Р. А. Минлос, П. В. Храпов, О протекании в конечной полосе для непрерывных систем, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1985, номер 1, 56–60

$$\Phi_\alpha=\{A\in 2^X : A\cap X_\alpha\neq\varnothing,\ A\cap X_\beta=\varnothing,\ \beta<\alpha\}.$$

Легко показать, что Φ_α является F_σ-множеством в 2^X. Для любого $A\in 2^X$ и любого $n\in N$ существует единственное $\alpha_n(A)$, для которого $A\in\Phi_{\alpha_n(A)}$. Определим сечение $f:2^X\to X$, где $f(A)=\bigcap_{n=1}^{\infty}X_{\alpha_n(A)}$. Пусть V открыто в X, тогда $V=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup\{X_\alpha,\ \alpha\in A_n : X_\alpha\subset V\}$. Очевидно, $f^{-1}(X_\alpha)=$ $=\Phi_\alpha$, $\alpha\in A_n$, $n\in N$. Отсюда следует, что F — сечение первого класса.

Теорема 6. *Пусть X — T_1-пространство, имеющее сечение первого класса. Тогда X имеет точку счетного π-характера.*

Доказательство. *Пусть $f:2^X\to X$ — сечение первого класса и* $f(X)=x_0$. Тогда легко показать, что точка x_0 имеет счетную π-базу.

Пример 1. Счетное всюду плотное подмножество D^c не имеет сечения первого класса.

Теорема 7. *Пусть X — T_1-пространство, имеющее сечение первого класса. Тогда X совершенно.*

Доказательство. Пусть $F:X\to 2^X$, где $Fx=\{x\}$, $x\in X$, а $f:2^X\to X$ — сечение первого класса. Тогда $fF:X\to X$ тождественно и является отображением первого класса. Следовательно, X совершенно.

Пример 2. Пространство всех ординалов, не превосходящих ω_1, имеет непрерывное сечение, но не имеет сечения первого класса.

Теорема 8. *Пусть $f:X\xrightarrow{\text{на}}Y$ открыто-замкнуто, где X имеет сечение класса α, $0\leqslant\alpha<\omega_1$. Тогда Y имеет сечение класса α.*

Доказательство. Пусть $g:2^X\to X$ — сечение класса α. Определим $h:2^Y\to Y$, где $h(A)=fgf^{-1}(A)$. Очевидно, h — сечение класса α.

Автор благодарен В. И. Пономареву, под руководством которого выполнена настоящая работа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чобан М. М. Многозначные отображения и борелевские множества. I. — Тр. Моск. матем. об-ва, 1970, 22, 229—250.
2. Michael E. Topologies on spaces of subsets. — Trans. Amer. Math. Soc., 1951, 71, 152—182.

Поступила в редакцию 23.05.83

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА, 1985, № 1

УДК 517.2

Р. А. Минлос, П. В. Храпов

О ПРОТЕКАНИИ В КОНЕЧНОЙ ПОЛОСЕ ДЛЯ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ

Пусть в области $\Lambda=\Lambda_{S,h}\subset R^{\nu+1}$, имеющей вид цилиндра $\Lambda_{S,h}=$ $=S\times h$, где $S\subset R^\nu$ — ограниченная область, а $h\subset R^1$ — отрезок, задано пуассоновское точечное поле с интенсивностью z. Пространством конфигураций этого поля служит совокупность C_Λ конечных подмножеств $c=\{x_i\}^k{}_{i=1}$, $x_i\in\Lambda$, $i=1,\dots,k$, $k\geqslant 0$, области Λ, а распределение вероятностей на C_Λ задано плотностью

$$p_z(c)=z^{N(c)}/\Xi(\Lambda,z) \tag{1}$$

относительно лебеговой меры dc в пространстве C_Λ (см. [1]). Здесь

$N(c)$ — число точек в c, а $\Xi(\Lambda, z)$ — нормирующий множитель (см. [2]).

Зафиксируем некоторое $r>0$ и для каждого $c \in C_\Lambda$ обозначим через $g_1, \ldots, g_l$ r-связные компоненты c (см. [3]). Говорят, что конфигурация c допускает протекание, если среди ее r-связных компонент g_i, $i=1, \ldots, l$, $l \geqslant 0$, найдется такая, расстояние которой до нижнего и верхнего оснований цилиндра Λ меньше $r/2$. При этом компоненту g_i называют контуром протекания. Число таких контуров протекания в конфигурации c обозначим через $\xi(c)$.

В настоящей заметке для достаточно малых z мы исследуем вероятность $H_0(S, h, z)$ того, что конфигурация не допускает протекания (кратко — вероятность непротекания): $H_0(S, h, z) = \Pr\{c : \xi(c) = 0\}$, а также асимптотику вероятностей $H_l(S, h, z) = \Pr\{c : \xi(c) = l\}$ при некоторых соотношениях между S и z.

Прежде чем сформулировать результаты работы, введем некоторые обозначения. Пусть $C^r_\Lambda \subset C_\Lambda$ — совокупность r-связных конечных подмножеств $g \subset \Lambda$; $\hat{C}^r_\Lambda \subset C^r_\Lambda$ — совокупность тех из них, у которых $\rho\{g, (S, 0)\} < r/2$, $\rho\{g, (S, h)\} < r/2$ (контуры протекания); $\mathfrak{B}_{\Lambda, r}$ — множество конечных неупорядоченных наборов $G = \{g_1, \ldots, g_s\}$ элементов из C^r_Λ. В $\mathfrak{B}_{\Lambda, r}$ введем меру $\varkappa$, сужение которой на множестве наборов из s элементов равно:

$$d\varkappa^s = \frac{dg_1 \ldots dg_s}{s!},$$

где dg — лебеговская мера в $C^r_\Lambda \subset C_\Lambda$.

Распределение (1) в пространстве C_Λ порождает распределение в пространстве $\mathfrak{B}_{\Lambda, r}$ их r-связных компонент, плотность которого относительно меры $\varkappa$ равна:

$$p_z(G) = \prod_{g \in G} z^{n(g)} \prod_{g, h \in G} \chi_{g,h} \tilde{\Xi}^{-1}(\Lambda, z), \tag{2}$$

где

$$\chi_{g,h} = \begin{cases} 1, & \text{если } \rho(g, h) > r, \\ 0, & \text{если } \rho(g, h) \leqslant r, \end{cases}$$

$\tilde{\Xi}(\Lambda, z)$ — нормирующий множитель.

Обозначим через $\tilde{\mathfrak{B}}_{\Lambda, r} \subset \mathfrak{B}_{\Lambda, r}$ совокупность всех r-связных наборов $(g_1, \ldots, g_s)$, среди которых нет ни одного контура протекания. Из (2) следует, что вероятность непротекания равна:

$$H_0(S, h, z) = \int_{\tilde{\mathfrak{B}}_{\Lambda, r}} p_z(G)\, d\varkappa(G) = \Xi(\Lambda, z, \zeta)/\Xi(\Lambda, z, 1).$$

Здесь для произвольной ограниченной функции $\tilde{\zeta}(g)$ из C^r_Λ

$$\Xi(\Lambda, z, \tilde{\zeta}) = \int_{\mathfrak{B}_{\Lambda, r}} \prod_{g \in G} [z^{n(g)} \tilde{\zeta}(g)] \prod_{g, h \in G} \chi_{g,h}\, d\varkappa(G),$$

а $\zeta(g) = 1 - \chi_{\hat{C}^r_\Lambda}(g)$.

Для формулировки вспомогательной леммы введем величины $T_z(G, \tilde{G})$, определяемые рекуррентной системой уравнений:

$$T_z(G, \tilde{G}) =$$

$$= z^{n(\pi(G))} \prod_{g' \in G'} \chi_{\pi(G), g'} \left[T_z(G', \tilde{G}) + \sum_{G_1 \subset \tilde{G}} K(\pi(G), G_1)\, T_z(G' \cup G_1, \tilde{G} \setminus G_1) \right], \tag{3}$$

$$T_z(\varnothing, \varnothing) = 1, \quad T_z(\varnothing, \widetilde{G}) = 0, \quad \widetilde{G} \neq \varnothing,$$

$$K(\pi(G), G_1) = \prod_{g_1 \in G_1} (\chi_{\pi(G), g_1} - 1), \qquad G_1 \in \mathfrak{B}_{\Lambda, r},$$

$\pi(G)$ — некоторый фиксированный набор $g \in G$,

$$G' = G \setminus \pi(G), \quad \pi(G) \in \mathfrak{B}_{\Lambda, r} \setminus G_1.$$

При достаточно малых z функции $T_z(g, G)$, где $g \notin G$, удовлетворяют так называемой кластерной оценке

$$|T_z(g, G)| < Cz^{N(G)+n(g)} \sum_Q \prod_{(g_1, g_2) \in Q} s(g_1, g_2), \tag{4}$$

где суммирование происходит по всем деревьям Q (см. [2]) со множеством вершин $g \cup G$, а

$$s(g_1, g_2) = 1 - \chi_{g_1, g_2}.$$

Лемма. *При достаточно малых z*

$$\ln \Xi(\Lambda, z, \widetilde{\zeta}) = \int_{\mathfrak{B}_{\Lambda, r}} \psi_z(G) \prod_{g \in G} \widetilde{\zeta}(g)\, d\varkappa(G), \tag{5}$$

где

$$\psi_z(G) = \int_0^z t^{-1} \Big(\sum_{g \in G} n(g) T_t(g, G \setminus g) \Big) dt. \tag{6}$$

Систему уравнений (3), кластерную оценку (4) и лемму нетрудно получить методами исследования [2]. Из леммы и представления (5) вытекает

Теорема 1. *При достаточно малых $z < z_0$*

$$H_0(S, h, z) = \exp\Big\{ \int_{\mathfrak{B}_{\Lambda, r}} \psi_z(G) \Big[\prod_{g \in G} \zeta(g) - 1 \Big] \Big\} d\varkappa(G). \tag{7}$$

Заметим, что наши построения верны и для более общего случая, когда S — метрическое пространство с некоторой фиксированной мерой dx. В частности, из общей формулы (7) мы выведем асимптотические формулы, более пригодные для использования в приложениях. Рассмотрим случай, когда $\nu = 1$, $S = L$ — окружность, $h = r(n-1) + \varepsilon$, $0 \leqslant \varepsilon < r$, читатель без труда перенесет все наши рассуждения на случай любой размерности.

Теорема 2. *При достаточно малом $z < z_0$ вероятность непротекания равна:*

$$H_0(L, h, r, z) = exp\{-a_0(L, h, r) z^n - a_1(L, h, r)^{n+1} + z^{n+2} \varphi_n(L, h, r, z)\},$$

$$|\varphi_n(L, h, r, z)| < K^{n+2} r^{2n+3},$$

где K — абсолютная константа, $\varphi_n(L, h, r, z)$ — функция, аналитическая по z в круге $|z| < z_0$,

$$a_0(L, h, r) = L 2^{n-1} r^{2n-1} \int_{U_0} \prod_{i=2}^n \sqrt{2w_i - w_i^2}\, dw_1 \dots dw_n, \tag{8}$$

$$a_1(L, h, r) = L r^{2n+1} \int_{U_1} dw_1 \dots dw_{n+1}\, ds_2 \dots ds_{n+1}, \tag{9}$$

$$U_0=\begin{cases}0\leqslant w_1\leqslant\frac{1}{2}\\ 0\leqslant w_2\leqslant 2\\ \dots\dots\dots\\ 0\leqslant w_n\leqslant 2\\ \frac{1}{2}-\tilde\varepsilon\leqslant w_1+\ldots+w_n\leqslant 1-\tilde\varepsilon,\ \tilde\varepsilon=\varepsilon/r\end{cases}$$

$$U_1=\begin{cases}0\leqslant w_1\leqslant\frac{1}{2}\\ -1\leqslant w_2\leqslant 1\\ \dots\dots\dots\\ -1\leqslant w_{n+1}\leqslant 1\\ 0\leqslant n-1+\tilde\varepsilon-(w_1+\ldots+w_{n+1})\leqslant\frac{1}{2}\\ -\sqrt{1-w_2^2}\leqslant s_2\leqslant\sqrt{1-w_{n+1}^2}\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ -\sqrt{1-w_{n+1}^2}\leqslant s_{n+1}\leqslant\sqrt{1-w_{n+1}^2}\\ (s_3+s_2)^2+(w_3+w_2)^2>1\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ (s_{n+1}+s_{n-1})^2+(w_{n+1}+w_{n-1})^2>1.\end{cases}$$

Пользуясь теоремой 2, легко видеть, что верна

Теорема 3. *Пусть λ — произвольное положительное число, h и r фиксированы и при $L_k\to\infty$, $z_k\to 0$ выполнено $a_0(L_k, h, r)z_k{}^n=\lambda$. Тогда*

$$H_l(L_k, h, z_k)\xrightarrow[k\to\infty]{}\frac{e^{-\lambda}\lambda^l}{l!}.$$

Доказательство теоремы 2. Из (3) и (6) получаем

$$\psi_z(\{g\})=z^{n(g)},\quad \psi_z(\{g_1, g_2\})=z^{n(g_1)+n(g_2)}K(g_1, g_2).$$

Пусть $g=\{(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}$ — набор из n точек. Ясно, что

$$0\leqslant y_1\leqslant r/2,\quad -r\leqslant y_2-y_1\leqslant r, \ldots, -r\leqslant y_n-y_{n-1}\leqslant r,\quad 0\leqslant h-y_n\leqslant r/2.$$

При фиксированных $y_1, \ldots, y_n$ переменные $x_1, \ldots, x_n$ могут меняться в следующих пределах:

$$0\leqslant x_1\leqslant L,\quad (x_{i+1}-x_i)^2+(y_{i+1}-y_i)^2\leqslant r^2,\quad i=1, \ldots, n-1.$$

Отсюда интегрированием (с соответствующей заменой переменных) получим (8) и аналогично (9). Нужную оценку найдем из леммы и кластерной оценки (4). Заметим, что оценку φ_n можно значительно улучшить явным вычислением нескольких первых коэффициентов при степенях z. Теорема 2 доказана.

Замечание. Таким же методом решается задача о протекании в общем случае, когда точечное поле в Λ является гиббсовским полем, порожденным некоторым потенциалом при малых значениях активности z. В [4] изучается протекание в конечной полосе для дискретных и непрерывных систем. В первом параграфе статьи [4] решена задача протекания по узлам решетки $Z^{\nu+1}$ в объеме $S\times h\subset Z^{\nu+1}$ с верхнего основания на нижее для независимого поля и для модели Изинга. Второй параграф посвящен решению задачи протекания в случае, когда точечное поле в Λ является гиббсовским при малых значениях активности z, а дефекты имеют случайную форму. В этом параграфе развиты идеи настоящей работы, и он является ее логическим продолжением.

Задача, изучаемая в этой заметке, возникает в математических моделях старения полимеров [5].

Авторы благодарны С. А. Молчанову за постановку задачи и полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Минлос Р. А. Лекции по статистической физике. — Успехи матем. наук, 1968, 23, с. 139.
2. Минлос Р. А., Погосян С. К. Оценки функций Урселла, групповых функций и их производных. — Теорет. и матем. физика, 1977, 31, № 2, 199—213.
3. Малышев В. А. Кластерные разложения в решетчатых моделях статистической физики и квантовой теории поля. — Успехи матем. наук, 1980, 35 (2), 3—53.
4. Храпов П. В. О протекании в конечной полосе для дискретных и непрерывных систем. Деп. ВИНИТИ 13.07.84, № 5061-84.
5. Брагинский Р. П., Гнеденко Б. В., Молчанов С. А., Пешков И. Б., Рыбников К. А. Математические модели старения полимерных изоляционных материалов. — Докл. АН СССР, 1983, 268, № 2, 281—284.

Поступила в редакцию
20.06.83

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА, 1985, № 1

УДК 513.83

В. В. Федорчук

О ПРОДОЛЖЕНИИ РАССЛОЕНИЙ

Пусть $p:E\to B$ — расслоение в смысле Стинрода [1] со слоем F и структурной группой G. Скажем, что расслоение $p_1:E_1\to B_1$ с тем же слоем и с той же структурной группой является продолжением расслоения p, если существуют такие вложения $E\subset E_1$ и $B\subset B_1$, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} E & \subset & E_1 \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_1} \\ B & \subset & B_1 \end{array}$$

коммутативна и расслоение $p_1|p_1^{-1}B$ совпадает с p.

Далее через $\mathscr{P}$ будем обозначать некоторый класс паракомпактов, вместе с каждым X содержащий и всякое его замкнутое подмножество.

Определение. Пусть G — топологическая группа. Скажем, что *для группы G разрешима задача окрестностного продолжения расслоений в классе $\mathscr{P}$*, если для всякого расслоения в смысле Стинрода $p:E\to B$ со структурной группой G над базой $B\in\mathscr{P}$ и для всякого замкнутого вложения $B\subset X\in\mathscr{P}$ существует продолжение расслоения p на некоторую окрестность B_1 множества B в X.

Теорема. *Если $G\in \mathrm{ANE}(\mathscr{P})$, то для группы G разрешима задача окрестностного продолжения расслоений в классе $\mathscr{P}$.*

Доказательство. Согласно [1, с. 20] достаточно построить открытое семейство $w=\{W_s:s\in S\}$ подмножеств X и семейство отображений $h_{ij}:W_i\cap W_j\to G$ для всех $i,j\in S$, удовлетворяющих условиям:

(0) $w|B=\{W_s\cap B:s\in S\}$ покрывает B;