

Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

L. V. Muravleva, S. V. Sheshenin, Effective properties of reinforced concrete slabs under elastoplastic deformations,
Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh., 2004, Number 3, 62–65

<https://www.mathnet.ru/eng/vmumm1253>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.85

May 18, 2025, 18:52:29



УДК 539.3

ЭФФЕКТИВНЫЕ СВОЙСТВА ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ПЛИТ ПРИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЯХ

Л. В. Муравлева, С. В. Шешенин

В статье представлено развитие известной методики осреднения для тел, которые имеют периодическую структуру в двух (или одном) направлениях и не имеют периодичности в третьем направлении. В качестве примера рассмотрены железобетонные плиты, в которых арматура не имеет периодической структуры по толщине.

Наш интерес к таким объектам был вызван работами [1–3], в которых экспериментально изучалось явление так называемого мягкого удара (soft impact), другими словами, удара по железобетонной плите деформируемым телом. Один из выводов экспериментального исследования состоит в том, что это явление может рассматриваться как квазистатический процесс и воздействие деформируемого тела может быть заменено действием силы. Наше моделирование базируется на этой гипотезе.

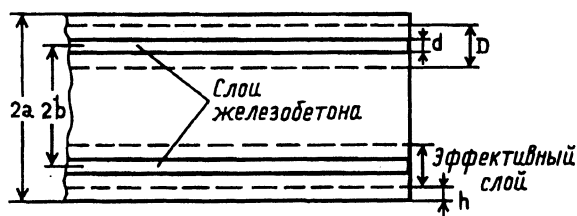


Рис. 1. Вид железобетонной плиты сбоку

Рассматривается железобетонная плита с двумя слоями арматуры, параллельными срединной плоскости и симметричными относительно нее. В направлениях x_1 и x_2 эти слои имеют периодическую структуру и состоят из взаимно ортогональных волокон с круглыми поперечными сечениями. В рамках метода конечных элементов такая структура моделируется объемными элементами, объединенными со стержневыми элементами. Определенное неудобство такого подхода заключается в том, что число элементов определяется

структурой арматуры и может быть достаточно велико.

Другой метод состоит в использовании методики осреднения. В области упругости можно определить эффективные жесткости железобетонной плиты на растяжение и изгиб и далее рассматривать однородную плиту с эффективными свойствами. Этот путь моделирования состоит в осреднении плиты целиком по толщине и представляется неадекватным в области пластических деформаций. Однако возможен другой путь — осреднение свойств слоя железобетона и использование при моделировании многослойной (для данной конкретной структуры — пятислойной) плиты. При этом слой арматуры заменяется некоторым эффективным слоем толщины D (рис. 1).

Прежде чем перейти к обсуждению эффективных свойств в упругопластической области, приведем сравнение вычисленных на основе данной методики упругих модулей эффективного слоя с модулями, вычисленными по приближенным аналитическим формулам, полученным на основе результатов работы [4]. Не вдаваясь в детали, приведем окончательные формулы для модулей упругости эффективного слоя исходя из результатов этой работы:

$$\begin{aligned}
 E_{11}^{\text{eff}} &= \lambda_0 + 2\mu_0 + \tilde{\nu}^2 \mu_1 \left(2 + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \mu_1} \right), \\
 E_{22}^{\text{eff}} &= E_{11}^{\text{eff}}, \\
 E_{33}^{\text{eff}} &= \lambda_0 + 2\mu_0 + \tilde{d}^2 \mu_0 \left(2 + \frac{\lambda_0}{\lambda_0 + \mu_0} \right), \\
 E_{1212}^{\text{eff}} &= \mu_0 (1 + \tilde{d}), \\
 E_{1122}^{\text{eff}} &= \lambda_0 + 4\tilde{d}^2 \mu_0 / (\lambda_0 + \mu_0), \\
 E_{1313}^{\text{eff}} &= E_{2323}^{\text{eff}} = E_{1212}^{\text{eff}}.
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Поскольку асимптотические оценки не позволяют определить точность формул (1) при конкретных значениях параметров, мы провели достаточно полное исследование точности указанных формул на основе сравнения с вычисленными значениями эффективных модулей. Частично это сравнение приведено в табл. 1.

В этой таблице используются следующие обозначения: E — модуль бетона, $E_{\text{СТ}}$ — модуль стальной арматуры. Результаты приведены для различных значений радиуса арматуры R , через d обозначена

сторона квадратного сечения арматуры. Дело в том, что формулы (1) получены для арматуры квадратного сечения; в железобетонных плитах арматура имеет круглое поперечное сечение, поэтому по предложенной нами методике были вычислены эффективные свойства как для квадратного, так и для круглого сечений (площади сечений одинаковы). Коэффициент Пуассона для стали равняется 0,3 и для бетона — 0,2.

В табл. 1 в первой колонке приведены упругие и геометрические параметры ячейки периодичности, во второй — названия компонентов модулей упругости эффективного слоя. В колонке 3 содержатся компоненты, вычисленные для круглого сечения арматуры, в колонке 4 — для квадратного. Различие между ними весьма незначительно. Наконец, в пятой колонке приводятся значения, вычисленные по формулам (1).

Как видно из таблицы, точность аналитических формул для сдвиговых модулей E_{1212}^{eff} и E_{1313}^{eff} , составляющая около 10%, ниже, чем соответствующая точность для модулей на растяжение E_{1111}^{eff} и E_{2222}^{eff} , которая составляет не более 2%.

Однако влияние сдвиговых модулей при изгибе не столь существенно.

Теперь перейдем к основной цели данной работы — определению эффективных свойств слоя железобетона в случае пластичности. К сожалению, существует различие между случаями вычисления упругих и упругопластических свойств. В упругом случае мы можем вычислить как средние значения напряжений и деформаций, так и их значения в компонентах композитов, т.е. в арматуре и бетоне. В пластическом случае удастся вычислить только связь между средними напряжениями и деформациями, т.е. одноосные кривые напряжения ~ деформации, подобные графикам, приведенным на рис. 2. Вычисление этих кривых может быть названо вычислительным экспериментом, поскольку точно соответствует реальному эксперименту.

Опишем, как проводился расчет. Рассматривается задача на ячейке периодичности, при этом приложенное перемещение монотонно возрастает. Свойства компонентов — упругопластические (нелинейные свойства бетона также моделируются как упругопластические, причем они существенно различаются при растяжении и сжатии). Продвигаясь небольшими шагами по параметру нагружения (в данном случае это перемещение), на каждом шаге получаем осредненные соотношения $\sigma \sim \epsilon$. Так как среда периодическая и симметричная относительно плоских границ ячейки, то решение задачи на ячейке полностью соответствует численному моделированию растяжения ~ сжатия образца в виде параллелепипеда с целым числом ячеек периодичности. На боковых гранях образца выполняется условие отсутствия перемещений по нормали. Аналогично проводится расчет эффективных соотношений между сдвиговыми напряжениями и деформациями.

Как правило, реальные эксперименты проводятся при свободной боковой поверхности. Но численное решение такой задачи на ячейке получить очень сложно в связи с плохой сходимостью итераций. Поэтому кривые $\sigma \sim \epsilon$, полученные при условии отсутствия боковых нормальных перемещений, были пересчитаны в кривые $\sigma \sim \epsilon$, соответствующие свободной боковой поверхности.

Таблица 1

Сравнение численного решения с асимптотическими формулами

Тип ячейки	Эффективные модули	Круглое сечение	Квадратное сечение	Аналитические формулы
$E=20000,$ $E_{СТ} = 200000,$ $R = 0,0564$ $(d = 0,1)$	E_{1111}^{eff}	24357,6	24380,8	24222,2
	E_{2222}^{eff}	22776,	22822,5	22422,2
	E_{1122}^{eff}	5702,5	5699,7	5680,5
	E_{1212}^{eff}	860,8	8625,2	8333,3
	E_{1313}^{eff}	8684,3	8710,4	8333,3
$E = 20000,$ $E_{СТ} = 200000,$ $R = 0,113$ $(d = 0,2)$	E_{1111}^{eff}	30830,1	30897,8	30222,2
	E_{2222}^{eff}	24374,8	24514,2	23022,2
	E_{1122}^{eff}	6111,7	6090,3	6055,5
	E_{1212}^{eff}	9590,1	9677,5	8333,3
	E_{1313}^{eff}	10168,7	10253,3	8333,3
$E \neq 20000,$ $E_{СТ} = 160000,$ $R = 0,141$ $(d = 0,25)$	E_{1111}^{eff}	33033,8	33104,5	32222,2
	E_{2222}^{eff}	25433,3	25604,7	23472,2
	E_{1122}^{eff}	6372,6	6343,1	6336,8
	E_{1212}^{eff}	10209,0	10338,5	8333,3
	E_{1313}^{eff}	11126,1	11219,9	8333,3

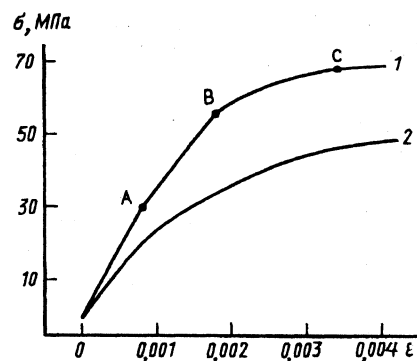


Рис. 2. Эффективные кривые $\sigma_{11} \sim \epsilon_{11}$ (1) и $\sigma_{22} \sim \epsilon_{11}$ (2) в случае одноосного статического сжатия

Таким образом были получены эффективные кривые для слоя железобетона при одноосном растяжении, сжатии и сдвиге, соответствующие статическому и динамическому нагружению, на основе свойств бетона и стали, взятых из работы [3]. Эффективные свойства слоя железобетона, как и бетона, различны для одноосного растяжения и сжатия. Графики напряжение ~ деформация различаются также для статического и динамического нагружения, так как различаются статические и динамические свойства бетона и стали. На рис. 2 приведены графики $\sigma_{11} \sim \varepsilon_{11}$ (кривая 1) и $\sigma_{22} \sim \varepsilon_{22}$ (кривая 2) для одноосного сжатия при статическом нагружении. На графике $\sigma_{11} \sim \varepsilon_{11}$ отмечены точки *A*, *B* и *C*. Точка *A* соответствует появлению начальных трещин в бетоне, точка *B* — пределу текучести арматуры и точка *C* — разрушению бетона.

Полученные кривые могут служить “входными данными” для различных теорий пластичности [5, 6]. Одной из наиболее используемых является теория анизотропной пластичности Хилла [5] со следующим критерием пластичности:

$$A(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + B(\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + C(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + M\sigma_{12}^2 + N\sigma_{13}^2 + L\sigma_{23}^2 = \Delta^2. \quad (2)$$

Таблица 2

Проверка выполнения критерия текучести

Номер (<i>i</i>)	Луч	Δ_i/Δ
1	110	0,96
2	210	0,96
3	310	0,97
4	410	0,96
5	610	0,98
6	710	0,98

и т.д.; Δ — величина, используемая в критерии Хилла (соответствует лучу 100), в то время как Δ_i соответствует лучу *i*. Как видно из таблицы, погрешность выполнения критерия Хилла для траекторий, лежащих в плоскости армирования (в плоскости $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}$ в пространстве деформаций), не превышает 5%.

Для лучей, идущих под большими углами к плоскости армирования, погрешность больше. С другой стороны, обобщенный критерий пластичности следующего вида дает хорошую точность как для лучей, лежащих в плоскости армирования, так и для выходящих из нее под малыми и большими углами:

$$A\sigma_{11}^2 + B\sigma_{22}^2 + C\sigma_{33}^2 + P\sigma_{11}\sigma_{22} + Q\sigma_{11}\sigma_{33} + T\sigma_{22}\sigma_{33} + M\sigma_{12}^2 + N\sigma_{13}^2 + L\sigma_{23}^2 = \Delta^2.$$

Учитывая симметрию структуры, имеем $A = B$, $Q = T$, $N = L$.

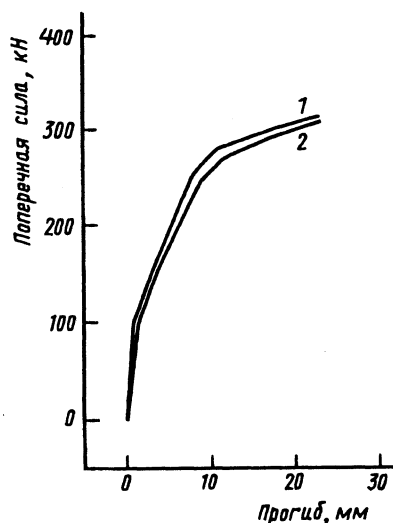


Рис. 3. Сравнение зависимости нагрузка ~ прогиб при статическом нагружении

В качестве примера применения пятислойной модели плиты была рассмотрена задача об изгибе, моделирующая эксперимент, описанный в [3]. Поперечная поверхностная нагрузка приложена сверху в центре плиты и равномерно распределена по кругу с радиусом $R = 215$ мм, снизу плита опирается на 4 симметричные опоры. Геометрические размеры плиты: квадратная пластина со стороной $L = 1200$ мм; толщина пластины равна $2a = 200$ мм, толщина слоя железобетона 10 мм, срединная плоскость слоя отстоит от срединной поверхности пластины на $b = 85$ мм. Расстояние между прутьями арматуры плиты равно 75 мм. Первый, третий и пятый слои модельной пятислойной плиты состоят из бетона; второй слой сверху — слой с эффективными свойствами на сжатие, четвертый — слой со свойствами на растяжение. Поскольку для путей деформирования, лежащих в плоскости армирования или под небольшими углами к ней, критерий Хилла хорошо описывает поверхность текучести, а возникающие при изгибе пути таковыми и являются, то для моделирования “мягкого удара” была использована теория анизотропной пластичности Хилла. Моделирование было проведено как для динамического нагружения, так и для статического.

Зависимость прогиба в центральной точке от величины приложенной поперечной силы для статического нагружения представлена

на рис. 3. Прогиб был вычислен в центре нижней поверхности пластины. График прогиб \sim нагрузка, взятый из статьи [3], представлен кривой 1, результаты наших вычислений — кривой 2. Можно видеть, что совпадение кривых достаточно хорошее. Поэтому можно сделать заключение, что модель пятислойной пластины, развитая в статье, может быть использована для моделирования изгиба железобетонных плит.

Авторы благодарны ИНТАС (проект № 961-2306) и РФФИ (проект № 02-01-00240) за материальную поддержку.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Brandes K. Blast-resistant structures // Proc. Intern. Workshop on Blast-Resistant Structures. Tsinghua Univ., Beijing, China, 1992.
2. Brandes K. Strain Rate Effects appearing in the Mechanical Behavior of Reinforced Concrete Structures under Impact Load // Mechanics of Inelastic Media and Structures / Ed. by O. Mahrenholtz, A. Sawczuk. Warszawa/Poznan, Poland, 1982.
3. Brandes K., Tsubota H., Mizuno J., Kusama K. Experimental studies on inelastic behavior of reinforced concrete panels under high-speed loading. Part 1: Effects of dynamic loading // Structures Under Shock and Impact V, 5th Int. Conf. SUSI 98. Thessaloniki, Greece, 1998.
4. Бахвалов Н.С., Эглит М.Э. Эффективные свойства композита, усиленного пластинами и ребрами // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1998. 38, № 5. 813–834.
5. Hill R. The Mathematical Theory of Plasticity. Oxford: Clarendon Press, 1950.
6. Победра Б.Е. Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ, 1984.

Поступила в редакцию
28.04.03.

УДК 521.12

О СУЩЕСТВОВАНИИ ЗОНЫ “НЕГРАВИТАЦИОННОГО” ДВИЖЕНИЯ СПУТНИКА НА МЕДЛЕННО ЭВОЛЮЦИОНИРУЮЩЕЙ ОРБИТЕ

О. А. Филиппова

В [1] получены и исследованы уравнения, описывающие эволюцию вектора L кинетического момента быстрого вращения динамически симметричного спутника на эволюционирующей вследствие сжатия планеты орбите. В [2] получены такие же уравнения для нерезонансных вращений спутника с трехосным центральным эллипсоидом инерции, в [3] доказана применимость этих уравнений и в резонансном случае. При некоторых условиях [1] эволюционные уравнения имеют решения, соответствующие движению конца вектора L по замкнутым траекториям в окрестности плоскости оскулирующей орбиты центра масс. Эта окрестность названа в [1] зоной “негравитационного” движения спутника, ее существование связано с эволюцией орбиты. В настоящей работе показано, что при замедлении эволюции орбиты эволюционные уравнения для вектора L изменяются, но зона “негравитационного” движения сохраняется.

В канонических переменных действие–угол (I, w) задачи Эйлера–Пуансо [4] эволюционные уравнения можно получить как результат последовательного применения соответствующих канонических преобразований [3] — усреднений по быстрым угловым переменным и по времени вдоль оскулирующего кеплеровского эллипса. Предположим, что центр масс спутника движется по траектории возмущенной сжатием планеты, параметры которой, — например элементы Кеплера, — суть условно-периодические функции времени. Такое движение можно представить как некоторое главное движение по эволюционирующему кеплеровскому эллипсу и условно-периодическое колебание около него. Траекторию главного движения будем называть средней орбитой, все параметры соответствующего оскулирующего эллипса ниже будут иметь индекс нуль. Все осредняющие преобразования оказываются выполнимыми и в случае, когда вращение спутника рассматривается относительно системы координат, которая связана с плоскостью оскулирующего эллипса и одна из осей которой перпендикулярна этой плоскости, а другая — направлена по линии узлов [5], однако в этом случае в гамильтониане появляются слагаемые, порожденные вращением системы координат. Упомянутые преобразования близки к тождественным. Если