Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

В. А. Топоногов, Римановы пространства с диаметром, равным π,
Сиб. матем. журн., 1975, том 16, номер 1, 124–131

https://www.mathnet.ru/smj4099

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.82
11 декабря 2025 г., 00:11:01

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Т. XVI, № 1 январь — февраль 1975

УДК 513.813

В. А. ТОПОНОГОВ

РИМАНОВЫ ПРОСТРАНСТВА С ДИАМЕТРОМ, РАВНЫМ π

1. Эта работа является прямым продолжением работы ([1]); все определения и обозначения заимствованы оттуда.

В работе ([1]) доказана

Теорема 1. *Если в римановом пространстве V_1^m существует замкнутая геодезическая γ длины 2π, индекс которой равен q, то в V_1^m существует $(q+1)$-мерная вполне геодезическая поверхность, содержащая γ и изометричная $(q+1)$-мерной сфере радиуса* 1.

Основной результат данной работы сформулирован в теореме 2.

Теорема 2. *Если диаметр связного и односвязного четырежды непрерывно дифференцируемого риманова пространства V_1^m равен π, то существует такое число q, равное либо* 2, *либо* 4, *либо* 8, *либо m, что для каждой точки $P \in V_1^m$ и каждого вектора λ в точке P существует в V_1^m q-мерная регулярная поверхность $F(P, \lambda)$, удовлетворяющая условиям:*

(1) *$F(P, \lambda)$ есть вполне геодезическая поверхность пространства V_1^m;*

(2) *$F(P, \lambda)$ есть поверхность, изометричная q-мерной сфере радиуса* 1;

(3) *Точка P принадлежит $F(P, \lambda)$;*

(4) *Вектор λ принадлежит q-мерной плоскости, касательной к $F(P, \lambda)$ в точке P;*

(5) *Две поверхности $F(P, \lambda_1)$ и $F(P, \lambda_2)$ либо совпадают, либо не имеют общих точек, кроме P.*

2. Диаметральные точки. Диаметром риманова пространства R^m называется точная верхняя грань расстояний между двумя произвольными точками пространства R^m

$$d(R^m) = \operatorname*{Sup}_{P,Q \in R^m} PQ.$$

Если R^m компактно, то существуют точки P и Q такие, что $PQ = d(R^m)$; такую пару точек P и Q назовем *диаметральной парой* R^m.

Обозначим через M_{PQ} множество всех кратчайших пространства R^m, соединяющих две произвольные точки P и Q, а через T_{PQ} — множество векторов в точке P, касательных к кратчайшим множества T_{PQ}, причем векторы множества T_{PQ} направлены от точки Q.

Лемма 1. *Если точки P и Q есть диаметральные точки R^m, то для любого вектора λ в точке P существует вектор $\mu \in T_{PQ}$ такой, что угол между λ и μ не превосходит $\pi/2$.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть λ_0 — вектор в точке P, образующий с любым вектором из множества T_{PQ} тупой угол. Проведем через точку P геодезическую $d(t)$ в направлении вектора $(-\lambda_0)$, где через t обозначена длина дуги $d(t)$, отсчитываемая от P. Пусть t_n —

последовательность чисел такая, что $t_n > 0$, $t_n \to 0$, а кратчайшие $Q\alpha(t_n)$ сходятся к некоторой кратчайшей $\gamma \in M_{PQ}$. В силу наших предположений существует такое N_0, что при $n > N_0$ угол $\varphi_n = \angle Q\alpha(t_n)P$ меньше $\pi/2$

$$\varphi(t_n) < \pi/2, \tag{1}$$

а угол $QP\alpha(t_n)$ больше $\pi/2$

$$\angle QP\alpha(t_n) > \pi/2. \tag{2}$$

Проведем теперь через точку P все геодезические перпендикулярные $\alpha(t)$. Множество этих геодезических в шаровой окрестности U_ρ (где число ρ достаточно мало) образуют регулярную гиперповерхность F. Из (1) следует существование такого $N_1 > N_0$, что при $n > N_1$ кратчайшие $Q\alpha(t_n)$ пересекают F в окрестности U_ρ. Точки пересечения $Q\alpha(t_n)$ и F обозначим через A_n. Пусть ρ_n есть расстояние от P до A_n. Тогда из (2) получим

$$\lim_{n\to\infty} \rho_n = 0. \tag{3}$$

Далее, так как в треугольнике $\alpha(t_n)PA_n$ угол P равен $\pi/2$, то в силу риманова характера метрики R^m, имеем

$$A_n\alpha(t_n) = \rho_n/\sin\varphi_n + o(\rho_n). \tag{4}$$

Из (4) и (3) получаем, что существует такое $N_2 > N_1$, для которого при $n > N_2$

$$\alpha(t_n)A_n > \rho_n. \tag{5}$$

Из (5) теперь видно, что длина кратчайшей $Q\alpha(t_n)$ строго больше, чем длина линии QA_nP при $n > N_2$, поэтому длина кратчайшей $Q\alpha(t_n)$ тем более строго больше, чем длина кратчайшей γ, вопреки определению диаметра R^m и выбора точек P и Q. Полученное противоречие доказывает лемму 1.

3. Обозначим через $\bar{T}_{PQ}$ выпуклую оболочку T_{PQ}.

Лемма 2. *Если диаметр V_1^m равен π, а точки P и Q есть диаметральные точки, то множества T_{PQ} и $\bar{T}_{PQ}$ совпадают.*

Доказательство. Сформулируем утверждение.

(α). Если вектор λ в точке P принадлежит выпуклой оболочке векторов $e_1 \in T_{PQ}$ и $e_2 \in T_{PQ}$, то $\lambda \in T_{PQ}$. Действительно, так как λ принадлежит выпуклой оболочке e_1 и e_2, то $\lambda = \lambda^1 e_1 + \lambda^2 e_2$, где $\lambda^1 \geqslant 0$, $\lambda^2 \geqslant 0$. Отсюда следует, что если e_1 и e_2 коллинеарны, то $\lambda \in T_{PQ}$. Предположим поэтому, что e_1 и e_2 образуют между собой угол, отличный от нуля и от π. Проведем кратчайшие $\gamma_1 \in M_{PQ}$ и $\gamma_2 \in M_{PQ}$, для которых e_1 и e_2 являются касательными векторами в точке P. Получим двуугольник γ периметра 2π со сторонами γ_1 и γ_2. Применим к γ лемму 6 работы ([1]), из которой следует, что $\lambda \in T_{PQ}$. Утверждение (α) доказано.

Пусть теперь λ — произвольный вектор $\bar{T}_{PQ}$. Тогда существует r векторов $e_i \in T_{PQ}$, $i = 1, \ldots, r$, и r положительных чисел λ_i, $i = 1, \ldots, r$, таких, что $\lambda = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i e_i$. Возьмем вектор $\mu_1 = \lambda^1 e_1 + \lambda^2 e_2$. В силу утверждения ($\alpha$) $\mu_1 \in T_{PQ}$. Затем возьмем вектор $\mu_2 = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3$. Снова в силу утверждения (α) $\mu_2 \in T_{PQ}$. Продолжая этот процесс, мы через $(r-1)$ шаг получим, что $\lambda \in T_{PQ}$, что и требовалось доказать.

3. Обозначим через L_{PQ} линейную оболочку T_{PQ}.

Лемма 3. *Если диаметр V_1^m равен π, точки P и Q — диаметральные точки и размерность L_{PQ} равна q, то в V_1^m существует q-мерная*

вполне геодезическая поверхность, содержащая точки P и Q и изометричная $(q+1)$-мерной сфере радиуса 1.

Доказательство. Рассмотрим два случая:

(1). Для любого вектора $e \in T_{PQ}$, $(-e) \notin T_{PQ}$;

(2). В T_{PQ} существует вектор e_0 такой, что $-e_0$ также принадлежит T_{PQ}.

В случае (1), поскольку T_{PQ} есть выпуклое замкнутое множество в касательном пространстве E_P^m, в точке P пространства V_1^m существует такая $(m-1)$-мерная плоскость π_{m-1}, что все векторы, принадлежащие T_{PQ}, лежат от нее по одну сторону и ни один вектор из T_{PQ} не лежит в π_{m-1}. Возьмем тогда в E_P^m вектор λ, перпендикулярный π_{m-1} и направленный в то полупространство, в котором нет векторов из T_{PQ}. Этот вектор λ, как видно из наших построений, образует с любым вектором из T_{PQ} угол больше, чем $\pi/2$, что противоречит лемме 1. Следовательно, случай (1) невозможен.

Рассмотрим второй случай.

Возьмем две кратчайшие $\gamma_1 \in M_{PQ}$, $\gamma_2 \in M_{PQ}$ такие, что вектор e_0 является касательным к γ_1, $(-e_0)$ — к γ_2. Совокупность γ_1 и γ_2 образует геодезическую петлю γ с вершиной в точке P и длины 2π. Нетрудно, однако, видеть, что γ есть замкнутая геодезическая, ибо если предположить, что в точке Q угол между γ_1 и γ_2 отличен от π, то тогда по лемме 6 работы ([1]) угол между γ_1 и γ_2 был бы также отличен от π и в точке P. Итак, γ есть замкнутая геодезическая длины 2π.

Докажем, что точка P сопряжена точке Q вдоль γ с кратностью, равной $q-1$. Построим в L_{PQ} репер из векторов $e_i \in T_{PQ}$, $i=1, \ldots, q$, такой, чтобы e_1 совпадал с e_0. Тогда из определения T_{PQ} и леммы 2 для каждого $i=1, \ldots, q$ существует однопараметрическое семейство геодезических $\gamma_i(\alpha)$ такое, что при любом $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ $\gamma_i(\alpha) \in M_{PQ}$ и вектор $\tau_i(\alpha)$, касательный к $\gamma_i(\alpha)$, равен e_i. Наше утверждение теперь следует из теоремы Морса об индексе геодезической ([2]) (см. также ([3]), стр. 95). Применяя, наконец, к γ теорему 1, получим доказательство леммы 3.

4. Строение риманова пространства диаметра π. Пусть P — точка V_1^m, а λ — некоторый вектор в точке P. Проведем через точку P в направлении вектора λ геодезическую $\gamma(P, \lambda, t)$, где t — длина дуги, отсчитываемая от P. Обозначим через Q точку $\gamma(P, \lambda, \pi)$. Тогда, с одной стороны, дуга PQ геодезической $\gamma(P, \lambda, t)$, в силу наших предположений о V_1^m, есть кратчайшая. С другой стороны, в силу наших предположений о диаметре V_1^m, точки P и Q являются диаметральными точками. Поэтому из леммы 3 следует, что в V_1^m существует q-мерная вполне геодезическая поверхность $F(P, \lambda)$, содержащая геодезическую $\gamma(P, \lambda, t)$ и изометричная сфере радиуса 1. Здесь q есть некоторое число, зависящее от точки P и вектора $\lambda: q=q(P, \lambda)$. Отсюда следует

Лемма 4. *Любая геодезическая пространства V_1^m есть замкнутая геодезическая длины* 2π.

Лемма 5. *Число $q(P, \lambda)$ не зависит ни от точки P, ни от вектора λ и, следовательно, зависит только от пространства V_1^m.*

Доказательство. Для замкнутой геодезической $\gamma(P, \lambda, t)$ определим число ν, равное индексу $\gamma(P, \lambda, t)$. Как следует из теоремы 1, число ν равно индексу дуги геодезической $\gamma(P, \lambda, t)$ при $0 \leqslant t \leqslant \pi+\varepsilon$, где $0<\varepsilon<\pi$. Из леммы 3 и теоремы 1 числа $\nu(P, \lambda)$ и $q(P, \lambda)$ связаны равенством

$$q(P, \lambda)=\nu(P, \lambda)+1.$$

Таким образом, достаточно доказать, что $\nu(P, \lambda)$ не зависит от P и λ. Но поскольку $\nu(P, \lambda)$ есть целочисленная функция, то достаточно доказать, что $\nu(P, \lambda)$ есть непрерывная функция от P и λ, т. е. нужно доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda$, $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = P$, то

$$\lim_{n\to\infty} \nu(P_n, \lambda_n) = \nu(P, \lambda). \tag{6}$$

Рассмотрим дуги σ_n геодезических $\gamma(P_n, \lambda_n, t)$ при $0 \leqslant t \leqslant \pi + \varepsilon$, $0 < \varepsilon < \pi$. Число $\nu(P_n, \lambda_n)$ равно индексу дуги σ_n. В силу леммы 1 работы ([6]) все точки, сопряженные P_n вдоль σ_n, совпадают с точкой $\gamma(P_n, \lambda_n, \pi)$. Поэтому степень вырождения любой дуги σ_n равна нулю. Но тогда из известных лемм вариационного исчисления (см., например, ([2]), стр. 90) следует, что при достаточно больших n $\nu(P_n \lambda_n) = \nu(P, \lambda)$. Таким образом, установлена справедливость соотношений (6).

Римановы пространства V_1^m диаметра π, которым соответствует число q, будем обозначать через $V_1^m(q)$.

Лемма 6. *Две поверхности $F(P, \lambda_1)$ и $F(P, \lambda_2)$ либо совпадают, либо не имеют общих точек, кроме точки P.*

Доказательство. Очевидно, что достаточно доказать следующее утверждение:

если существует точка Q такая, что $Q \in F(P, \lambda_1)$, $Q \in F(P, \lambda_2)$, $Q \neq P$, то $F(P, \lambda_1) = F(P, \lambda_2)$.

Соединим точку P с точкой Q кратчайшей и продолжим ее до точки P^* — диаметральной к P. Поскольку обе поверхности вполне геодезические, $P^* \in F(P, \lambda_1)$ и $P^* \in F(P, \lambda_2)$. Рассмотрим $L_{PP^*} = T_{PP^*}$, L_{PP^*} есть q-мерная плоскость, которая, как видно из леммы 3, касается как $F(P, \lambda_1)$, так и $F(P, \lambda_2)$. Но поскольку в силу леммы 5 обе поверхности $F(P, \lambda_1)$ и $F(P, \lambda_2)$ имеют одну и ту же размерность, равную q, $F(P, \lambda_1)$ и $F(P, \lambda_2)$ совпадают, что и требовалось доказать.

Пусть P — произвольная точка V_1^m. На каждой поверхности $F(P, \lambda)$ возьмем точку $P^*(\lambda)$, диаметрально противоположную точке P. Множество всех точек $P^*(\lambda)$ при любом λ обозначим через $F^*(P)$.

Лемма 7. *$F^*(P)$ есть замкнутая трижды непрерывно дифференцируемая регулярная поверхность размерности $m-q$.*

Доказательство. В силу леммы 4, множество $F^*(P)$ совпадает с образом сферы радиуса 1 в касательном пространстве E_P^m при экспоненциальном отображении. Отсюда следует, что $F^*(P)$ есть компактная трижды непрерывно дифференцируемая поверхность. Поэтому остается только доказать, что $F^*(P)$ есть регулярная поверхность. Возьмем на $F^*(P)$ произвольную точку P^*, пусть $P^* = \gamma(P, \lambda, \pi)$. Введем вдоль $\gamma(P, \lambda, t)$ нормированную систему координат Ферми, согласованную с инвариантной плоскостью L_{PP^*} с началом в точке P.

Обозначим через M_δ множество всех векторов в точке P, имеющих вид $\alpha^1 e_1 + \sum\limits_{i=q+1}^{m} \alpha^i e_i$, где e_i есть координатные векторы в точке P, $\sum\limits_{i=q+1}^{m} (\alpha^i)^2 \leqslant \delta^2$, $\alpha^1 = \sqrt{1 - \sum\limits_{i=g+1}^{m} (\alpha^i)^2}$.

Утверждение (α). Существует такое число δ_0, что если $\mu_1 \in M_{\delta_0}$, $\mu_2 \in M_{\delta_0}$, $\mu_1 \neq \mu_2$, то поверхности $F(P, \mu_1)$ и $F(P, \mu_2)$ не имеют общих точек, кроме P.

Предположим противное. Тогда существует последовательность чисел δ_n и последовательность векторов $\mu_1^n \in M_{\delta_n}$ $\mu_2^n \in M_{\delta_n}$, $\mu_1^n \neq \mu_2^n$, а $F(P, \mu_1^n) =$

$= F(P, \mu_2^n)$ при любом n. Нетрудно видеть, что предел поверхностей $F_n = F(P, \mu_1^n) = F(P, \mu_2^n)$ есть поверхность $F(P, e_1)$:

$$\lim_{n\to\infty} F_n = F(P, e_1). \tag{7}$$

Обозначим через π_2^n двумерную плоскость векторов μ_1^n и μ_2^n, а через φ_1^n, φ_2^n — углы, которые μ_1^n и μ_2^n образуют с вектором e_1. Пусть для определенности

$$\varphi_1^n \geqslant \varphi_2^n. \tag{8}$$

Возьмем в E_P^m конус K_{m-1}^n с осью вдоль вектора e_1 и с углом раствора, равным $2\varphi_1^n$. В силу (8) конус K_{m-1}^n пересекает π_2^n по двум прямым r_1^n и r_2^n. Предположим, что вектор μ_1^n лежит на прямой r_1^n; обозначим через $\bar{\mu}_2^n$ единичный вектор, лежащий на r_2^n и образующий с e_1 острый угол. Очевидно, что $\bar{\mu}_2^n \in M_{\delta_n}$. В силу леммы 6 $F(P, \bar{\mu}_2^n) = F(P, \mu_2^n) = F_n$. Рассмотрим теперь единичный вектор ν_n, коллинеарный разности $\mu_1^n - \bar{\mu}_2^n$. Вектор ν_n, с одной стороны, лежит в плоскости, касательной к F_n, и потому вектор ν_0, равный $\lim\limits_{n\to\infty} \nu_n$, лежит в силу (7) в плоскости, касательной к $F(P, e_1)$. Отсюда, если через ν_0^i обозначить координаты вектора ν_0, следует, что

$$\nu_0^i = 0 \quad \text{при} \quad i = q+1, \ldots, m. \tag{9}$$

С другой стороны, в силу определения множества M_{δ_n} и выбора вектора $\bar{\mu}_2^n$, $\nu_n^i = 0$, $i = 1, \ldots, q$. Таким образом,

$$\nu_0^i = \lim_{n\to\infty} \nu_n^i = 0 \quad \text{при} \quad i = 1, \ldots, q. \tag{10}$$

Сопоставляя (9) и (10), получим, что у единичного вектора ν_0 все координаты равны нулю. Полученное противоречие доказывает утверждение (α).

Из утверждения (α) следует, что числа α^i при $i = q+1, \ldots, m$ при условии $\sum\limits_{i=q+1}^{m} (\alpha^i)^2 < (\delta_0)^2$ можно рассматривать как координаты точек на $F^*(P)$, близких к P^*. Тем самым в окрестности точки P^* задана параметризация $F^*(P)$. Докажем, что эта параметризация есть регулярная параметризация.

Обозначим через $x^i = x^i(\alpha^j, t)$, $j = q+1, \ldots, m$, $i = 1, \ldots, m$, уравнения геодезических $\gamma(\mu(\alpha^j), P, t)$. Тогда уравнения поверхности $F^*(P)$ запишутся в виде

$$x^i = x^i(\alpha^j, \pi). \tag{11}$$

Пусть ν_k суть векторы в точке P^*, координаты которых ν_k^i равны $\frac{\partial x^i}{\partial \alpha^k}(\alpha^j, \pi)|_{\alpha^j=0}$, $k, j = q+1, \ldots, m$, $i = 1, \ldots, m$.

Итак, остается доказать, что векторы ν_k при $k = q+1, \ldots, m$ линейно-независимы. Найдем числа ν_k^i. Обозначим через $\eta_k^i(t) = \partial x^i(\alpha^j, t)/\partial \alpha^k|_{\alpha^j=0}$ $k, j = q+1, \ldots, m$, тогда

$$\eta_k^i(\pi) = \nu_k^i. \tag{12}$$

Система функций $\eta_k^i(t)$ при любом $k = q+1, \ldots, m$ удовлетворяет системе уравнений Якоби, которая в нашей системе координат запишется

в виде

$$(y^i)''+y^i=0, \quad i=2, \ldots, q,$$
$$(y^i)''+R_{1i,1j}y^j=0, \quad i, j=q+1, \ldots, m. \tag{13}$$

Найдем начальные условия для $\eta_k^i(t)$, Поскольку $x^i(\alpha^j, 0)=0$, $i=1, \ldots, m$, то

$$\eta_k^i(0)=0, \quad i=2, \ldots, m, \ k=q+1, \ldots, m. \tag{14}$$

Далее, так как $\frac{\partial x^i}{\partial t}(\alpha^j, 0)=\sqrt{1-\sum_{i=q+1}^{m}\cdot(\alpha^i)^2}\cdot e_1+\sum_{i=q+1}^{m}\alpha^i e_i$, то

$$\left(\eta_k^i\right)(0)=\delta_k^i, \quad i=2, \ldots, m, \ k=q+1, \ldots, m. \tag{15}$$

Наконец, из (13) и начальных условий (14) и (15) следует $\eta_k^i|t|\equiv 0$ при $i=2, \ldots, q$, $k=q+1, \ldots, m$.
В частности,

$$\eta_k^i(\pi)=0, \quad i=2, \ldots, q, \ k=q+1, \ldots, m. \tag{16}$$

Теперь из (12) и (16) следует, что векторы ν_k будут линейно-зависимы тогда и только тогда, когда определитель $\Delta=\left|\eta_k^i(\pi)\right|$, $k, i=q+1, \ldots, m$, будет отличен от нуля.

Предположим, что $\Delta=0$, тогда из определения сопряженных точек (см., например, ([3])) и (16) следовало бы, что точка P^* сопряжена P вдоль $\gamma(P, e_1, t)$ с кратностью не меньше, чем q, откуда, в свою очередь, в силу теоремы 1, следовало бы, что размерность поверхности $F(P, e_1)$ равнялась бы $q+1$, вопреки определению числа q.

Итак $F^*(P)$ есть регулярная замкнутая трижды непрерывно дифференцируемая поверхность, что и требовалось доказать.

Лемма 8. *Целочисленная группа гомологий односвязного пространства $V_1^m(q)$ с диаметром, равным π, отлична от нуля в размерностях q и $m-q$.*

Доказательство. Случай $q=0$ невозможен, в силу леммы 1. Будем поэтому считать, что $q\geqslant 1$.

Утверждение (α): $q\neq 1$.

В самом деле, если бы q равнялось 1, то тогда $V_1^m(1)$, как это нетрудно видеть, было бы гомеоморфно проективному пространству размерности m, что противоречит предположению об односвязности V_1^m.

Таким образом, мы будем предполагать, что

$$q\geqslant 2. \tag{17}$$

Утверждение (β). Если $m\geqslant 3$, то фундаментальная группа многообразия $F^*(P)$ тривиальна.

Обозначим через $\pi(\lambda)$ q-мерную плоскость E_P^m, касательную к $F(P, \lambda)$. В силу леммы 6 две плоскости $\pi(\lambda_1)$ и $\pi(\lambda_2)$ либо совпадают, либо не имеют общих ненулевых векторов.

Рассмотрим в E_P^m сферу S^{m-1} радиуса 1. Тогда пересечения двух плоскостей $\pi(\lambda_1)$ и $\pi(\lambda_2)$ либо совпадают, либо не имеют общих точек, т. е. мы имеем расслоение сферы S^{m-1} на сферы S^{q-1} размерности $q-1$.

Определим проекцию p и базу B данного расслоения. Сопоставим каждой плоскости $\pi(\lambda)$ точку $P^*(\lambda)$ на поверхности $F(P, \lambda)$, диаметрально противоположную точке P. Тем самым определена проекция p и база

$B=F^*(P)$. Утверждение (β) теперь следует из односвязности S^{m-1}, связности S^{q-1} и теоремы о накрывающей гомотопии ((4), стр. 67).

Утверждение (γ). $F^*(P)$ есть целочисленный цикл размерности $m-q$. Действительно, в утверждении (β) доказано, что $F^*(P)$ есть односвязное многообразие. Отсюда получаем, что $F^*(P)$ есть ориентируемое многообразие и, следовательно, $F^*(P)$ есть целочисленный цикл.

Теперь мы можем доказать утверждение леммы 8. Пусть λ_0 — некоторый вектор в точке P пространства $V_1^m(q)$. Обе поверхности: $F(P, \lambda_0)$ как поверхность, гомеоморфная сфере, и $F^*(P)$, как это следует из утверждения (γ), являются целочисленными циклами и, кроме того, по лемме 6 пересекаются в одной точке. Поэтому индекс пересечения циклов $F(P, \lambda_0)$ и $F^*(P)$ равен ± 1. Отсюда следует, что оба цикла $F(P, \lambda_0)$ и $F^*(P)$ не гомологичны нулю. Итак, лемма 8 доказана при $m \geqslant 3$. Поскольку случай $m=1$ тривиален, то остается рассмотреть случай $m=2$. Но при $m=2$ в силу (17) q может равняться только двум, т. е. $q=m$, а тогда $V_1^2(2)$ изометрично двумерной сфере, для которой утверждения леммы 8 справедливы.

Итак, лемма 8 доказана.

5. Доказательство теоремы 2. Возьмем точку P и через нее в направлении λ проведем геодезическую $\gamma(P, \lambda, t)$, где t — длина дуги, отсчитываемая от P. На $\gamma(P, \lambda, t)$ возьмем точку $Q=\gamma(P, \lambda, \pi)$. Тогда, с одной стороны, в силу свойств пространства V_1^m, дуга PQ геодезической $\gamma(P, \lambda, t)$ есть кратчайшая, с другой стороны, по условию теоремы 2, точки P и Q есть диаметральные точки. Следовательно, в силу леммы 3, существует некоторое число $q(P, \lambda)$ и q-мерная вполне геодезическая поверхность $F(P, \lambda)$, изометричная q-мерной сфере, содержащая точку P и геодезическую $\gamma(P, \lambda, t)$. Кроме того, из леммы 5 следует, что число q не зависит от выбора точек P и вектора λ. Тем самым доказано существование поверхности, удовлетворяющей требованиям (1)—(4) теоремы 2. Условие (5) выполняется в силу леммы 6. Остается доказать, что q равно либо 2, либо 4, либо 8, либо m.

Обозначим через $\pi(\lambda)$ q-мерную плоскость E_P^m, касательную к $F(P, \lambda)$. Построим в E_P^m сферу S^{m-1} размерности $m-1$ и радиуса 1. Пересечение $\pi(\lambda)$ и S^{m-1} есть сфера размерности $q-1$, которую мы обозначим через $S^{q-1}(\lambda)$. В силу леммы 6, две сферы $S^{q-1}(\lambda_1)$ и $S^{q-1}(\lambda_2)$ либо совпадают, либо не имеют общих точек. Это значит, что нам дано расслоение S^{m-1}, слоями которого служат сферы S^{q-1}.

База этого расслоения, как было показано в лемме 8, есть поверхность $F^*(P)$, которая по лемме 7 есть трижды непрерывно дифференцируемая регулярная поверхность в V_1^m.

Следовательно, база расслоения есть триангулируемое пространство. Поэтому к данному расслоению можно применить теорему Браудера (5), из которой следует, что $q-1$ равняется либо 1, либо 3, либо 7, либо $m-1$. Тем самым теорема 2 доказана.

6. Следствия из теоремы 2. Теорема 2*. *Если пространство V_1^m гомеоморфно сфере и имеет диаметр, равный π, то V_1^m изометрично m-мерной сфере радиуса* 1.

Доказательство. В силу теоремы 2 достаточно доказать, что для пространств V_1^m, гомеоморфных сфере, $q=m$. В самом деле, если $q<m$, то тогда, по лемме 8, целочисленные группы гомологий V_1^m отличны от нуля в размерностях q и $m-q$, что невозможно, так как у сферы группы гомологий во всех размерностях, кроме 0 и m, равны нулю. Следовательно, $q=m$ и V_1^m изометрично m-мерной сфере.

7. Заметим, что, как уже упоминалось во введении работы ([1]), римановы пространства, удовлетворяющие утверждениям теоремы 2, по-видимому, должны быть изометричны симметрическим пространствам ранга 1.

8. Теорема 2**. *Если диаметр* V_1^{2p+1} *равен* π, *то* V_1^{2p+1} *изометрично* $(2p+1)$*-мерной сфере радиуса* 1.

Доказательство. Достаточно доказать, что $q=2p+1$. Предположим, что это не так. Тогда $q=2k$, где $k=1, 2, 4$. Возьмем произвольную точку $P \in V_1^{2p+1}$ и рассмотрим сферу S^{2p} радиуса 1 в касательном пространстве E_P^{2p+1}. Так же, как это сделано в доказательстве леммы 8, построим расслоение S^{2p} на сферы S^{q-1}.

Определим теперь векторный пучок ζ_1^{q-1} как множество пар (A, λ), где $A \in S^{2p}$, а λ — вектор, касательный к слою, и векторный пучок ζ_2^{2p-q+1} как множество пар (A, μ), где $A \in S^{2p}$, а μ — вектор, касательный к S^{2p} и перпендикулярный (в смысле метрики E_P^{2p+1}) к слою. Из построения ζ_1^{q-1} и ζ_2^{2p-q+1} следует, что касательный пучок $T(S^{2p})$ можно представить в виде суммы Уитни двух нечетномерных векторных пучков $T(S^{2p}) = \xi_1^{q-1} \oplus \xi_2^{2p-q+1}$, что невозможно (см. ([6]), стр. 21), так как класс Эйлера $\chi(T(S^{2p}))$ равен 2α, где α — образующая группы $H^{2p}(S^{2p}, Z)$ (см. ([3]), стр. 36) и, следовательно, не есть элемент порядка 2. Полученное противоречие доказывает, что $q=2p+1$ и теорема 2** теперь следует из теоремы 2.

Поступила в редакцию
21 апреля 1973 г.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Топоногов В. А.* Экстремальные теоремы для римановых пространств с кривизной, ограниченной сверху, Сиб. матем. ж., XV, № 6 (1974), 1348—1371.
[2] *Morse M.* The Calculus of variations in the Large, New York, 1934.
[3] *Милнор Дж.* Теория Морса, М., «Мир», 1965.
[4] *Стинрод Н.* Топология косых произведений, М., Изд-во иностр. лит., 1953.
[5] *Brauder W.* Fibering of spheres and *H*-space with rational homology spheres, Bull. Amer. Math. Soc. 68, № 3 (1962), 202—203.
[6] *Милнор Дж.* Лекции о характеристических классах, Математика. Сб. переводов, 3, № 4 (1959), 3—53.