Н.А.Широков

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ А.Г.ВИТУШКИНА

Пусть $E \subset \mathbb{C}$ – компакт без внутренних точек, $C(E)$ – множество всех непрерывных на E функций, $R(E)$ – замыкание в $C(E)$ множества рациональных функций с полюсами вне E. А.Г.Витушкину [I] принадлежит замечательное условие совпадения $R(E)$ с $C(E)$

ТЕОРЕМА А. Пусть для почти всех по плоской мере Лебега точек $z \in E$ выполнено

$$\overline{\lim_{r \to 0}} \frac{\gamma(B(z,r) \setminus E)}{r^2} > 0 , \qquad (I)$$

где γ – аналитическая емкость, $B(z,r) \overset{def}{=} \{\xi : |\xi - z| < r\}$. Тогда $R(E) = C(E)$.

Предшествующий результат А.Г.Витушкина в этом направлении был чуть слабее [2]: требовалось, чтобы верхний предел в (I) был п.в. равен $+\infty$. Доказательство каждой из этих теорем достаточно сложно.

Целью настоящей заметки является изложение более простого доказательства слабого условия А.Г.Витушкина.

ТЕОРЕМА В. Если для почти всех точек $z \in E$ верхний предел в (I) равен $+\infty$, то $R(E) = C(E)$.

I. Прежде чем приступать к доказательству, напомним определение и простейшие свойства аналитической емкости. Пусть K – компакт, не разделяющий плоскости, $A(K)$ – множество функций f, аналитических в $\mathbb{C} \setminus K$ и таких, что $|f| \leq 1$ и $f(\infty) = 0$. Для $f \in A(K)$ $\gamma_f \overset{def}{=} \lim_{\xi \to \infty} \xi f(\xi)$. Тогда полагаем

$$\gamma(K) \overset{def}{=} \sup_{f \in A(K)} |\gamma_f| .$$

Если множество $G \subset \mathbb{C}$ ограничено и открыто, то

$$\gamma(G) \overset{def}{=} \sup_{K \subset G} \gamma(K) \qquad (2)$$

где $\sup$ в (2) берется по всем компактам $K \subset G$.

ЛЕММА I [3], гл.8. Если $K \subset \mathbb{C}$ – компакт, то существует функция $f \in A(K)$, для которой $\gamma_f = \gamma(K)$.

ЛЕММА 2 [3], гл.8. Если множество $G \subset \mathbb{C}$ открыто и ограничено, то существует компакт $K \subset G$, состоящий из конечного числа жордановых областей с C^1-гладкой границей, для которого $\gamma(K) \geq \frac{1}{2}\gamma(G)$.

ЛЕММА 3 [3], гл.8. Пусть $K \subset B(z_0, R)$ – компакт, $f \in A(K)$

$f(z)=\frac{\gamma_1}{z-z_0}+\sum_{n\geq 2}\frac{a_n}{(z-z_0)^n}$ вне $B(z_0,R)$. Тогда

$$|a_n|<en\,R^{n-1}\gamma(K),\quad n\geq 2 \tag{3}$$

Нам понадобится следствие из леммы 3.

ЛЕММА 4. Пусть $K\subset B(z_0,R)$ - компакт. Тогда в обозначениях леммы 3 при $|z-z_0|\geq 2R$ выполняется

$$\left|\sum_{n\geq 2}\frac{a_n}{(z-z_0)^n}\right|<8e\,\frac{R\gamma(K)}{|z-z_0|^2}. \tag{4}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (3) получаем

$$\left|\sum_{n\geq 2}\frac{a_n}{(z-z_0)^n}\right|<\sum_{n\geq 2}\frac{enR^{n-1}\gamma(K)}{|z-z_0|^n}<2e\frac{R\gamma(K)}{|z-z_0|^2}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{R}{|z-z_0|}\right)^2}<\frac{8eR\gamma(K)}{|z-z_0|^2}\ \bullet$$

2. Приступим к доказательству теоремы В. Из соображений двойственности ясно, что достаточно установить такое утверждение:

всякая комплекснозначная мера на E, ортогональная $R(E)$, есть тождественный нуль.

Для комплекснозначной меры μ на E положим

$$\hat{\mu}(z)\overset{\text{def}}{=}\int_E\frac{d\mu(\xi)}{\xi-z}.$$

Если мера μ ортогональна $R(E)$, то $\hat{\mu}(z)=0$ при $z\in\mathbb{C}\setminus E$. Функция $\hat{\mu}(z)$ определена также при п.в. $z\in E$ (см.лемму 5 ниже). Если мы установим, что $\hat{\mu}(z)=0$ п.в. на E, то по теореме Л.Шварца [4] $\mu=0$. Таким образом, достаточно доказать следующее:

ОСНОВНАЯ ЛЕММА. Пусть компакт E удовлетворяет условиям теоремы В, μ - комплекснозначная мера на E, $\hat{\mu}(z)=0$ при $z\in\mathbb{C}\setminus E$. Тогда для п.в. $z\in E$ $\hat{\mu}(z)=0$.

3. Потребуются два вспомогательных факта.

ЛЕММА 5. Пусть $E\subset\mathbb{C}$ произвольный компакт, μ - комплекснозначная мера на E. Тогда при п.в. $z\in E$

$$V_\mu(z)\overset{\text{def}}{=}\int_E\frac{d|\mu|(\xi)}{|\xi-z|}<\infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО приведем для полноты изложения. Если K - круг, содержащий E, то

$$\int_K V_\mu(z)\,dx\,dy=\int_E d|\mu|(\xi)\int_K\frac{dx\,dy}{|\xi-z|}<\infty,$$

значит, $V_\mu(z)<\infty$ при п.в. $z\in K$. ●

Для комплекснозначной меры μ в $\mathbb{C}$ полагаем

$$M_\mu(z) \overset{\text{def}}{=} \sup_{r>0} \frac{1}{\pi r^2} \int\limits_{B(z,r)} d|\mu|.$$

ЛЕММА 6 [5], гл.I. Если μ - финитная мера в $\mathbb{C}$, то при п.в. $z\in\mathbb{C}$ $M_\mu(z)<\infty$.

4. Докажем теперь основную лемму (и, тем самым, теорему В). Пусть $\mathcal{E}$ - множество полной меры в E, для точек z которого бесконечен верхний предел в (I), $V_\mu(z)<\infty$ и $M_\mu(z)<\infty$. Зададимся некоторым $\delta>0$ и пусть $\gamma(\delta)\overset{\text{def}}{=}\gamma(B(z,\delta)\setminus E)$. выберем, используя лемму 2, компакт $K\subset B(z,\delta)\setminus E$, состоящий из конечного числа жордановых областей с C^1-гладкой границей, для которого $\gamma(K)>\frac{1}{2}\gamma(\delta)$, и выберем, используя лемму I, функцию $\varphi\in A(K)$, для которой $\gamma_\varphi=\gamma(K)$. Пусть $f=\varphi/\gamma_\varphi$. Поскольку $\hat{\mu}(t)=0$ при $t\in\mathbb{C}\setminus E$ и $K\subset\mathbb{C}\setminus E$ имеем: $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial K} f(t)\,\hat{\mu}(t)\,dt=0$. Но, с другой стороны,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial K} f(t)\hat{\mu}(t)dt=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial K} f(t)dt\int\limits_E \frac{d\mu(\xi)}{\xi-t}=$$

$$=\int\limits_E d\mu(\xi)\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial K}\frac{f(t)dt}{\xi-t}=\int\limits_E f(\xi)\,d\mu(\xi).$$

Значит, $\int\limits_E f(\xi)\,d\mu(\xi)=0$ и

$$\hat{\mu}(z)=\int\limits_E\frac{d\mu(\xi)}{\xi-z}=\int\limits_E\frac{d\mu(\xi)}{\xi-z}-\int\limits_E f(\xi)\,d\mu(\xi)=$$

$$=\int\limits_{B(z,2\delta)\cap E}\frac{d\mu(\xi)}{\xi-z}-\int\limits_{B(z,2\delta)\cap E} f(\xi)d\mu(\xi)+\int\limits_{E\setminus B(z,2\delta)}\left(\frac{1}{\xi-z}-f(\xi)\right)d\mu(\xi)\overset{\text{def}}{=}I_1+I_2+I_3; \tag{5}$$

$$|I_1|\leq\int\limits_{B(z,2\delta)\cap E}\frac{d|\mu|(\xi)}{|\xi-z|}\overset{\text{def}}{=}\alpha_1(\delta).$$

Так как $f\in A(K)$ и $\gamma_\varphi=\gamma(K)>\frac{1}{2}\gamma(\delta)$, то $|f|\leq 1/\gamma_\varphi\leq$ $\leq 2/\gamma(\delta)$ и

$$|I_2|\leq\frac{2}{\gamma(\delta)}\int\limits_{B(z,2\delta)\cap E}d|\mu|=\frac{8\pi\delta^2}{\gamma(\delta)}\cdot\frac{1}{4\pi\delta^2}\int\limits_{B(z,2\delta)}d|\mu|\leq\frac{8\pi\delta^2}{\gamma(\delta)}M_\mu(z)\overset{\text{def}}{=}\alpha_2(\delta).$$

Лемма 4 и равенство $\gamma_\varphi=\gamma(K)$ влекут при $|\xi-z|\geq 2\delta$:

$$\left|\frac{1}{\xi-z}-f(\xi)\right|=\left|\frac{1}{\xi-z}-\frac{\varphi(\xi)}{\gamma(K)}\right|<\frac{8e\delta}{|\xi-z|^2}, \tag{7}$$

и тогда

$$|I_3|\leq 8e\delta\int\limits_{|\xi-z|\geq 2\delta}\frac{d|\mu|(\xi)}{|\xi-z|^2}=8e\delta\sum_{\substack{n\geq 1\\ 2^n\delta\leq \operatorname{diam}E}}\int\limits_{2^n\delta\leq|\xi-z|<2^{n+1}\delta}\leq$$

$$\leq 32\pi e\delta\sum_{\substack{n\geq 1\\ 2^n\delta\leq \operatorname{diam}E}}\frac{1}{\pi 2^{2(n+1)}\delta^2}\int\limits_{|\xi-z|<2^{n+1}\delta}d|\mu|\leq 400\,\delta\log\frac{\operatorname{diam}E}{\delta}\cdot M_\mu(z)\overset{\text{def}}{=}d_3(\delta). \tag{8}$$

В итоге (5) – (8) влекут

$$|\hat{\mu}(z)|\leq d_1(\delta)+d_2(\delta)+d_3(\delta). \tag{9}$$

Левая часть в (9) не зависит от δ, в силу $z\in\mathcal{E}$ имеем $\lim\limits_{\delta\to 0}d_1(\delta)=0$, $\lim\limits_{\delta\to 0}d_2(\delta)=0$, $\lim\limits_{\delta\to 0}d_3(\delta)=0$, и потому $\hat{\mu}(z)=0$. ●

Литература

1. Витушкин А.Г. Аналитическая емкость множества в задачах теории приближений. – Успехи матем.наук, 1967, т.22, № 6. 141–199.
2. Витушкин А.Г. Условия на множество, необходимые и достаточные для возможности равномерного приближения аналитическими (или рациональными) функциями всякой непрерывной на этом множестве функции. – Докл.АН СССР, 1959, т.128, № 1, 17–21.
3. Гамелин Т. Равномерные алгебры. М., 1973.
4. Schwartz L. Théorie des distributiones, т.1, Paris, 1950.
5. Стейн Е.М. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций, М., 1973.

N.A.Shirokov. On a theorem of A.G.Vitushkin.

Summary

A.G.Vitushkin in [1] gives a sufficient condition (in terms of analytic capacity) for the coincidence of algebras $R(E)$ and $C(E)$, E being a compact subset of $\mathbb{C}$. We present here an easy proof of Vitushkin's theorem.