\lambda}\omega_k\big(P_\lambda(x,y,k)\big)P_\lambda(t,k).$$

Следовательно,

$$\frac{\prod_{j,l}(1-y_jt_l)}{\prod_{i,l}(1-x_it_l)^k}=\sum_\lambda\frac{1}{J_\lambda}SP_\lambda(x,y,k)P_\lambda(t,k)$$

и

$$\varphi_N=\sum_{\lambda_{N+1}=0}\frac{1}{j_\lambda}SP_\lambda(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m,k)P_\lambda(t_1,\dots,t_N,k).$$

Теперь согласно лемме 4.1 выполняется равенство (4.4). Введем оператор

$$\mathcal{L}_N^*=\mathcal{L}_N+(k(n-N)-m)+\left(\sum_{i=1}^n t_i\frac{\partial}{\partial t_i}\right).$$

Тогда

$$\sum_{\lambda_{N+1}=0}\frac{1}{j_\lambda}\mathcal{H}\big(SP_\lambda(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m,k)\big)P_\lambda(t_1,\dots,t_N,k)=$$
$$=\sum_{\lambda_{N+1}=0}\frac{1}{j_\lambda}SP_\lambda(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m,k)\mathcal{L}^*\big(P_\lambda(t_1,\dots,t_N,k)\big).$$

Известно, что $P_\lambda(t_1,\dots,t_N,k)$ являются собственными функциями оператора $\mathcal{L}^*$. Следовательно, $SP_\lambda(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m,k)$ являются собственными функциями оператора $\mathcal{H}$. Теорема доказана.

5. СФЕРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И РАДИАЛЬНЫЕ ЧАСТИ ОПЕРАТОРОВ ЛАПЛАСА ДЛЯ ПАРЫ $(\mathfrak{gl}\oplus\mathfrak{gl},\mathfrak{gl})$

Пусть $\mathfrak{g}=\mathfrak{gl}(V)$ – супералгебра Ли линейных преобразований $(n|m)$-мерного суперпространства V, $\mathfrak{h}$ – подалгебра Картана, R – система корней, $U(\mathfrak{g})$ – обертывающая алгебра и $U(\mathfrak{g})^*$ – дуальное пространство, наделенное структурой супералгебры. Для любого ad-инвариантного функционала на пространстве $U(\mathfrak{g})$ (т.е. для любого l такого, что $l(u,v)=(-1)^{p(u)p(v)}l(v,u)$) обозначим через φ_l производящую функцию его ограничения на $S(\mathfrak{h})$, именно

$$\varphi_l(t_1,\dots,t_n)=\sum\frac{l(e_{11}^{\nu_1}\dots e_{nn}^{\nu_n})}{(\nu_1)!\dots(\nu_n)!}t_1^{\nu_1}\dots t_n^{\nu_n}. \tag{5.1}$$

На $S(\mathfrak{h})^*$ определим следующие операторы для любого $f\in S(\mathfrak{h})$:

$$(\partial_i l)(f)=l(e_{ii}f),\qquad (D_{ij}l)(f)=l(e_{ij}e_{ji}f). \tag{5.2}$$

Лемма 5.1. *Пусть* $\alpha=\varepsilon_i-\varepsilon_j$. *Тогда*

$$D_{ij}=\frac{e^\alpha}{e^\alpha-1}(\partial_i-(-1)^{p(i)+p(j)}\partial_j).$$

Доказательство. Действительно,

$$\begin{aligned}(D_{ij}l)(f)&=l(fe_{ij}e_{ji})=l\big(e_{ij}f(h+\alpha(h))e_{ji}\big)=(-1)^{p(i)+p(j)}l\big(f(h+\alpha(h))e_{ji}e_{ij}\big)=\\&=l\big(f(h+\alpha(h))e_{ij}e_{ji}\big)-l\big(f(h+\alpha(h))[e_{ij},e_{ji}]\big)=\\&=(e^\alpha D_{ij}l)(f)-l\big(f(h+\alpha(h))(e_{ii}-(-1)^{p(i)+p(j)}e_{jj})\big)=\\&=\big(e^\alpha D_{ij}-e^\alpha(\partial_i-(-1)^{p(i)+p(j)}\partial_j)\big)(l)(f).\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Лемма 5.2. *Пусть* $\mathfrak{g}$ *– супералгебра Ли,* $\mathfrak{b}=\{(x,x)\mid x\in\mathfrak{g}\}$ *– ее диагональная подалгебра,* I *– левый идеал в* $U(\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g})$, *порожденный* $\mathfrak{b}$ *и* $M=U(\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g})/I$. *Пусть* $\sigma\colon\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}$ *– вложение в первое слагаемое, т.е.* $\sigma(x)=(x,0)$. *Пусть* $\tilde\sigma\colon U(\mathfrak{g})\to M$ *– отображение, индуцированное гомоморфизмом* $U(\mathfrak{g})\to U(\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g})$, *которое продолжает* σ, *и* $\rho(x)=(x,x)$ *– изоморфизм* $\mathfrak{g}$ *с* $\mathfrak{b}$. *Тогда* $\tilde\sigma([x,u])=\rho(x)\tilde\sigma(u)$.

Следствие 5.1. *Алгебра функционалов на* $U(\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g})$, *двусторонне инвариантных относительно* $\mathfrak{b}$, *изоморфна алгебре функционалов на* $U(\mathfrak{g})$, *инвариантных относительно присоединенного действия.*

Доказательство сводится к прямой проверке.

Лемма 5.3. *Пусть* $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(V)$, $\mathfrak{h}$ – *подалгебра Картана в* $\mathfrak{g}$, *тогда*

$$U(\mathfrak{g}) = S(\mathfrak{h}) + [U(\mathfrak{g}), U(\mathfrak{g})].$$

Доказательство. Любой элемент из $U(\mathfrak{g})$ может быть представлен как сумма элементов вида $fX_{\alpha_1} \dots X_{\alpha_r}$, где $f \in S(\mathfrak{h})$, $\alpha_i \in R$ (R – система корней $\mathfrak{g}$), X_{α_i} – элемент веса α_i. Следовательно, для доказательства леммы достаточно показать, что для $r > 0$ $fX_{\alpha_1} \dots X_{\alpha_r} \in [U(g), U(g)]$. Проведем индукцию по r.

Если $r = 1$, тогда $[X_\alpha, f] = \big(f(h - \alpha(h)) - f(h)\big)X_\alpha = R_\alpha(f)X_\alpha$. Однако, как легко видеть, любой элемент из $S(\mathfrak{h})$ может быть представлен как $R_\alpha(f)$. Если $r > 1$, тогда

$$\begin{aligned}[X_{\alpha_1}, fX_{\alpha_2} \dots X_{\alpha_r}] = [X_{\alpha_1}, f]X_{\alpha_2} \dots X_{\alpha_r} + f[X_{\alpha_1}, X_{\alpha_2}]X_{\alpha_3} \dots X_{\alpha_r} + \\ + (-1)^{p(X_{\alpha_1})p(X_{\alpha_2})} fX_{\alpha_2}[X_{\alpha_1}, X_{\alpha_3}]X_{\alpha_4} \dots X_{\alpha_r} + \\ + (-1)^{p(X_{\alpha_1})(p(X_{\alpha_2}) + p(X_{\alpha_3}))} fX_{\alpha_2}X_{\alpha_3}[X_{\alpha_1}, X_{\alpha_4}]X_{\alpha_5} \dots X_{\alpha_r} + \cdots .\end{aligned}$$

Но $[X_\alpha, f]X_\alpha = R_\alpha(f)X_\alpha$, и по предположению индукции $fX_{\alpha_1} \dots X_{\alpha_r} \in [U(\mathfrak{g}), U(\mathfrak{g})]$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1.2. Лемма 5.3 сразу влечет утверждение А. Утверждение Б очевидно. Докажем утверждение В. Пусть l – инвариантный функционал на $U(\mathfrak{g})$, φ_l – производящая функция его ограничения на $S(\mathfrak{h})$. Тогда с учетом леммы 5.2 получим

$$\begin{aligned}\Omega(\varphi_l) = \Big(\sum_{i,j \in I} (-1)^{p(j)} e_{ij}e_{ji}\Big)\varphi_l = \Big(\sum_{i \in I_{\bar 0}} \partial_i^2 - \sum_{j \in I_{\bar 1}} \partial_j^2\Big)\varphi_l + \\ + \sum_{\alpha \in R^+} \Big((-1)^{p(j)} \frac{e^\alpha}{e^\alpha - 1}(\partial_i - (-1)^{p(i)+p(j)}\partial_j) + \\ + (-1)^{p(i)} \frac{e^{-\alpha}}{e^{-\alpha} - 1}(\partial_j - (-1)^{p(i)+p(j)}\partial_i)\Big)\varphi_l = \\ = \Big(\sum_{i \in I_{\bar 0}} \partial_i^2 - \sum_{j \in I_{\bar 1}} \partial_j^2 - \sum_{\alpha \in R^+} \frac{1 + e^\alpha}{1 - e^\alpha}((-1)^{p(j)}\partial_i - (-1)^{p(i)}\partial_j)\Big)\varphi_l.\end{aligned}$$

Докажем утверждение Г. Как легко проверить, $\theta = \sum_{i \in I} e_i \otimes e_i^*$ – $\mathfrak{b}$-инвариант, при условии, что $\{e_i\}_{i \in I}$ – базис в V и $\{e_i^*\}_{i \in I}$ – его левый дуальный базис. Аналогично $\theta^* = \sum_{i \in I} e_i^* \otimes e_i$ – также $\mathfrak{b}$-инвариант.

С точностью до постоянного множителя

$$\varphi_\lambda(u) = \theta^\pi((\theta^*)^{\otimes p}, \theta^{\otimes p})(u) = (\theta^*)^{\otimes p}((e_\lambda \times e_\lambda)u\theta^{\otimes p}) \quad \forall u \in U(g),$$

где e_λ – идемпотент в симметрической группе, соответствующий разбиению λ, и $\varphi_\lambda(u)$ пропорционально $(\theta^*)^{\otimes p}(e_\lambda \times 1u\theta^{\otimes p})$.

Разлагая
$$e_\lambda = \frac{1}{p!}\sum \chi^\lambda(\sigma)\sigma,$$
где χ^λ – характер соответствующего представления S_p, мы видим, что благодаря тождеству
$$\theta^{\pi_1\otimes\pi_2}(v_1^*\otimes v_2^*, v_1\otimes v_2) = (-1)^{p(v_1)p(v_2^*)}\theta^{\pi_1}(v_1^*, v_1)\theta^{\pi_2}(v_2^*, v_2) \tag{5.3}$$
достаточно рассмотреть случай, когда σ – цикл $(1,2,\dots,p)$. Пусть $\{e_{ii}\}_{i\in I}$ – базис $\mathfrak{h}$ и $\{\varepsilon_i\}_{i\in I}$ – левый дуальный базис; пусть e^l обозначает гомоморфизм $S(\mathfrak{h})$ в поле комплексных чисел, продолжающий линейную форму l. Достаточно учитывать только слагаемые, у которых $i_1 = i_2 = \dots = i_p$, в соотношении
$$\theta^{\otimes p} = \sum_{i_1,\dots,i_p\in I} e_{i_1}\otimes e_{i_1}^*\otimes\dots\otimes e_{i_p}\otimes e_{i_p}^*.$$

Следовательно, если $\sigma = (1,2,\dots,p)$, тогда
$$\begin{aligned}(\theta^*)^{\otimes p}(u\sigma\theta^{\otimes p}) &= (\theta^*)^{\otimes p}\Bigl(\sum_{i\in I}(e_i\otimes e_i^*)^{\otimes p}\Bigr) = \sum_{i\in I}(\theta^*)^{\otimes p}(u\sigma\theta^{\otimes p}) = \\ &= \sum_{i\in I}(\theta^*)^{\otimes p}\bigl((-1)^{(p-1)i}u(e_i\otimes e_i^*)^{\otimes p}\bigr) = \\ &= \sum_{i\in I}(-1)^{(p-1)i}e^{p\varepsilon_i}(u)(\theta^*)^{\otimes p}(e_i\otimes e_i^*) = \\ &= \sum_{i\in I}(-1)^i e^{p\varepsilon_i}(u) = \sum_{i\in I_{\bar 0}} x_i^p - \sum_{j\in I_{\bar 1}} y_j^p.\end{aligned}$$

Это означает, что с точностью до постоянного множителя $\varphi_\lambda = \sum(\chi_\mu^\lambda/Z_\mu)sp_\mu$, где χ_μ^λ – значение характера симметрической группы на элементе циклового типа μ, $Z_\mu = \prod i^{\mu_i}(\mu_i)!$ и
$$sp_\mu = \Bigl(\sum_{i\in I_{\bar 0}} x_i^{\mu_1} - \sum_{j\in I_{\bar 1}} y_j^{\mu_1}\Bigr)\Bigl(\sum_{i\in I_{\bar 0}} x_i^{\mu_2} - \sum_{j\in I_{\bar 1}} y_j^{\mu_2}\Bigr)\dots .$$

Поэтому φ_λ с точностью до постоянного множителя совпадает с $SP_\lambda(x,y,1)$. Теорема доказана.

6. СФЕРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И РАДИАЛЬНЫЕ ЧАСТИ ОПЕРАТОРОВ ЛАПЛАСА ДЛЯ ПАРЫ $(\mathfrak{gl}, \mathfrak{osp})$

Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(V)$, где $\dim V = (n|2r)$. Пусть также $I_{\bar 0} = \{1,\dots,n\}$ и $I_{\bar 1} = \{\bar 1,\dots,\overline{2r}\}$, а $\{e_{ij}\}_{i,j\in I}$ – базис, состоящий из матричных единиц в $\mathfrak{gl}(V)$. Легко проверить, что антиавтоморфизм супертранспонирования в $\mathfrak{gl}(V)$ имеет вид
$${}^te_{ij} = (-1)^{p(i)(p(j)+1)}e_{ji}. \tag{6.1}$$

Далее положим $\varepsilon(i) = 1$, если $i \in I_{\bar 0} \cup \{\overline{r+1}, \dots, \overline{2r}\}$, и $\varepsilon(i) = -1$, если $i \in \{\bar 1, \dots, \bar r\}$. Положим $\delta(i) = i + \bar r \pmod{\overline{2r}}$, если $i \in I_{\bar 1}$, и $\delta(i) = i$, если $i \in I_{\bar 0}$. Теперь определим оператор S:

$$Se_i = \varepsilon(i) e_{\delta(i)}. \tag{6.2}$$

Ясно, что $S^2 = J$, где J – оператор четности в V, т.е. $Je_i = (-1)^{p(i)} e_i$ и, следовательно, $SJ = JS$, более того, ${}^tS = SJ = JS = S^3 = S^{-1}$. Для любого $x \in \mathfrak{gl}(V)$ положим $\psi(x) = S^t x S^{-1}$. Несложно проверить, что ψ – инволютивный антиавтоморфизм ассоциативной супералгебры $\mathrm{Mat}(V)$, т.е. $\psi^2 = 1$ и $\psi(xy) = (-1)^{p(x)p(y)} \psi(y)\psi(x)$, причем $\psi(e_{ij}) = (-1)^{p(i)p(j)} \varepsilon(j) \varepsilon(\delta(i)) e_{\delta(j)\delta(i)}$. Легко видеть, что $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^- \oplus \mathfrak{g}^+$, где $\mathfrak{g}^- = \{x \in \mathfrak{g} \mid \psi(x) = -x\}$ и $\mathfrak{g}^+ = \{x \in g \mid \psi(x) = x\}$. Заметим, что $\mathfrak{g}^-$ – подалгебра Ли в $\mathfrak{gl}(V)$, изоморфная $\mathfrak{osp}(V)$, и $\mathfrak{g}^+$ – $\mathfrak{g}^-$-модуль. Для любого $x \in \mathfrak{g}$ положим

$$x^+ = \frac{1}{2}(x + \psi(x)), \qquad x^- = \frac{1}{2}(x - \psi(x)),$$

что соответствует разложению $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^- \oplus \mathfrak{g}^+$.

Пусть $\mathfrak{h}$ – подалгебра Картана в $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}^+ = \mathrm{Span}(e_{ii}^+ \mid i \in I)$.

ЛЕММА 6.1. *Для* $f \in S(\mathfrak{h}^+)$ *и* $\alpha = \varepsilon_i - \varepsilon_j$ *положим*

$$R_{ij}^- f = \frac{1}{2}\bigl[f(h - \alpha(h)) - f(h + \alpha(h))\bigr], \qquad R_{ij}^+ f = \frac{1}{2}\bigl[f(h - \alpha(h)) + f(h + \alpha(h))\bigr].$$

Тогда справедливы следующие равенства:

1) $e_{ij}^- f = R_{ij}^+ f e_{ij}^- + R_{ij}^- f e_{ij}^+$;
2) $R_{ij}^- f e_{ij} e_{ji} - (R_{ij}^- - R_{ij}^+) f \cdot [e_{ij}^-, e_{ji}^+] \in \mathfrak{g}^- U(\mathfrak{g}) + U(\mathfrak{g})\mathfrak{g}^-$;
3) $[e_{ij}^-, e_{ij}^+] = (e_{ii}^+ - (-1)^{p(i)+p(j)} e_{jj}^+)/2$;
4) *если* $h \in \mathfrak{h}$ *и* $\alpha = \varepsilon_i - \varepsilon_j$, *тогда*

$$[h, e_{ij}^+] = \alpha(h) e_{ij}^-, \qquad [h, e_{ij}^-] = \alpha(h) e_{ij}^+.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО сводится к прямой проверке.

ЛЕММА 6.2. *Пусть* $I = \mathfrak{g}^- U(\mathfrak{g}) + U(\mathfrak{g})\mathfrak{g}^-$. *Тогда* $U(\mathfrak{g}) = S(\mathfrak{h}^+) + I$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что для $q > 0$ $u = f e_{\alpha_1}^+ \dots e_{\alpha_q}^+ \in I$, где $f \in S(\mathfrak{h}^+)$ и $e_{\alpha_1}^+, \dots, e_{\alpha_q}^+ \in \mathfrak{g}^+$ являются весовыми векторами. Проведем индукцию по q. Если $q = 1$ и $f \in S(\mathfrak{h}^+)$, то согласно лемме 6.1, п. 1 имеем $R_{ij}^- f e_{ij}^+ = e_{ij}^- f - R_{ij}^+ f e_{ij}^-$. Следовательно, $R_{ij}^- f e_{ij}^+ \in I$, поэтому $f e_{ij}^+ \in I$. Пусть $q > 1$. Тогда

$$\begin{aligned}
R_{\alpha_1}^- f e_{\alpha_1}^+ \dots e_{\alpha_q}^+ &= e_{\alpha_1}^- f e_{\alpha_2}^+ \dots e_{\alpha_q}^+ - R_{\alpha_1}^+ f e_{\alpha_1}^- e_{\alpha_2}^+ \dots e_{\alpha_q}^+ \equiv \\
&\equiv -R_{\alpha_1}^+ f e_{\alpha_1}^- e_{\alpha_2}^+ \dots e_{\alpha_q}^+ \pmod{I} \equiv R_{\alpha_1}^+ f \cdot [e_{\alpha_1}^-, e_{\alpha_2}^+ \dots e_{\alpha_q}^+] = \\
&= -R_{\alpha_1}^+ f \cdot [e_{\alpha_1}^-, e_{\alpha_2}^+] e_{\alpha_3}^+ \dots e_{\alpha_q}^+ - R_{\alpha_1}^+ f e_{\alpha_2}^+ [e_{\alpha_1}^-, e_{\alpha_3}^+] \dots e_{\alpha_q}^+ + \dots \in I.
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Лемма 6.3. *Пусть* $\alpha=\varepsilon_i-\varepsilon_j,\ j\neq\delta(i),\ l$ – *двусторонне* $\mathfrak{b}$-*инвариантный функционал на* $U(\mathfrak{g})$ *и* φ_l – *производящая функция его ограничения на* $S(\mathfrak{h}^+)$. *Пусть* $D_{ij}(l)(f)=l(fe_{ij}e_{ji}),\ \partial_i^+(l)(f)=l(fe_{ii}^+)$, *где* $f\in S(\mathfrak{h}^+)$. *Тогда*

$$D_{ij}=\frac{e^{\alpha}}{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}\big(\partial_i^+-(-1)^{p(i)+p(j)}\partial_j^+\big).$$

Доказательство является следствием утверждения 2 леммы 6.1.

Доказательство теоремы 1.3. Утверждение А следует из леммы 6.2. Докажем утверждение Б. Пусть $\sum_{i,j\in I}(-1)^{p(j)}e_{ij}e_{ji}$ – оператор Лапласа для $\mathfrak{gl}(V)$. Согласно лемме 6.3 радиальная часть его ограничения на $S(\mathfrak{h}^+)$ имеет вид (мы исключаем корни $\beta=\varepsilon_i-\varepsilon_{\delta(i)}$, так как $e_{i\delta(i)}^+=0$)

$$\begin{aligned}\mathcal{M}=\sum_{i=1}^{n}\partial_i^2-\sum_{\bar j=1}^{2r}\partial_{\bar j}^2+\sum_{\alpha\in R_{11}^+}\frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}\partial_{\alpha}^+-\\ -\sum_{\beta\in R_{22}^+}\frac{e^{\beta}+e^{-\beta}}{e^{\beta}-e^{-\beta}}\partial_{\beta}^+-\sum_{\gamma\in R_{12}}\frac{e^{\gamma}+e^{-\gamma}}{e^{\gamma}-e^{-\gamma}}\partial_{\gamma,1}^+,\end{aligned}\tag{6.3}$$

где $\partial_\alpha=\partial_i^+-\partial_j^+,\ \partial_\beta=\partial_{\bar i}^+-\partial_{\bar j}^+,\ \partial_{\gamma,1}=\partial_{\bar i}^+-\partial_{\bar j}^+$.

Заметим теперь, что $\varepsilon_i|_{\mathfrak{h}^+}=\varepsilon_{\delta(i)}|_{\mathfrak{h}^+}$. Поэтому выражение (6.3) принимает вид

$$\begin{aligned}\mathcal{M}=\sum_{i=1}^{n}\partial_i^2-\sum_{\bar j=1}^{r}\partial_{\bar j}^2+\sum_{\alpha\in R_{11}^+}\frac{e^{2\alpha}+1}{e^{2\alpha}-1}\partial_{\alpha}^+-\\ -4\sum_{\beta\in\frac14 R_{22}^+}\frac{e^{2\beta}+1}{e^{2\beta}-1}\partial_{\beta}^+-2\sum_{\gamma\in\frac12 R_{12}}\frac{e^{2\gamma}+1}{e^{2\gamma}-1}\partial_{\gamma,1}^+,\end{aligned}\tag{6.4}$$

где

$$\frac14R_{22}=\left\{\varepsilon_i-\varepsilon_j\ \middle|\ i,j\in\frac12 I_{\bar 1}\right\},\quad \frac12R_{12}=\left\{\varepsilon_i-\varepsilon_j\ \middle|\ i\in I_{\bar 0},\ j\in\frac12 I_{\bar 1}\right\},\quad \frac12 I_{\bar 1}=\{\bar 1,\dots,\bar r\}.$$

Положим $T(e^l)=e^{l+l_{\bar 0}}$, где $l_{\bar 0}$ – четная часть l. Тогда, как легко проверить,

$$T^{-1}\partial_i^+T=\begin{cases}\partial_i^+, & \text{если}\ \ p(i)=\bar 1,\\ 2\partial_i^+, & \text{если}\ \ p(i)=\bar 0,\end{cases}\qquad T^{-1}e^lT=e^{l_{\bar 1}+\frac12 l_{\bar 0}}.$$

Следовательно, эти преобразования приводят формулу (6.4) к виду

$$\begin{aligned}\mathcal{M}=4\sum_{i=1}^{n}\partial_i^2-2\sum_{\bar j=1}^{r}\partial_{\bar j}^2+\sum_{\alpha\in R_{11}^+}\frac{e^{\alpha}+1}{e^{\alpha}-1}2\partial_{\alpha}^+-\\ -4\sum_{\beta\in\frac14 R_{22}^+}\frac{e^{\beta}+1}{e^{\beta}-1}\partial_{\beta}^+-4\sum_{\gamma\in\frac12 R_{12}}\frac{e^{2\gamma}+1}{e^{2\gamma}-1}\partial_{\gamma,\frac12}^+.\end{aligned}\tag{6.5}$$

Последнее выражение равно $4\mathcal{M}_2$.

Теперь докажем утверждение B. Вначале опишем инвариантный вектор $v_\lambda \in V_\lambda$, где все строки диаграммы λ имеют четную длину. Легко проверить, что

$$\theta = \sum_{i\in I} \varepsilon(i) e_i \otimes e_{\delta(i)} \quad \text{и} \quad \theta^* = \sum_{i\in I} \varepsilon(i) e_i^* \otimes e_{\delta(i)}^*$$

являются $\mathfrak{b}$-инвариантами. Следовательно, $\theta^{\otimes p}$ – также $\mathfrak{b}$-инвариант. С точностью до постоянного множителя

$$\varphi_\lambda(u) = \theta^\pi((\theta^*)^{\otimes p}, \theta^{\otimes p})(u) = (\theta^*)^{\otimes p}(e_\lambda u \theta^{\otimes p}) \quad \forall u \in U(\mathfrak{g}),$$

где e_λ – примитивный идемпотент в алгебре Гекке (S_{2p}, H_p). Явная форма e_λ известна [11]:

$$e_\lambda = \sum \frac{\omega_\mu^\lambda}{Z_{2\mu}} \sigma,$$

где σ пробегает множество представителей двойных классов смежности.

Если $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_q)$, мы можем предполагать, что σ имеет цикловую структуру $(2\mu_1, \dots, 2\mu_q)$. Теперь вычислим функционал $\varphi_{\lambda,\mu}(u) = (\theta^*)^{\otimes p}(\sigma u \theta^{\otimes p})$, где $u \in S(\mathfrak{h})$. Согласно тождеству (5.3) достаточно предполагать, что σ – цикл четной длины $2p$. Имеем

$$\theta^{\otimes p} = \sum \varepsilon(\psi) e_\psi, \qquad (\theta^*)^{\otimes p} = \sum \varepsilon(\psi) e_\psi^*,$$

где сумма берется по всем отображениям

$$\psi\colon [1, \dots, 2p] \longrightarrow [1, \dots, n, \bar{1}, \dots, \overline{2r}] \quad \text{и} \quad \delta(\psi(2i)) = \psi(2i-1) \quad \text{для} \quad i = 1, \dots, l$$

и

$$e_\psi = e_{\psi(1)} \otimes \dots \otimes e_{\psi(2p)}, \quad \varepsilon(\psi) = \varepsilon(\psi(1))\varepsilon(\psi(3)) \dots \varepsilon(\psi(2l-1)).$$

Если σ – цикл, то

$$(\theta^*)^{\otimes p}(u\sigma\theta^{\otimes p}) = \biggl(\sum_{i\in I_{\bar{0}}} (e^{2\varepsilon_i})^p - 2 \sum_{j\in\frac{1}{2}I_{\bar{1}}} (e^{2\varepsilon_j})^p\biggr)(u).$$

Поэтому, полагая $x_i = e^{2\varepsilon_i}$, $i \in I_{\bar{0}}$, $y_j = e^{2\varepsilon_j}$, $j \in J_{\bar{1}}/2$, получим

$$\varphi_\lambda = \sum \frac{\omega_\mu^\lambda}{Z_{2\mu}} sp_\mu\biggl(x, y, \frac{1}{2}\biggr),$$

где

$$sp_\mu\biggl(x, y, \frac{1}{2}\biggr) = sp_{\mu_1}\biggl(x, y, \frac{1}{2}\biggr) \dots sp_{\mu_q}\biggl(x, y, \frac{1}{2}\biggr), \qquad sp_l = \sum_{i\in I_{\bar{0}}} x_i^l - 2 \sum_{j\in\frac{1}{2}I_{\bar{1}}} y_j^l.$$

Теорема доказана.

7. АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ АНАЛОГ ИНТЕГРАЛА БЕРЕЗИНА

Для обычных полиномов Джека, соответствующих алгебре Ли $\mathfrak{gl}(n)$, существует скалярное произведение, индуцированное инвариантным интегралом на $U(n)$. Березин построил [18] инвариантный интеграл на унитарной супергруппе $U(n|m)$ и установил ряд его свойств. В частности, матричные коэффициенты любого конечномерного неприводимого представления V такого, что $\dim V_{\bar 0} \neq \dim V_{\bar 1}$, являются изотропными относительно скалярного произведения, возникающего из интеграла Березина. В работе Шенерта и Занга [5] доказано существование и единственность инвариантного интеграла для супералгебр Ли $\mathfrak{g}$ с условием, что алгебра $\mathfrak{g}_{\bar 0}$ редуктивна, ее представление на $\mathfrak{g}_{\bar 1}$ полупросто, а представление на максимальной внешней степени $\mathfrak{g}_{\bar 1}$ тривиально. Доказательство Шенерта и Занга основано на теории алгебр Хопфа. В этом разделе передоказан этот результат без использования теории алгебр Хопфа и доказана двусторонняя инвариантность интеграла из работы [5].

Пусть $\mathfrak{g}$ – конечномерная супералгебра Ли, причем алгебра $\mathfrak{g}_{\bar 0}$ редуктивна, а ее представление на $\mathfrak{g}_{\bar 1}$ полупросто. Обозначим через $A(\mathfrak{g})$ линейное подпространство в $U(\mathfrak{g})^*$, равное сумме $C(V)$, где V – конечномерные представления $\mathfrak{g}$, ограничение которых на $\mathfrak{g}_{\bar 0}$ полупросто. Поскольку

$$C(V_1) \otimes C(V_2) = C(V_1)C(V_2), \qquad C(V_1 \oplus V_2) = C(V_1) + C(V_2),$$

то $A(\mathfrak{g})$ – подалгебра в $U(\mathfrak{g})^*$. Легко проверить, что $A(\mathfrak{g})$ инвариантна относительно левого и правого корегулярных представлений и является полупростым $\mathfrak{g}_{\bar 0}$-модулем относительно каждого из них. Пусть V_0 – неприводимый конечномерный $\mathfrak{g}_{\bar 0}$-модуль. Обозначим через $A(\mathfrak{g})^n_{V_0}$ изотипическую компоненту типа V_0 относительно правого корегулярного представления в $A(\mathfrak{g})$.

Лемма 7.1. *Пусть* $V = \operatorname{Ind}^{\mathfrak{g}}_{\mathfrak{g}_{\bar 0}}(V_0)$. *Рассмотрим каноническое отображение* θ

$$V^* \otimes V \to U(g)^*, \qquad (v^*, v) \mapsto \theta(v^*, v).$$

Тогда ограничение θ *на* $V^* \otimes V_0$ *является изоморфизмом* $V^* \otimes V_0$ *и* $A(\mathfrak{g})^n_{V_0}$.

Доказательство. Согласно лемме 2.3 отображение θ является гомоморфизмом $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$-модулей. Поэтому $\theta(V^* \otimes V_0) \subset A(\mathfrak{g})^n_{V_0}$. Докажем обратное включение. Пусть W_0 – подмодуль относительно правого корегулярного представления в $U(\mathfrak{g})^*$, изоморфный V_0. Тогда имеем гомоморфизм $\mathfrak{g}_{\bar 0}$-модулей $\varphi_0\colon V_0 \to U(\mathfrak{g})^*$ и его продолжение $\varphi\colon V \to U(\mathfrak{g})^*$. Определим $v^*_\varphi \in V^*$ по формуле $v^*_\varphi(v) = \varphi(v)(1)$. Легко проверить, что $\theta(v^*_\varphi, v) = \varphi(v)$. Поэтому $\theta(V^* \otimes V_0) = A(\mathfrak{g})^n_{V_0}$. Осталось показать, что ограничение θ на $V^* \otimes V_0$ имеет тривиальное ядро. Заметим, что отображение θ является двойственным к отображению $\pi\colon U(\mathfrak{g}) \to \operatorname{End}(V)$, которое определяет структуру $\mathfrak{g}$-модуля на V, если мы отождествляем $\operatorname{End}(V)$ с $V \otimes V^*$, а $\operatorname{End}(V)^*$ с $V^* \otimes V$. Поэтому инъективность ограничения θ равносильна тому, что образ π содержит $\operatorname{Hom}(V_0, V)$. Из неприводимости V_0 как $\mathfrak{g}_{\bar 0}$-модуля следует сюръективность отображения $U(\mathfrak{g}_{\bar 0}) \to \operatorname{Hom}(V_0)$. Отсюда следует, что образ π содержит $\operatorname{Hom}(V_0, V)$. Лемма доказана.

Следствие 7.1. *Пусть $\mathfrak{g}$ – конечномерная супералгебра Ли, алгебра $\mathfrak{g}_{\bar 0}$ редуктивна, ее представление на $\mathfrak{g}_{\bar 1}$ полупросто, а представление на максимальной внешней степени $\mathfrak{g}_{\bar 1}$ тривиально. Тогда на алгебре $A(\mathfrak{g})$ существует нетривиальный, единственный с точностью до постоянного множителя функционал, инвариантный относительно левого корегулярного представления.*

Доказательство. Согласно лемме 7.1

$$A(\mathfrak{g}) = \bigoplus (\mathrm{Ind}_{\mathfrak{g}_{\bar 0}}^{\mathfrak{g}} V_0)^* \otimes V_0,$$

где V_0 принадлежит множеству представителей всех неприводимых конечномерных представлений $\mathfrak{g}_{\bar 0}$. Пусть π_0 – тривиальное представление $\mathfrak{g}_{\bar 0}$ и p – проекция $A(\mathfrak{g})$ на $A(\mathfrak{g})^n_{\pi_0}$ параллельно подпространству $K = \bigoplus (\mathrm{Ind}_{\mathfrak{g}_{\bar 0}}^{\mathfrak{g}} V_0)^* \otimes V_0$, где $V_0 \neq \pi_0$. Далее, согласно лемме 7.1 $A(\mathfrak{g})^n_{\pi_0}$ как $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}_{\bar 0}$-модуль изоморфно $(\mathrm{Ind}_{\mathfrak{g}_{\bar 0}}^{\mathfrak{g}}(\pi_0))^* \otimes \pi_0$. Поэтому двойственное пространство к $A(\mathfrak{g})^n_{\pi_0}$ как $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}_{\bar 0}$-модуль изоморфно $\mathrm{Ind}_{\mathfrak{g}_{\bar 0}}^{\mathfrak{g}}(\pi_0) \otimes \pi_0$, и согласно лемме 5.2 из работы [15] $(\mathrm{Ind}_{\mathfrak{g}_{\bar 0}}^{\mathfrak{g}} V_0)^{\mathfrak{g}}$ как векторное пространство изоморфно $V_0^{\mathfrak{g}_{\bar 0}}$. Следовательно, на $A(\mathfrak{g})^n_{\pi_0}$ существует единственный с точностью до константы нетривиальный линейный функционал l, инвариантный относительно $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}_{\bar 0}$. Поэтому функционал $F = l \circ p$ является $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}_{\bar 0}$-инвариантным функционалом на $A(\mathfrak{g})$. Таким образом, доказано существование левоинвариантного функционала. Докажем единственность. Пусть F_1 – левоинвариантный функционал на $A(\mathfrak{g})$. Тогда $F_1 \circ \theta$ является инвариантным функционалом на $(\mathrm{Ind}_{\mathfrak{g}_{\bar 0}}^{\mathfrak{g}}(V_0))^* \otimes V_0$ (второй сомножитель мы рассматриваем как тривиальный $\mathfrak{g}$-модуль). Следовательно, $F_1 \circ \theta$ определяет $\mathfrak{g}$-инвариантный элемент модуля $\mathrm{Ind}_{\mathfrak{g}_{\bar 0}}^{\mathfrak{g}}(V_0)$ и, следовательно, $\mathfrak{g}_{\bar 0}$-инвариантный элемент модуля V_0. Поэтому $F_1(A(\mathfrak{g})^n_{V_0}) = 0$, если $V_0 \neq \pi_0$. Следовательно, $F_1 = \alpha F$, где α – комплексное число. Докажем теперь, что функционал F правоинвариантен. Пусть $u \in U(\mathfrak{g})$, тогда функционал $F_1(a) = F(R^*(u)a)$ также левоинвариантен. Следовательно, $F \circ R^*(u) = \alpha(u)F$, где α – одномерное представление $U(\mathfrak{g})$. Но как было показано, функционал F инвариантен относительно $\mathfrak{g}_{\bar 0}$ справа, поэтому α – тривиальное представление, и, следовательно, F двусторонне инвариантен. Следствие доказано.

Доказательство теоремы 1.4. Утверждение А об инвариантном функционале сразу вытекает из следствия 7.1. Пусть ε – коединица, тогда $\varepsilon \in A(\mathfrak{g})^n_{\pi_0}$ и не является образующей этого модуля. Следовательно, $F(\varepsilon) = 0$.

Утверждения Б и В сразу следуют из леммы 2.4.

Благодарности. Автор благодарен Г. Ольшанскому за совет рассматривать однородные суперпространства при построении супераналога оператора Калоджеро и Д. Лейтесу за помощь, а также International Newton Institute (Кембридж) за финансовую поддержку.

Список литературы

[1] *A. Sergeev.* J. Nonlinear Math. Phys. 2001. V. 8. P. 59.

[2] *L. Brink, T. Hanson, S. Konstein, M. Vasiliev.* Nucl. Phys. B. 1993. V. 401. P. 591.

[3] *P. Desrosiers, L. Lapointe, P. Mathieu.* Supersymmetric Calogero–Moser–Sutherland model and Jack superpolynomials. hep-th/0103178.

[4] *P. Desrosiers, L. Lapointe, P. Mathieu.* Jack superpolynomials, superpartition ordering and determinantal formulas. hep-th/0105107.

[5] *M. Scheunert, R. Zhang.* Integration on Lie supergroups. math.RA/0012052.

[6] *В. Серганова.* Функц. анализ и его прилож. 1983. Т. 17. № 3. С. 46.

[7] *M. Olshanetsky, A. Perelomov.* Phys. Rep. 1983. V. 94. № 6. P. 313.

[8] *А. П. Веселов, М. В. Фейгин, О. А. Чалых.* УМН. 1996. Т. 51. № 3. С. 185.

[9] *O. Chalykh, M. Feigin, A. Veselov.* Commun. Math. Phys. 1999. V. 206. № 3. P. 533.

[10] *L. Lapointe, L. Vinet.* Commun. Math. Phys. 1996. V. 178. № 2. P. 425.

[11] *I. Macdonald.* Symmetric functions and Hall polynomials. Oxford: Clarendon, 1995.

[12] *R. Stanley.* Adv. Math. 1996. V. 77. P. 76.

[13] *S. Kerov, A. Okounkov, G. Olshanski.* Int. Math. Res. Notices. 1998. № 4. P. 173.

[14] *А. Сергеев.* Матем. сб. 1984. Т. 165. С. 422.

[15] *A. Sergeev.* Michigan J. Math. 2001. V. 49. P. 113.

[16] *Ж. Диксмье.* Универсальные обертывающие алгебры. М.: Мир, 1978.

[17] *S. Sahi.* Int. Math. Res. Notices. 1996. V. 20. P. 997.

[18] *Ф. А. Березин.* Введение в алгебру и анализ с антикоммутирующими переменными. М.: Изд-во МГУ, 1983.

Поступила в редакцию 19.XII.2001 г.