УДК 514.76+51 (092)

НАУЧНОЕ НАСЛЕДИЕ БОРИСА ЛУКИЧА ЛАПТЕВА (23.04.1905—15.01.1989)

В. И. Близникас,
А. П. Норден, Б. Н. Шапуков, А. П. Широков

В настоящей статье мы не освещаем начального периода научной деятельности Бориса Лукича Лаптева, когда он занимался прикладными вопросами математики. В дальнейшем, однако, его научные интересы переключились на геометрию, и с 1935 года он начал заниматься научной работой в области дифференциальной геометрии. Под руководством профессора П. А. Широкова окончательно определилась область научных интересов Б. Л. Лаптева — геометрия пространств линейных элементов и, в частности, пространств Финслера.

Заслугой Б. Л. Лаптева является широкое внедрение современных тензорных методов в эту теорию, которая благодаря исследованиям Л. Бервальда, Э. Картана, М. Кнебельмана и др. превратилась в интересную и быстро развивающуюся область дифференциальной геометрии. Обобщая понятие производной Ли для объектов, являющихся функциями точки и направления, и подчеркивая инвариантный характер этой операции, ее независимость от задания связности или метрики, Б. Л. Лаптев рассматривает затем различные приложения дифференцирования Ли к теории автоморфизмов пространств с линейной связностью к геометрии Финслера (экстремали, движения). Он получает также инвариантную форму вариаций соответствующей вариационной задачи.

Результаты работ [1], [2], [4] явились содержанием кандидатской диссертации «Исследования геометрии пространств Финслера», которая была защищена в 1939 году.

Начиная с 1946 года, Б. Л. Лаптев стал разрабатывать значительно более общую теорию пространств опорных элементов. Частными случаями этих пространств являются пространства Финслера, Картана, линейных элементов, опорных линеаров, путей и k-протяжений, тензорных опорных элементов, копункторов и т. д. По существу, все пространства, появившиеся в связи с приложениями дифференциальной геометрии к вариационному исчислению и к теории дифференциальных уравнений, являются специальными типами пространства опорных элементов. Это пространство представляет собой дифференцируемое многообразие $X_{n,\omega}$, которое локально является топологическим произведением окрестности дифференцируемого многообразия (базы) X_n и пространства значений F некоторого дифференциально-геометрического объекта (опорного объекта) ω, т. е. некоторого представления дифференциальной группы $GL^m(n, \mathbb{R})$ порядка m базового многообразия. Такое пространство можно рассматривать также как расслоенное многообразие, структурная группа которого определена указанным представлением.

Следует отметить, что расслоенные пространства такого рода под названием составных многообразий рассматривал, начиная с 1943 года, также и В. В. Вагнер. Однако его интересовала прежде всего конструкция параллельного перенесения, основанная на идее отображения локальных пространств вдоль заданной базисной кривой $\gamma \subset X_n$ (то, что впоследствии получило название внутренней связности расслоения). Предметом исследований Б. Л. Лаптева является геометрия самого расслоенного многообразия. Она понимается им как теория инвариантов, присоединенных к полю фундаментального дифференциально-геометрического объекта Ω, заданного на многообразии $X_{n,\omega}$.

В развитии теории дифференциальных инвариантов пространства тензорных опорных элементов Б. Л. Лаптев следовал работам Веблена и Томаса. Он показал, что, как и в случае обычных «точечных» пространств, возможно путем введения аффинных нормальных координат построить теорию аффинных нормальных тензоров, аффинных расширений и с ее помощью доказать некоторые общие теоремы о дифференциальных инвариантах этого пространства (теоремы о замене, теоремы приведения и т. д.).

На случай пространства опорных элементов Б. Л. Лаптеву удалось перенести понятие производной Ли и с ее помощью в компактной и инвариантной форме провести изучение автоморфизмов пространств тензорных опорных элементов с аффинной связностью. Тем самым было получено широкое обобщение результатов исследований различных авторов по теории автоморфизмов отдельных типов пространств.

Рассматривая понятие производной Ли, Б. Л. Лаптев обобщает свой подход, развитый в применении к пространствам линейных элементов. Б. Л. Лаптев указал эффективную формулу для вычисления производной Ли заданного объекта, а также ее конкретный вид для ряда объектов специального типа. Результаты этого цикла работ [15], [16], [18]—[24] вошли в докторскую диссертацию Б. Л. Лаптева.

Различные вопросы теории пространств опорных элементов были в дальнейшем исследованы учениками Б. Л. Лаптева: пространства линейных элементов с билинейной метрикой, а также пространства векторных и тензорных расслоений специального типа (Б. Н. Шапуков, представивший в 1987 году докторскую диссертацию «Структуры на расслоенных многообразиях и вопросы редукции»); теория дифференцирования Ли и ее применения к вариационным задачам (Э. И. Хмелевский); пространства пар линейных элементов (Д. М. Яблоков); автоморфизмы пространства тензорных опорных элементов (А. П. Урбонас); геодезические отображения и аналоги проективно-евклидовых пространств тензорных опорных элементов (А. С. Ферзалиев); движения в метрических пространствах опорных векторных и ковекторных плотностей (Г. А. Раджабов и А. Э. Саттаров); касательные расслоения и финслерова геометрия (С. В. Галаев).

Дальнейшее развитие результаты Б. Л. Лаптева получили в работах В. И. Близникаса, который ввел аффинную связность и построил ковариантное дифференцирование в пространстве опорных элементов общего вида.

§ 1. ФИНСЛЕРОВА ГЕОМЕТРИЯ

Основной темой работ Б. Л. Лаптева 1937—1940 гг. является исследование финслеровых пространств и пространств линейных элементов, интерес к которым возник в связи с интенсивным развитием вариационного исчисления. В. В. Вагнер и Б. Л. Лаптев являются основоположниками геометрических исследований по финслеровой геометрии в СССР.

Второе дифференциальное продолжение метрической функции финслерова пространства порождает тензор, который можно принять в качестве метрического тензора пространства, но символы Кристоффеля этого тензора уже не являются компонентами объекта аффинной связности. Внутренние аффинные связности финслерова пространства были построены Тейлором (1924), Бервальдом (1926), Э. Картаном (1934). Б. Л. Лаптев указал новый метод построения внутренней аффинной связности фислеровых пространств двух и трех измерений ([1]). Кроме того, Б. Л. Лаптеву удалось создать начала ковариантного интегрирования для финслеровых пространств двух и трех измерений.

Метрическая аффинная связность финслерова пространства впервые была найдена Э. Картаном (1934). Это открытие Э. Картана сыграло важную роль в развитии финслеровой геометрии, появились различные обобщения финслеровых пространств. Первым таким обобщением явилась геометрия пространств линейных элементов. Б. Л. Лаптев указал пути построения теории аффинных связностей для пространств линейных элементов. Для этих пространств он развил аппарат дифференцирования Ли ([2]), нашел инвариантную форму второй вариации для финслерова пространства ([4]), получил формулу геодезического смещения для пространств линейных элементов ([24]). Эти исследования Б. Л. Лаптева продолжены в работах его учеников (С. В. Галаев, А. С. Ферзалиев, Э. И. Хмелевский, Б. Н. Шапуков, Д. М. Яблоков и др.).

§ 2. ПРОСТРАНСТВА ОПОРНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В основном финслерова геометрия родилась из естественной геометризации так называемой регулярной задачи Лагранжа для обыкновенного интеграла (частному случаю этой задачи соответствует геометрия Римана). В связи с приложениями дифференциальной геометрии к вариационному исчислению и к теории различных систем дифференциальных уравнений, появились новые типы «модельных пространств», как, например, пространство линейных элементов высшего порядка и др., необходимых для геометризации соответствующей задачи вариационного исчисления или геометризации вполне определенной системы дифференциальных уравнений.

Б. Л. Лаптев обобщил все эти классы пространств и построил общую теорию пространств тензорных опорных элементов. Локальные координаты опорного элемента $\left(x^l,\ w^{l_1\ldots l_p}_{j_1\ldots j_q}\right)$ преобразуются следующим образом ([6]):

$$\overline{x}^l=\overline{x}^l(x^k),\quad x^l_j=\frac{\partial\overline{x}^l}{\partial x^j},\quad \overset{*}{x}{}^l_j=\frac{\partial x^l}{\partial\overline{x}^j},$$

$$\overline{w}^{l_1\ldots l_p}_{j_1\ldots j_q}=x^{l_1}_{k_1}\ldots x^{l_p}_{k_p}\overset{*}{x}{}^{h_1}_{j_1}\ldots\overset{*}{x}{}^{h_q}_{j_q}\,w^{k_1\ldots k_p}_{h_1\ldots h_q}. \tag{1}$$

Кроме того, предполагалось, что опорный объект задан с точностью до преобразования:

$$\tilde{w}^{l_1\ldots l_p}_{j_1\ldots j_q}=\lambda w^{l_1\ldots l_p}_{j_1\ldots j_q},\quad \lambda\neq0.$$

Отображение касательного пространства бесконечно близкого тензорного опорного элемента $\left(x^l+dx^l,\ w^{(l)}_{(j)}+dw^{(l)}_{(j)}\right)$ на касательное пространство исходного элемента $\left(x^l,\ w^{(l)}_{(j)}\right)$, $w^{(l)}_{(j)}\equiv w^{l_1\ldots l_p}_{j_1\ldots j_q}$, т. е. аффинная связность в пространстве тензорных опорных элементов может быть установлена по Б. Л. Лаптеву, если построить ковариантный дифференциал поля тензора первого рода (вообще говоря, тензорной плотности определенного веса) и определить параллельный перенос тензора в соседний элемент инвариантным условием обращения ковариантного дифференциала в нуль. Б. Л. Лаптев провел соответствующие исследования, позволившие выяснить, какого рода объекты должны быть заданы для того, чтобы при их помощи можно было построить ковариантный дифференциал, являющийся естественным обобщением ковариантного дифференциала в точечном пространстве аффинной связности. Для построения ковариантного дифференциала Б. Л. Лаптев указал определенную систему аксиом, из которых и следовал вывод выражения ковариантного дифференциала ([6], [15], [23], [41]).

Далее он ввел понятия ковариантных производных первого и второго типов. Таким образом, аффинную связность Б. Л. Лаптев определил при помощи ковариантного дифференциала.

Отдельно были рассмотрены усеченные аффинные связности ([6]).

При помощи альтернированных ковариантных производных второго порядка одинаковых и разных типов получены аналоги различных обобщенных тождеств Риччи, в которые в качестве коэффициентов разложения входят различные тензоры кривизны и кручения. Б. Л. Лаптев получил и все аналоги картановых тензоров кривизны ([6], [20], [41]). Компоненты всех тензоров кривизны и кручения удовлетворяют вполне алгебраическим тождествам. Вывод этих тождеств был осуществлен при пользовании нормальной системой координат. Эти тождества являются непосредственным аналогом тождества Бианки.

Б. Л. Лаптевым было введено понятие пространства опорных элементов ([6], [8]), локальные координаты (x^i, y^α) которого преобразуются так:

$$\overline{x}^l = \overline{x}^l(x^k), \quad \overline{y}^\alpha = \overline{y}^\alpha\left(y^\beta, x^l_{j_1}, \ \ldots, x^l_{j_1 \ldots j_p}\right), \tag{2}$$

где

$$x^l_{j_1 \ldots j_a} = \frac{\partial^a \overline{x}^l}{\partial x^{j_1} \ldots \partial x^{j_a}}, \quad a = 1, 2, \ldots, p,$$

и закон преобразования (2) обладает групповыми свойствами. Пространство опорных элементов представляет собой дифференцируемое многообразие, которое является локально топологическим произведением дифференцируемого многообразия и пространства значений некоторого дифференциально-геометрического объекта (опорного объекта), т. е. некоторого представления дифференциальной группы высшего порядка для базисного многообразия. Таким образом, пространства опорных элементов, которые ввел Б. Л. Лаптев ([8], [15], [18], [20]), можно также рассматривать как расслоенные многообразия, структурная группа которых определена указанным представлением.

Теория различных пространств опорных элементов развита в работах В. И. Близникаса, Б. Н. Шапукова, Ю. И. Шинкунаса и др.

§ 3. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ЛИ

Производная Ли для тензорных полей и полей объектов аффинных связностей, определенных на n-мерных дифференцируемых многообразиях, была введена Схоутеном и Ван Кампеном (1933). Почти одновременно она встречалась в отдельных частных случаях в работах Слебодзинского (1931) и Дина (1933). Следует заметить, что общую трактовку понятия производной Ли для произвольных полей дифференциально-геометрических объектов, определенных на дифференцируемых многообразиях, дал В. В. Вагнер в своих геометрических работах (1945).

Выше уже отмечалось, что Б. Л. Лаптев ввел понятие производной Ли для геометрических объектов, определенных на пространстве линейных элементов ([2]). В дальнейших исследованиях Б. Л. Лаптева понятие производной Ли было перенесено на общие пространства опорных элементов, включающие как частные случаи известные пространства линейных элементов, гиперплоскостных элементов и ряд других пространств ([8], [15], [18], [20], [22], [24], [30], [34], [41]).

Если

$$\overline{x^i} = x^i + v^i(x)\,t + \ldots,$$

где $v^i(x)$ — векторное поле, то производную Ли от объекта $\Omega^A(x, w)$ относительно векторного поля $v^i(x)$ в пространстве опорных элементов Б. Л. Лаптев определил как предел ($t \to 0$) отношения к t разности натурального и увлеченного значения объекта:

$$\overset{L}{D}\Omega^A(x, w) = \lim_{t \to 0} \left\{ \frac{\Omega^A(\overline{x}, \overline{w}) - \overline{\Omega}^A(\overline{x}, \overline{w}, t)}{t} \right\}.$$

Другими словами можно сказать, что производная Ли фактически характеризует скорость отклонения рассматриваемого поля объекта $\Omega^A(x, w)$ от поля, получаемого увлечением, при условии, что опорный объект в соседнем элементе производится путем увлечения. Кроме того, Б. Л. Лаптев доказал, что

$$\overset{L}{D}\Omega^A = -\left[\frac{\partial \overline{\Omega}^i(\overline{x}, \overline{w}, t)}{\partial t} \right]_{t=0}$$

и получил эффективную формулу для вычисления производной Ли от конкретных дифференциально-геометрических объектов ([20], формула (3.7)). Общие свойства производных Ли, найденные В. В. Вагнером, справедливы и для произвольных пространств опорных элементов (Б. Л. Лаптев, [20]).

Б. Л. Лаптев доказал, что производная Ли от дифференциально-геометрического объекта Ω^A в пространстве опорных элементов, вообще говоря, уже не будет дифференциально-геометрическим объектом. Таким же свойством обладают и производные Ли высшего порядка. Б. Л. Лаптев исследовал свойства производной Ли от дифференциально-геометрических объектов относительно полей альтернантов (коммутаторов) данных векторных полей. В частности он доказал, что

$$\overset{L}{\underset{[pq]}{D}}\overset{L}{D}\Omega^A = \overset{L}{\underset{[pq]}{D}}\Omega^A, \quad \overset{L}{\underset{p}{D}}\overset{L}{\underset{[qr]}{D}}\Omega^A - \overset{L}{\underset{[qr]}{D}}\overset{L}{\underset{p}{D}}\Omega^A = \overset{L}{\underset{[p[qr]]}{D}}\Omega^A,$$

$$\overset{L}{\underset{[p[qr]]}{D}}\Omega^A + \overset{L}{\underset{[q[rp]]}{D}}\Omega^A + \overset{L}{\underset{[r[pq]]}{D}}\Omega^A = 0.$$

С других точек зрения дифференцирования Ли были рассмотрены в работах Л. Е. Евтушика, В. И. Близникаса, М. О. Рахула и др. Из общих свойств производной Ли следует, что уравнения

$$\overset{L}{\underset{v}{D}}\Omega^A = 0$$

в случае неинтегрируемости являются определяющими уравнениями непрерывной (конечной или бесконечной) группы преобразований. Фактически они определяют псевдогруппу инвариантности объекта Ω^A. На этом свойстве основано приложение дифференцирования Ли к изучению автоморфизмов пространств опорных элементов. Эти свойства справедливы и для пространств тензорных опорных элементов. Поэтому Б. Л. Лаптеву удалось с помощью понятия производной Ли в компактной и инвариантной форме провести изучение автоморфизмов пространств аффинной связности, тензорных опорных элементов, а также и различных частных случаев последних ([6], [8], [18], [30], [41]). Б. Л. Лаптев рассматривал и обобщенные пространства опорных элементов ([51], [52]).

§ 4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ

Одно из важных и центральных мест в дифференциальной геометрии занимает теория дифференциальных инвариантов, основы которой заложены еще в классических работах Гаусса, Римана, Томаса и др.

Веблен создал систематические основы дифференциальных инвариантов и доказал так называемые теоремы о замене и приведении для римановых пространств. Например, если некоторый инвариант риманова пространства является функцией от компонент метрического тензора и его частных производных до некоторого порядка p, то этот инвариант можно всегда представить как некоторую функцию от вполне определенных тензорных аргументов, которые Веблен назвал нормальными тензорами (теорема о замене). Некоторые из этих нормальных тензоров удается выразить через тензор кривизны и его ковариантные производные до порядка $(p-1)$, вычисленные в нормальной системе координат (теорема приведения). Аналогичные теоремы Веблен доказал и для пространств аффинной связности (без кручения). Эти классические результаты Веблена венгерские математики Варга и Рапчак обобщили для финслеровых пространств.

Б. Л. Лаптев доказал, что в пространстве тензорных опорных элементов аффинной связности возможно путем введения аффинных нормальных координат, представляющих обобщение аффинных нормальных координат пространства аффинной связности, построить теорию аффинных нормальных тензоров, аффинных расширений и с ее помощью доказать некоторые довольно общие теоремы о дифференциальных инвариантах рассматриваемого пространства. Заметим, что компоненты объекта аффинной связности или проективной связности при переходе от одной аффинной нормальной системы координат к другой аналогичной, соответствующей той же точке, преобразуются по тензорному закону. Аналогичная теорема имеет место, как это доказал Б. Л. Лаптев, и для пространств тензорных опорных элементов с аффинной связностью. Набор значений частных производных компонент дифференциально-геометрического объекта в аффинной нормальной системе координат, вычисленных в точке, которой эта система соответствует, называется расширением объекта в рассматриваемой точке. Аналогично определяются расширения высшего порядка, и они для случая пространств тензорных опорных элементов аффинной связности всегда симметричны. Аффинными нормальными тензорами называются аффинные расширения объекта аффинной связности.

Б. Л. Лаптев нашел все фундаментальные тождества для аффинных нормальных тензоров. Аффинные нормальные тензоры (всех порядков), дополненные частными производными по опорному объекту (также всех порядков), называются расширенным рядом аффинных нормальных тензоров. Расширенный ряд аффинных нормальных тензоров Б. Л. Лаптев положил в основу при построении системы дифференциальных инвариантов пространства тензорных опорных элементов усеченной симметрической аффинной связности и доказал ряд теорем о замене дифференциальных инвариантов пространства тензорных опорных элементов с усеченной аффинной связностью без кручения ([16], [19], [23]).

Если компоненты тензорного дифференциального инварианта пространства тензорных опорных элементов с усеченной аффинной связностью являются функциями компонент объекта аффинной связности (без кручения) и их частных производных по x^i и $w_{(j)}{}^{(i)}$ до некоторого порядка, то аргументы этих функций, как доказал Б. Л. Лаптев, могут быть заменены нулями (взамен компонент объекта аффинной связности) и элементами расширенного ряда нормальных аффинных тензоров соответствующих порядков. Эту теорему о замене Б. Л. Лаптев распространил и на случай совместных дифференциальных инвариантов. В этом случае компоненты тензорного дифференциального инварианта еще зависят и от некоторых дополнительных переменных, образующих квазитензор. Б. Л. Лаптеву удалось доказать теоремы о замене для дифференциальных инвариантов пространства тензорных опорных элементов с произвольной аффинной связностью, объекты которой состоят из объекта аффинной связности (с кручением) и некоторого тензора. Для всех этих случаев Б. Л. Лаптев доказал аналоги теорем о замене, т. е. доказал, что некоторые аргументы дифференциального инварианта можно заменить компонентами тензоров кривизны и кручения и их ковариантными производными. Кроме того, он дал точную оценку всех порядков ([19], [23]).

Упомянутые исследования Б. Л. Лаптева о дифференциальных инвариантах продолжены в работах других математиков. Получены различные обобщения теорем Б. Л. Лаптева (о замене и приведении) в исследованиях А. П. Урбонаса, Ю. И. Шинкунаса, Т. Р. Джинчарадзе, Г. Ш. Тодуа и др.

§ 5. ИСТОРИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ РАБОТА

Б. Л. Лаптев широко известен также своими исследованиями по истории математики, в частности, по истории ее развития в Казанском университете. Особенно много внимания он уделял изучению, изданию и популяризации наследия Н. И. Лобачевского. Эту деятельность он начал в 1943 году, приняв участие в праздновании 150-летия со дня рождения Н. И. Лобачевского и написав его биографию для юбилейного сборника, изданного АН СССР. С 1948 года в содружестве с А. П. Норденом и другими учеными Казанского университета он на протяжении многих лет принимал самое деятельное участие в издании Полного собрания сочинений Н. И. Лобачевского. Он прокомментировал работы Лобачевского: первые 6 глав «Новых начал геометрии...» и работу «Применение воображаемой геометрии к некоторым интегралам» во втором и третьем томах Полного собрания сочинений; проверил сложные вычисления, произведенные Лобачевским при нахождении объемов тел. Им произведен анализ эволюции взглядов молодого Лобачевского на теорию параллельных в период, предшествовавший открытию неевклидовой геометрии. Совместно с П. С. Александровым он был ответственным редактором книги «Н. И. Лобачевский. Научно-педагогическое наследие. Руководство университетом. Фрагменты. Письма» (М.: Наука, 1976). Здесь им написаны вводная статья и примечания к речи «О важнейших предметах воспитания», вступительная и вводная статьи, а также примечания в отделе о преподавании математики Лобачевским и его «Обозрениям преподавания чистой математики», обзор записной книги Лобачевского, примечания к его письмам.

Б. Л. Лаптевым был произведен также подробный анализ книг, выписывавшихся Лобачевским из библиотеки Казанского университета, и в соавторстве с А. Г. Каримуллиным опубликована книга «Что читал Н. И. Лобачевский» [77].

Как уже отмечалось, Б. Л. Лаптев — автор ряда статей, посвященных истории неевклидовой геометрии, а также истории развития математики в Казанском университете. Так, им совместно с Б. А. Розенфельдом написана глава «Геометрия» в книге [83] «Математика XIX века. Геометрия. Теория аналитических функций» (М.: Наука, 1981), он является соавтором (совместно с Т. В. Путята, Б. А. Розенфельдом, Б. Н. Фрадлиным) книги «Александр Петрович Котельников» (1968); им написаны биография П. А. Широкова, а также воспоминания о нем и о Н. Н. Парфентьеве.

* *
*

Б. Л. Лаптев родился в Казани, в семье врача. Вся его научная, педагогическая и общественная деятельность связана с Казанским университетом. В 1923 году он поступил на математическое отделение физико-математического факультета КГУ. В то время научная работа на факультете в области математики и механики возглавлялась профессором Николаем Николаевичем Парфентьевым (1877—1943). Человек большой культуры, ученый-общественник, знакомивший студентов с наиболее передовыми научными идеями того времени, уделявший много сил популяризации идей Н. И. Лобачевского, он оказал большое влияние на Б. Л. Лаптева. Не меньшее влияние оказали на него ученик Н. Н. Парфеньева, талантливый геометр Петр Алексеевич Широков (1895—1944) и приглашенный в 1927 году в Казань крупнейший алгебраист Николай Григорьевич Чеботарев (1894—1947). Наряду с учебой, Б. Л. Лаптев работал одновременно в течение пяти лет преподавателем физики и математики сначала на курсах по подготовке в ВУЗы, а затем на рабфаке. После окончания университета в 1930 году по рекомендации Н. Н. Парфентьева он был зачислен ассистентом физмата.

Еще будучи студентом, Б. Л. Лаптев начал вести педагогическую работу, совмещая учение с преподаванием математики и физики. Он многократно читал курсы аналитической, дифференциальной, проективной и начертательной геометрии, номографии, оснований геометрии и истории математики, теории функций комплексного переменного, векторного и тензорного анализа, геометрии неевклидовых, римановых и финслеровых пространств, аффинной связности, пространств опорных элементов, теории дифференцирования Ли, теории геометрических объектов. Неоднократно выступал он также с лекциями по вопросам преподавания математики, ее философским основам и методологии. Большой педагогический талант, опыт, мастерство и личное обаяние делали его лекции незабываемыми. Весьма значительна роль Бориса Лукича в деле руководства НИИММ им. Н. Г. Чеботарева, директором которого он был в 1961—1980 гг. (см. сборник [97]).

Покоряла и восхищала его глубокая интеллигентность и необычайная образованность во многих сферах человеческого творчества, особенно в области литературы, живописи, музыки.

Нельзя не отметить и того немаловажного обстоятельства, что благодаря Б. Л. Лаптеву поддерживалась живая связь между представителями многих крупнейших научных направлений.

Б. Л. Лаптев был ярким представителем Казанской геометрической школы и внес большой вклад во многие области современной геометрии. За совокупность своих геометрических работ он был в 1984 году удостен премии им. П. Л. Чебышева АН СССР.

СПИСОК НАУЧНЫХ РАБОТ Б. Л. ЛАПТЕВА

1. Ковариантное интегрирование в пространстве Финслера двух и трех измерений. Казань, Изв. Физ.-мат. о-ва (3), 9, 1937, 61—76.
2. Производная Ли для объектов, являющихся функцией точки и направления. Казань. Изв. Физ.-мат. о-ва (3), 10, 1938, 3—38.
3. Прибор для вычисления криволинейного интеграла. Казань. Уч. зап. Казанского ун-та, 98 : 9, 1938, 79—83.
4. Инвариантная форма второй вариации, полученная дифференцированием Ли в пространстве Финслера. Казань, Изв. Физ.-мат. о-ва (3), 12, 1940, 3—8.
5. Н. И. Лобачевский.— В кн.: Н. И. Лобачевский. М.—Л., 1943, 5—18.
6. Аффинная связность в пространстве тензорных опорных элементов. Казань, Изв. Физ.-мат. о-ва (3), 14, 1949, 187—216.
7. Вводная статья: Обзор сочинения «Новые начала геометрии» (совм. с А. П. Норденом). Примечания к главам I—VI «Новых начал геометрии с полной теорией параллельных» Лобачевского. Историко-библиографические сведения. Н. И. Лобачевский. Полн. собр. соч., т. 2, М.—Л., 1949, 137—146, 455—507, 589—592.
8. Автоморфизмы пространства опорных элементов. Казань, Уч. зап. Казанского ун-та, 110 : 7, 1950, 5—14.
9. Вводная статья: Обзор сочинения «Применение воображаемой геометрии...». Историко-библиографические сведения. Статьи «Функция Лобачевского $L(x)$», «Интегралы Лобачевского в таблицах Биеренс де Хаана» и примечания к «Применению воображаемой геометрии...» Лобачевского. Н. И. Лобачевский. Полн. собр. соч., т. 3. М., 1951, 175—180, 426—428, 408—412, 413—425, 295—407.
10. Жизнь и деятельность Н. И. Лобачевского. УМН, 6 : 3 (43), 1951, 10—17.
11. Теория параллельных прямых в ранних работах Н. И. Лобачевского. Историко-математические исследования, вып. 3, 1951, 201—229.
12. Жизнь и деятельность Н. И. Лобачевского.— В сб.: Сто двадцать пять лет неевклидовой геометрии Лобачевского. М.—Л., 1952, 23—33.
13. Теория параллельных линий в ранних работах Н. И. Лобачевского.— В сб.: Сто двадцать пять лет неевклидовой геометрии Лобачевского. М.—Л., 1952, 99—116.
14. Объем пирамиды в пространстве Лобачевского. Казань, Уч. зап. Казанского ун-та, 114 : 2, 1954, 53—77.
15. Производная Ли в пространстве опорных элементов. УМН., 9 : 3 (61), 1954, 238—240.

16. Инварианты пространства тензорных опорных элементов. Казань, Уч. зап. Казанского ун-та, 115 : 10, 1955, 12.
17. «Петр Алексеевич Широков» в био-библиографическом указателе «Петр Алексеевич Широков (1895—1944)», Казань, 1955, 3—20.
18. Производная Ли от геометрических объектов в пространстве опорных элементов. Труды 3-го Всесоюзного матем. съезда, т. I, М., 1956, 157
19. Дифференциальные инварианты пространства тензорных опорных элементов аффинной связности. Казань, Уч. зап. Казанского ун-та, 116 : 1, 1956, 10—14.
20. Производная Ли в пространстве опорных элементов. Труды семинара по векторному и тензорному анализу, 10, 1956, 227—248.
21. Комментарии к вступлению и первым шести главам «Новых начал...» Лобачевского. Н. И. Лобачевский, Избранные труды по геометрии. М., 1956, 502—524.
22. Производная Ли геометрических объектов в пространстве опорных элементов. Казань, Уч. зап. Казанского ун-та, 117 : 2, 1957, 16—18.
23. Ковариантный дифференциал и теория дифференциальных инвариантов в пространстве тензорных опорных элементов. Казань, Уч. зап. Казанского ун-та, 118 : 4, 1958, 75—147.
24. Применение дифференцирования Ли к отысканию геодезического смещения в пространстве линейных элементов.— Изв. вузов, Математика, 2, 1958, 173—181.
25. Математика в Казанском университете за 40 лет (1917—1957). Историко-математические исследования. 12, 1959, 11—58.
26. О библиотечных записях книг и журналов, выданных Н. И. Лобачевскому, УМН, 1959, 14, вып. 5, 153—155.
27. Математика в Казанском университете в Советский период. Казань, Уч. зап. Казанского ун-та, 120 : 7, 1960, 24—66.
28. Николай Иванович Лобачевский. 1792—1856.— В сб.: Люди русской науки. Матем., мех., М., 1961, 76—93.
29. Дифференцирование Ли и его приложения в теории упругости. Итоговая научн. конф. Казанского ун-та за 1961 г. (краткое содержание докладов). Секции: матем. наук, ... Казань, 1962, 172—173.
30. Дифференцирование Ли и его приложения в теории деформаций. I Всесоюзн. геом. конф. Тезисы, Киев, 1962, 66—67.
31. Персидский К. П. (к 60-летию со дня рождения). Изв. вузов, Математика, 1963, 6, 172—173 (совм. с Г. Багаутдиновым и Б. Гагаевым).
32. Пространство опорных элементов. Тр. 4-го Всесоюзного матем. съезда, 2, 1964, 221—226.
33. Норден А. П. (к 60-летию со дня рождения), УМН, 1964, 19, вып. 5, 171—179 (совм. с В. Г. Коппом, А. П. Широковым, В. И. Шуликовским).
34. Полная производная Ли в пространстве опорных элементов. II Всесоюзн. геом. конф. Тезисы докл., Харьков, 1964, 145—146.
35. Роль пропаганды математических знаний в формировании научно-материалистического мировоззрения.— «Математика в школе», 1964, 5, 19—24.
36. О полной производной Ли в пространстве опорных элементов. Материалы II Прибалтийской геометрической конференции по вопросам дифференциальной геометрии. Тарту, 1965, 96—99.
37. Расширенное дифференцирование Ли в пространстве опорных элементов. Тезисы кратких научных сообщений международного конгресса математиков. Секция 9, М., 1966, 33.
38. Широков П. А. (1895—1944). Вступительная статья в кн., П. А. Широков. Избранные работы по геометрии. Казань, 1966, 5—9.
39. Обзор публикуемых работ (П. А. Широкова). Там же, 10—14.
40. И. П. Егоров (к 50-летию со дня рождения), УМН, 1966, 21, вып. 2, 241—247.
41. Дифференцирование Ли.— В сб.: Алгебра. Топология. Геометрия. 1965. (Итоги науки). М., 1967, 429—465.
42. В. Г. Имшенецкий. В сб.: История отечественной математики, 2. Киев, 1967, 252—255 (совм. с Г. Н. Романенко).

43. Математика в Казанском университете.— В сб.: История отечественной математики, 2. Киев, 1967, 302—305.
44. Математика в Казанском университете. Казанское физико-математическое общество.— В сб.: История отечественной математики, 2. Киев, 1967, 508—517.
45. Математика в Казанском университете за 50 лет.— Изв. вузов, Математика, 10, 1967, 3—10.
46. Б. М. Гагаев (к 70-летию со дня рождения).— Изв. вузов, Математика, 1967, 5, 127—129.
47. Об альтернированной производной Ли в пространстве опорных элементов. III Межвузовская научная конференция по проблемам геометрии. Казань, 1967, 93—94.
48. Великий русский математик (к 175-летию со дня рождения Н. И. Лобачевского).— Вестник высшей школы, 1967, 12, 62—70.
49. Путята Т. В., Лаптев Б. Л., Розенфельд Б. А., Фрадлин Б. Н. Александр Петрович Котельников. М., 1968 (главы о жизни в Казани и Москве, о работах по геометрии написаны Б. Л. Лаптевым совместно с Б. А. Розенфельдом).
50. Лобачевский о математическом методе исследования природы.— сб.: Философские вопросы естествознания, Казань, 1969, 3—10.
51. Коммутирование производных Ли геометрических объектов второго рода в пространстве опорных элементов. V всесоюзная конференция по современным проблемам геометрии. Тезисы докладов, Самарканд, 1972, 112.
52. Альтернированная производная Ли в пространстве опорных элементов с геометрическим опорным объектом.— Изв. вузов, Математика, 1972, 12, 69—76.
53. Казанский Вестник, БСЭ, 2-е изд., т. 19, 306—307.
54. Казанское Физико-математическое общество, БСЭ, 2-е изд., т. 19, 310
55. Лежандр. БСЭ, 2-е изд., т. 24, 443.
56. Лобачевский. БСЭ, 3-е изд., т. 14, М., 1973, 1743—1746.
57. Взгляды Лобачевского на роль математического метода в исследовании природы.— Тр. XIII конгресса по истории науки. Секц. V, М., 1974, 24—27.
58. Александр Петрович Норден (к семидесятилетию со дня рождения).— Изв. вузов, Математика, 1974, № 5, 3—11.
59. Александр Петрович Норден (к семидесятилетию со дня рождения).— Тр. семинара каф. геометрии. Изд-во Казан. ун-та, 1974, № 7, 7—19 (совм. с В. В. Вишневским, В. Г. Коппом, А. П. Широковым, В. И. Шуликовским).
60. A l'occasion du 150-e anniversaire de la geometrie de Lobatchevski non-euclidienne (совм. с А. П. Норденом). Резюме доклада. XIV-th ICHS, 19—27 august 1974. Abstracts of papers. Japan, 1974. Текст доклада (название то же). Proceed. № 2 XIV ICHS, Tokyo — Kyoto, Japan, 19—27, VIII, 1974, 122—124.
61. К десятилетию геометрического семинара ВИНИТИ.— Тр. геометр. семинара, ВИНИТИ. М., 1974, № 6, 5—15.
62. Памяти Бориса Михайловича Гагаева (совм. с Б. Г. Габдулхаевым, А. П. Норденом).— Изв. вузов, Матем., 1975, № 10.
63. Юбилей великого геометра. Празднование 150-летия со дня рождения Н. И. Лобачевского).— Сб.: Во имя Отчизны. Казанский университет в годы Великой Отечественной войны. Изд-во Казан. ун-та, 1975, 64—72.
64. Иван Петрович Егоров (к 60-летию со дня рождения), (совм. с А. Т. Кондратьевым, Н. С. Липатовым, А. П. Норденом).— Математика в школе, 1976, № 2, 83—84.
65. Николай Иванович Лобачевский. Казань, 1976, 1—136.
66. Коперник геометрии.— Наука и жизнь, 1976, № 5, 38—42.
67. Вводная статья к разделу I: Обзор «Речи» Лобачевского и примечания. Лобачевский. Научно-педагогическое наследие. М., 1976, 9—15, 22—25. Вступительная статья к разделу II: «Лобачевский — преподаватель Ка-

занского университета». Вводная статья к IIа: «Математические лекции Лобачевского». Вводные статьи и примечания к подразделу а) и приложению. Там же, 35—59, 102—111, 141—143. Обзор материалов раздела V: «Фрагменты». Там же, 559—574. Вводная статья и примечания к разделу VI: «Письма». Там же, 597—603, 644—651, 654.

68. Геометрия Лобачевского, ее история и значение.— М.: Знание (В серии «Новое в жизни, науке и технике», № 9). 1976, 1—36.
69. Н. И. Лобачевский и его геометрия.— М.: Просвещение, (Пособие для учащихся в серии «Люди русской науки»). 1976, 112 с.
70. О всесоюзной научной конференции по неевклидовой геометрии.— Математика в школе, 1976, № 6, 92—93.
71. Борис Владимирович Болгарский. (Совм. с Филипповой А. М., Закировым В. З., Газизовым Б. Г.), (к 85-летию со дня рождения).— Математика в школе, 1977, № 4, 83—84.
72. Борис Абрамович Розенфельд (к 60-летию со дня рождения), (совм. с А. П. Норденом, А. П. Юшкевичем).— Математика в школе, 1977, № 4, 84—85.
73. Математика в Казанском университете за 60 лет.— Изв. вузов, Матем., 1977, 15—22.
74. Лобачевский — создатель неевклидовой геометрии.— В сб.: Всесоюзная научная конференция по неевклидовой геометрии «150 лет геометрии Лобачевского». Казань, 30.VI—2.VII 1976 г. Пленарные доклады. М., 1977, 15—22.
75. О Всесоюзной конференции по неевклидовой геометрии «150 лет геометрии Лобачевского». Казанский ун-т, 1976.— Тр. геометр. семинара. Изд-во Казан. ун-та, № 10, 1978, 6—17.
76. Борис Михайлович Гагаев (1897—1975). (Совм. с А. Н. Шерстневым, Р. Ш. Хуснутдиновым, К. М. Шайдуковым).— Сб.: Матем. анализ. Изд-во Казан. ун-та, 1978, 5—11.
77. Что читал Н. И. Лобачевский? (Записи книг и журналов, выданных Н. И. Лобачевскому из библиотеки Казанского университета), (совм. с Каримуллиным). Изд-во Казан. ун-та, 1979, 1—126.
78. Н. Г. Ламберт (к 250-летию со дня рождения), (совм. с А. П. Юшкевичем).— Математика в школе, 1979, № 5, 69—72.
79. Математика (совм. с Р. Г. Бухараевым, А. В. Сульдиным, А. Н. Шерстневым). В главе IV кн. «Казанский университет. 1804—1979. Очерки истории». Изд-во Казан. ун-та, 1979, 163—175.
80. Математика в Казанском университете за 175 лет.— Изв. вузов, Математика, 1979, № 11, 3—13.
81. Ламберт — геометр.— ИМИ, вып. XXV, 1980, 248—260.
82. Памяти Виктора Владимировича Вагнера (совм. с Ю. И. Ермаковым, А. Е. Либером, А. П. Норденом, А. П. Широковым).— Изв. вузов. Матем., 1981, № 10, 85—88.
83. Математика XIX века. Глава первая: «Геометрия». (совм. с Б. А. Розенфельдом).— М.: Наука, 1981, 9—114.
84. Лобачевского геометрия. Матем. энциклопедия, т. 3. М., 1982, 397—401.
85. Геометрические исследования в Казанском университете (к 60-летию образования СССР).— Изв. вузов. Матем., 1982, № 12, 3—12.
86. Валентин Иванович Шуликовский (к 60-летию со дня рождения), (совм. с В. В. Вишневским, В. Г. Коппом, А. П. Норденом, А. П. Широковым, Ш. А. Яфаровым).— Тр. геометр. семинара, № 14, Изд-во Казан. ун-та, 1982, 5—8.
87. Николай Николаевич Парфентьев.— В кн.: Рассказы о казанских ученых.— Казань: Таткнигоиздат, 1983, 20—27.
88. Николай Иванович Лобачевский.— В кн.: Рассказы с казанских ученых.— Казань: Таткнигоиздат, 1983, 5—19.
89. О новых работах Александра Петровича Нордена (к 80-летию со дня рождения), (Совм. с В. В. Вишневским, В. Г. Коппом, А. П. Широковым).— Тр. геометр. семинара, № 16. Изд-во Казан. ун-та, 1984, 5—8.

90. Пятый постулат. Матем. энциклопедия, т. 4, М., 1984, 778—780.
91. Александр Евгеньевич Либер (к 70-летию со дня рождения), (совм. с Ермаковым Ю. И., Ляпиным Е. С., Норденом А. П., Остиану Н. М., Широковым А. П.) В сб. «Дифференциальная геометрия». Саратов, 1985, № 8, 3—5.
92. О развитии теории движений в обобщенных пространствах (в работах И. П. Егорова и его школы), (совм. с Липатовым Н. С., Ловковым А. А., Султановым А. Я.).— В сб. «Движения в обобщенных пространствах», Рязань, 1985, 13—25.
93. Математическая жизнь Казани в годы Великой Отечественной войны.— Изв. вузов. Матем., № 5, 1985.
94. (совм. с Султановым А. Я.). О проблеме И. П. Егорова в теории движений.— Изв. вузов. Матем., 1986, № 8, с. 34—39.
95. (совм. с Вишневским В. В.). Lobachevski. Mathematics teaching. 115. Derby. 1986, p. 28.
96. Отзыв о книге Беркутова В. М. Народный календарь и метрология булгаро-татар. Казань, 1987.— В ж. «Совет мяктябе», май 1988 (на татарском языке).
97. Воспоминания: о Н. Н. Парфентьеве; о П. А. Широкове; «Первые годы становления НИИ математики и механики им. Н. Г. Чеботарева».— Сборник «Очерки истории НИИММ им. Чеботарева при Казанском ун-те», Казань, 1988, 119—125, 139—149.