И. А. Лавров, Ответ на один вопрос П. Р. Янга, *Алгебра и логика*, 1968, том 7, номер 2, 48–54

Алгебра и логика, 7, №2 (1968), 48–54.

УДК 51.01:518.5

ОТВЕТ НА ОДИН ВОПРОС П.Р.ЯНГА

И.А.ЛАВРОВ

В своей работе [1] П.Р. Янг изучает множества A, которые удовлетворяют следующему соотношению:

$$A \times A \leqslant_m A\,, \tag{1}$$

где $\leqslant_m$ является частично упорядоченным отношением m-сводимости подмножеств множества натуральных чисел. В этой же статье П.Р.Янг отмечает, что ему неизвестно, существуют ли простые, псевдопростые или псевдокреативные множества A, удовлетворяющие (1). Как известно, П.Фишер [2] указал пример простого множества A, не удовлетворяющего (1). Янг строит пример псевдокреативного множества A, которое не удовлетворяет (1). Таким образом, естественно предположение Янга о том, что условие (1) является необходимым и достаточным условием того, что множество A либо рекурсивное, либо креативное. В настоящей заметке мы построим примеры простых, псевдопростых и псевдокреативных множеств и тем самым докажем, что предположение Янга неверно.*)

Напомним основные определения, которые нам потребуются в дальнейшем. Везде дальше $\mathcal{N}$ будет обозначать множество всех натуральных чисел, и в качестве множеств будут браться только подмно-

---

*) Из книги Х.Роджерса [7] автору стало известно, что пример простого множества A, которое удовлетворяет (1), построил Джокуш. К сожалению, работа Джокуша оказалась автору недоступной.

жества множества N .

Говорят, что множество A m- сводимо к множеству B (символически $A \leq_m B$), если существует частично рекурсивная функция $f(x)$ такая, что

$$x \in A \longleftrightarrow f(x) \in B \ .$$

Если $f(x)$ одно-однозначная, то A 1 -сводима к B (символически $A \leq_1 B$). $A \times A$ обозначает далее множество

$$B = \{x / \ (\exists y z) \ [y, z \in A \ \& \ x = c(y, z)]\} \ ,$$

где $c(x, y)$ – функция, одно-однозначно нумерующая пары натуральных чисел. Функции $\ell(x)$ и $r(x)$ по x дают, соответственно, первую и вторую координаты пары, имеющей номер x .

Будем предполагать известными определения рекурсивно перечислимых, рекурсивных, простых, креативных, гиперпростых множеств и табличной сводимости (см., например, [3]).

Так как определения псевдопростых и псевдокреативных множеств менее известны, приведем здесь эти определения.

Множество A называется псевдопростым, если

1) A – рекурсивно перечислимо,

2) A – не рекурсивно,

3) в дополнении множества A – A' имеется бесконечное рекурсивно перечислимое множество B такое, что $A \cup B$ просто. Множество A называется псевдокреативным, если

1) A – рекурсивно перечислимо,

2) A – не креативно,

3) для каждого рекурсивно перечислимого множества B из A' – дополнения к множеству A существует бесконечное рекурсивно перечислимое множество C из A' , такое, что

$$B \cap C = \phi \ .$$

Нам понадобятся также определения ретрассируемого множества и регрессивного множества.

Множество A называется регрессивным, если оно бесконечно и существует частично рекурсивная функция $g(x)$ и неповторяющееся перечисление $a_0, a_1, a_2, \ldots$ элементов A такие, что $g(a_i)$ определено для всех i и

$$\begin{cases} g(a_0) = a_0 \ , \\ g(a_{n+1}) = a_n . \end{cases}$$

Если перечисление $a_0, a_1, \ldots$ множества A – в порядке возрастания, то A называется ретрассируемым [5], [6].

Назовем множество A наследственно замкнутым, если существует такая двухместная рекурсивная функция $f(x,y)$, что

$$x, y \in A \longrightarrow f(x,y) \in A.$$

Из определения $A \times A$ и $\leq_m$ непосредственно вытекает следующая

ЛЕММА. $A \times A \leq_m A$ тогда и только тогда, когда A наследственно замкнуто.

1) $\longrightarrow$. Пусть $\varphi(x)$– сводящая $A \times A$ к A функция. Тогда относительно функции $R_1(x,y) = \varphi(c(x,y))$ множество A наследственно замкнуто.

2) $\longleftarrow$. Пусть A наследственно замкнуто относительно $f(x,y)$. Тогда функция $R_2(x) = f(\ell(x), r(x))$ m – сводит $A \times A$ к A.

ТЕОРЕМА 1. Существует наследственно замкнутое псевдокреативное множество A.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть B – гиперпростое множество. Построим множество A_B следующим образом:

$$x \in A_B \longrightarrow (\forall i) \left[p_i / x \rightarrow i \in B \right],$$

где p_i – функция, обозначающая i -ое простое число.

Имеем $i \in B \longrightarrow p_i \in A_B$. Таким образом, $B \lneq A_B$. Ясно, что A_B – рекурсивно перечислимо, но не рекурсивно. Пусть C – произвольное рекурсивно перечислимое множество из A'_B. Определим D следующим образом:

$$i \in D \longrightarrow (\exists t) \left[p_i^t \in C \right].$$

Ясно, что $D \subsetneqq B'$ (включение собственное, так как B' не рекурсивно перечислимо). Пусть $j \in B' - D$. Тогда множество

$$E = \{ p_j, p_j^2, p_j^3, \ldots \}$$

рекурсивно перечислимо, $E \subset B'$ и $C \cap D = \varnothing$.

Множество A_B не креативное, так как ясно, что

$$A_B \underset{tt}{\leqslant} B,$$

а, как известно [4], креативное множество не сводимо к гиперпростому. Итак, A_B - псевдокреативное множество. Но A_B наследственно замкнуто относительно $f(x,y)=x\cdot y$.

СЛЕДСТВИЕ 1. В каждой табличной степени, представляемой гиперпростым множеством B (т.е. семейство множеств X таких, что $B \underset{tt}{\leqslant} X \underset{tt}{\leqslant} B$) имеется псевдокреативное множество.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $B \underset{tt}{\leqslant} A_B \underset{tt}{\leqslant} B$.

ТЕОРЕМА 2. Всякое рекурсивно перечислимое множество A с регрессивным дополнением наследственно замкнуто.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A - рекурсивно перечислимое множество, дополнение которого регрессивно. Так как A рекурсивно перечислимо, то регрессирующую для A' функцию можно выбрать рекурсивной. Пусть $\tau(x)$ - такая функция.

Для натурального X обозначим через R_X множество

$$\{x, \tau(x), \tau^2(x), \ldots\}.$$

Заметим, что если $x \in A'$, то R_X - конечное множество, так как

$$(\exists t)\ [\tau^t(x) = \tau^{t+1}(x) = a_0],$$

где a_0 - первый элемент в неповторяющемся перечислении $A' - a_0, a_1, \ldots$

Определим $f(x,y)$ следующим образом. Пусть нам даны фиксированные x и y.

1 ЭТАП: Начнем одновременно перечислять A и R_X. Тогда через конечное число шагов или x появится в A, или R_X стабилизируется. В первом случае, когда x появится в A, положим $f(x,y)=y$. Если x в A не появится, а R_X стабилизируется, то есть при некотором t $\tau^t(x) = \tau^{t+1}(x)$, то сравним $\tau^t(x)$ с a_0. Если $\tau^t(x) \neq a_0$, то положим $f(x,y)=y$. Если же

$\tau^t(x) = a_0$, то переходим ко 2-му этапу.

2 ЭТАП: Начнём одновременно перечислять A и R_y . Тогда через конечное число шагов или y появится в A , или R_y стабилизируется. В первом случае, когда y появится в A , положим $f(x,y) = x$. Если x в A не появится , а R_y стабилизируется, т.е. при некотором i $\tau^i(y) = \tau^{i+1}(y)$, то сравним $\tau^i(y)$ с a_0 Если $\tau^i(y) \neq a_0$, то положим $f(x,y) = x$. Если же $\tau^i(y) = a_0$, то переходим к 3-му этапу.

3 ЭТАП: Могут встретиться 3 случая:

а) $y \in R_x$, тогда положим $f(x,y) = y$;

б) $x \in R_y$, тогда положим $f(x,y) = x$;

в) $y \notin R_x$, $x \notin R_y$. В этом случае, по крайней мере, один из x или y принадлежит A . Перечисляем A до тех пор, пока один из x или y не появится в A . Если x появится в A , то положим $f(x,y) = y$. Если y появится в A , то положим $f(x,y) = x$.

Итак, $f(x,y)$ определена во всех случаях.

Докажем, что A наследственно замкнуто относительно $f(x,y)$.

Так как $f(x,y)$ равна одному из своих аргументов, то

$$x, y \in A \to f(x,y) \in A .$$

Пусть для некоторых x, y $f(x,y) \in A$. Тогда, например,

$$x \in A,\ y \notin A,\ f(x,y) = x .$$

Ясно, что значение $f(x,y)$ в этом случае не могло быть вычислено на 1-м этапе, так как там везде $f(x,y) = y$. В этом случае $f(x,y)$ не может быть вычислена и на 2-м этапе, так как y в A не появится, R_y стабилизируется на некотором шаге i и $\tau^i(y) = \tau^{i+1}(y) = a_0$. Итак, $f(x,y)$ вычислена на 3-м этапе, а именно или в случае б), или в случае в).

СЛУЧАЙ б) $x \in R_y$. Так как $y \notin A$, то $x \notin A$. Этот случай невозможен.

СЛУЧАЙ в). В перечислении A получим x и $f(x,y) = y$, что невозможно. Итак, $f(x,y) \in A \,\&\, x \in A \to y \in A$.

Аналогично проверяется, что $f(x,y) \in A \,\&\, y \in A \to x \in A$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Существует наследственно замкнутое простое (и даже гиперпростое) множество A .

Известно, что рекурсивно перечислимое множество с ретрассируемым дополнением (а, значит, регрессивным дополнением) либо рекурсивно, либо гиперпросто [5].

ТЕОРЕМА 3. Существует наследственно замкнутое псевдопростое множество.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть S - наследственно замкнутое относительно $f(x,y)$ простое множество, а C - рекурсивное. Пусть $\alpha(x)$ перечисляет C без повторения, $\beta(x)$ перечисляет S без повторения. Предполагаем также, что C и C' бесконечные множества.

Обозначим через A множество, порождаемое функцией

$$\gamma(x) = \alpha(\beta(x)).$$

Ясно, что A - рекурсивно перечислимо, но не рекурсивно. Далее, $C' \subset A'$ а $A \cup C'$ - простое. Итак, A - псевдопростое множество. Определим функцию $F(x,y)$ следующим образом:

$$F(x,y) = \begin{cases} \alpha(f(u,v)) & \text{, если } \alpha(u)=x,\ \alpha(v)=y, \\ x & \text{, если } x \in C', \\ y & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда имеем

$$x, y \in A \leftrightarrow (\exists u v)\,[u, v \in S \ \&\ x = \alpha(u)\ \&\ y = \alpha(v)] \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow f(u,v) \in S \leftrightarrow \alpha(f(u,v)) = F(x,y) \in A.$$

Значит, A наследственно замкнуто относительно $F(x,y)$.

Поступила в редакцию

1. Ш. 1968 г.

Литература

1. P.R.Young. A note on pseudo-creative sets and cylinders,Pacif . Journal Math.,v.14,2,749-753,1964.

2. P.Fischer. A note on bounded-truth-table reducibility , Proc.Amer.Math.Soc.,14,875-877,1963.

3. А.И.Мальцев. Алгоритм и рекурсивные функции, М., 1965.

4. E.L.Post. Recursively enumerable sets of positive integers and their decision problems.Bull.Amer.Math.Soc.,50,1944, 284-316.

5. J.C.E.Dekker,J.Myhill.Retraceable sets,Canadian Journal Math.,v.X, n.3,1958,357-373.

6. J.C.E.Dekker.Infinite series of isols,Proceeding of symposia in pure and applied mathematics,v.5,Amer.Math.Soc.,Pro - vidence,R.I.,1962,77-96.

7. H.Rogers. Recursive functions and effective computabi - lity, McGraw-Hill,New York.