Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

L. E. Evtushik, Reductive Cartan connections, and the generalized affine-normalized Norden structures,
Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., 1974, Number 5, 87–96

https://www.mathnet.ru/eng/ivm6583

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
https://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.14.86
January 17, 2026, 15:32:41

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
1974 МАТЕМАТИКА № 5 (144)

УДК 513.0

Л. Е. Евтушик

РЕДУКТИВНЫЕ СВЯЗНОСТИ КАРТАНА И ОБОБЩЕННЫЕ АФФИННО-НОРМАЛИЗОВАННЫЕ СТРУКТУРЫ НОРДЕНА

К семидесятилетию
Александра Петровича Нордена

Некоторые идеи продвижения метода нормализации А. П. Нордена в область геометрии расслоенных пространств высказывались еще в работе В. И. Ведерникова [3]. В настоящей работе на основе общего понятия редуктивных связностей Картана, близкого к понятиям, данным в [3], рассматриваются некоторые структуры высших порядков. В этих структурах заложено так много общих черт с конструкциями метода нормализации, что это дает право назвать их именем автора метода нормализации [1]. Эти структуры уже оказались полезными при изучении пространств Кавагути и их обобщений [5], [6], где они возникают в качестве инвариантных оснащений этих пространств, содержащих в себе нелинейные связности высших порядков. Здесь же мы представляем эти структуры как самостоятельный объект изучения.

1. Предположим, что структурная группа G главного расслоенного пространства $H(M, G)$ является замкнутой подгруппой группы Ли $\hat{G}$, причем

$$\dim M = \dim \hat{G}/G = \dim \hat{G} - \dim G. \tag{1}$$

Строится известным образом расширение $\hat{H}$ расслоения H

$$\hat{H}(M, \hat{G}) = H(M, G) \times \hat{G}/G, \tag{2}$$

где подразумевается факторизация по следующему действию группы G:

$$(\xi, \hat{g})\cdot g = (\xi\cdot g,\ g^{-1}, \hat{g}),\ \xi \in H,\ g \in G,\ \hat{g} \in \hat{G}.$$

Так как имеет место редукция $H(M, G) \subset \hat{H}(M, \hat{G})$, то факторизация этого вложения по действию группы G в данных расслоениях определяет сечение $f: M \to F(\hat{H}) = \hat{H}(M, \hat{G})/G$ в однородном расслоении $F(\hat{H})$, присоединенном к $\hat{H}$ с типовым слоем $F = \hat{G}/G$. Согласно предположению (1) имеем $\dim F = \dim M$, $\dim F(\hat{H}) = 2 \dim M$.

Рассмотрим некоторую связность γ в расслоении $\hat{H}$. В отношении связности γ к секущей $f(M) \subset F(\hat{H})$ могут быть два крайних случая:

А) Секущая $f(M)$ горизонтальна относительно γ, что означает, что горизонтальное распределение $h(\gamma)$ на $\hat{H}(M, \hat{G})$ вмещается

в $TH(M, G)$, а связность γ редуцируется к подрасслоению $H(M, G) \subset \hat{H}(M, \hat{G})$.

Б) Секущая $f(M)$ не имеет ни одного горизонтального направления относительно γ:

$$h_{f(z)} \cap T_{f(z)} f(M) = 0, \ z \in M, \tag{3}$$

или иначе

$$h_\xi \cap T_\xi H(M, G) = 0, \ \xi \in H(M, G),$$

что исключает редукцию γ к $H(M, G)$. В этом случае γ является связностью Картана в расслоении $\hat{H}(M, \hat{G})$. Благодаря соотношению размерностей (1) и условию (2) связность Картана порождает семейство изоморфизмов $\alpha_z : T_{f(z)} f(M) \to T_{f(z)} F_z$, где F_z — слой $F(\hat{H})$, т. е. определенное приклеивание секущей $f(M)$ к факторрасслоению $F(\hat{H}) = \hat{H}/G$.

Построим теперь соответствующий связностям Картана аппарат структурных уравнений. С этой целью выберем базис $E_{\alpha_{12}} = (E_{\alpha_1}, E_{\alpha_2})$ алгебры Ли $\hat{\boldsymbol{G}}$ группы $\hat{G}$ так, чтобы

$$E_{\alpha_2} \in \boldsymbol{G} = T_e G, \ \alpha_2, \ \beta_2 = 1, 2, \ldots, \dim G, \ \alpha_1, \ \beta_1 = \dim G + 1, \ldots, \dim \hat{G}. \tag{4}$$

Пусть e_{α_1}, e_{α_2} — соответствующий базис фундаментальных полей на $\hat{H}$. Дополним в каждой точке $\xi \in \hat{H}(M, \hat{G})$ векторы $\underset{\xi}{e}_{\alpha_1}$, $\underset{\xi}{e}_{\alpha_2}$ свободным, вообще говоря, горизонтальным репером $\underset{\xi}{\varepsilon}_{\alpha_1}$ до переменного базиса пространства $T_\xi \hat{H}(M, \hat{G})$. Заметим, что согласно (4) векторы $\underset{\xi}{\varepsilon}_{\alpha_1}$, $\underset{\xi}{e}_{\alpha_2}$ в точках $\xi \in H(M, G)$ составят базис $H(M, G) \subset \hat{H}(M, \hat{G})$. Пусть θ^{α_1}, $\hat{\omega}^{\alpha_1}$, $\hat{\omega}^{\alpha_2}$ — сопряженный ε_{α_1}, e_{α_1}, e_{α_2} и также переменный базис форм на $\hat{H}(M, \hat{G})$. Формы θ^{α_1}, $\hat{\omega}^{\alpha_1}$, $\hat{\omega}^{\alpha_2}$ являются глобально определенными точными формами на g-структуре, образованной переменным базисом ε_{α_1}, e_{α_1}, e_{α_2} над $\hat{H}(M, \hat{G})$. Однако формы $\hat{\omega}^{\alpha_1}$, $\hat{\omega}^{\alpha_2}$ являются точными формами и на $\hat{H}(M, \hat{G})$, а именно, формами связности γ, заменяющими одну форму связности $\hat{\omega} = \hat{\omega}^{\alpha_1} E_{\alpha_1} + \hat{\omega}^{\alpha_2} E_{\alpha_2}$ со значениями в алгебре Ли $\hat{\boldsymbol{G}}$.

В силу (4) формы связности $\hat{\omega}^{\alpha_1}$, $\hat{\omega}^{\alpha_2}$ подчиняются структурным уравнениям следующего специального вида:

$$d\hat{\omega}^{\alpha_1} = \hat{\omega}^{\beta_1} \wedge \left(\frac{1}{2} C^{\alpha_1}_{\beta_1\gamma_1} \hat{\omega}^{\gamma_1} + C^{\alpha_1}_{\beta_1\gamma_2} \hat{\omega}^{\gamma_2} \right) + \hat{\Omega}^{\alpha_1},$$

$$d\hat{\omega}^{\alpha_2} = \frac{1}{2} C^{\alpha_2}_{\beta_2\gamma_2} \hat{\omega}^{\beta_2} \wedge \hat{\omega}^{\gamma_2} + C^{\alpha_2}_{\beta_2\gamma_1} \hat{\omega}^{\beta_2} \wedge \hat{\omega}^{\gamma_1} + \frac{1}{2} C^{\alpha_2}_{\beta_1\gamma_1} \hat{\omega}^{\beta_1} \wedge \hat{\omega}^{\gamma_1} + \hat{\Omega}^{\alpha_2},$$

где $\hat{\Omega}^{\alpha_1}$, $\hat{\Omega}^{\alpha_2}$ — полубазовые формы кручения-кривизны связности Картана

$$\hat{\Omega}^{\alpha_1} = \hat{R}^{\alpha_1}_{\beta_1\gamma_1} \theta^{\beta_1} \wedge \theta^{\gamma_1}, \ \hat{\Omega}^{\alpha_2} = \hat{R}^{\alpha_2}_{\beta_1\gamma_1} \theta^{\beta_1} \wedge \theta^{\gamma_1}, \ d\theta^{\alpha_1} = \theta^{\beta_1} \wedge \theta^{\alpha_1}_{\beta_1}.$$

Заметим, что в силу канонических проекций $\hat{H} \to F(\hat{H}) \to M$ среди переменного базиса форм θ^{α_1}, $\hat{\omega}^{\alpha_1}$, $\hat{\omega}^{\alpha_2}$ на расслоении $\hat{H}$ его вполне интегрируемые подсистемы θ^{α_1}, $\hat{\omega}^{\alpha_1}$ и θ^{α_1} могут трактоваться как переменные базисы форм на $F(\hat{H})$ и M соответственно.

Введем ограничение $\omega^{\alpha_1} = \hat{\omega}^{\alpha_1}|_H$, $\omega^{\alpha_2} = \hat{\omega}^{\alpha_2}|_H$ форм связности Картана γ на подрасслоение $H \subset \hat{H}$ и назовем эти формы специализированными формами связности Картана γ. Поскольку ω^{α_1} можно трактовать и как $\hat{\omega}^{\alpha_1}|_{F(\hat{H})}$, то имеющая место на $H(M, G)$ линейная зависимость $\omega^{\alpha_1} = \Lambda^{\alpha_1}_{\beta_1}\theta^{\beta_1}$ описывает также и вложение секущей $(H(M, G)$ является полным прообразом секущей $f(M) \subset F(\hat{H})$ относительно отображения факторизации $\hat{H}(M, \hat{G}) \to F(\hat{H}) = \hat{H}/G)$. Очевидно, исходное требование (3) для связностей Картана равносильно условию $\det\|\Lambda^{\alpha_1}_{\beta_1}\| \neq 0$ и поэтому на $H(M, G)$ можно сделать замену форм θ^{α_1} на ω^{α_1}: $\theta^{\alpha_1} = \overset{*}{\Lambda}{}^{\alpha_1}_{\beta_1}\omega^{\beta_1}$. Так как количество специализированных форм связности ω^{α_1}, ω^{α_2} равно размерности группы $\hat{G}$, а значит, и размерности $H(M, G)$, то имеет место

Предложение 1. *Специализированные формы связности Картана γ на $\hat{H}(M, \hat{G})$ образуют глобально определенный базис форм подрасслоения $H(M, G) \subset \hat{H}(M, \hat{G})$ со структурными уравнениями*

$$d\omega^{\alpha_1} = \omega^{\beta_1} \wedge \left(\frac{1}{2} C^{\alpha_1}_{\beta_1\gamma_1}\omega^{\gamma_1} + C^{\alpha_1}_{\beta_1\gamma_2}\omega^{\gamma_2}\right) + \Omega^{\alpha_1}, \quad \Omega^{\alpha_1} = R^{\alpha_1}_{\beta_1\gamma_1}\omega^{\beta_1} \wedge \omega^{\gamma_1},$$

$$d\omega^{\alpha_2} = \frac{1}{2} C^{\alpha_2}_{\beta_2\gamma_2}\omega^{\beta_2} \wedge \omega^{\gamma_2} + C^{\alpha_2}_{\beta_2\gamma_1}\omega^{\beta_2} \wedge \omega^{\gamma_1} + \frac{1}{2} C^{\alpha_2}_{\beta_1\gamma_1}\omega^{\beta_1} \wedge \omega^{\gamma_1}, \quad \Omega^{\alpha_2} = R^{\alpha_2}_{\beta_1\gamma_1}\omega^{\beta_1} \wedge \omega^{\gamma_1}, \tag{5}$$

так что $H(M, G)$ обладает структурой вполне параллелизуемого многообразия. Если при этом

$$\Omega^{\alpha_1} \equiv 0, \quad \Omega^{\alpha_2} \equiv 0, \tag{6}$$

а расслоение $H(M, G)$ и группа $\hat{G}$ односвязны, то существует (с точностью до левых сдвигов на $\hat{G}$) изоморфизм $\varphi: H(M, G) \to \hat{G} = \hat{G}(\hat{G}/G, G)$ такой, что $\theta^{\alpha_{12}} \circ d\varphi = \omega^{\alpha_{12}}$, где $\theta^{\alpha_{12}} = (\theta^{\alpha_1}, \theta^{\alpha_2})$ — базис левоинвариантных форм на $\hat{G}$, сопряженный E_{α_1}, E_{α_2}.

Последнее утверждение вытекает из известной теоремы ([4], с. 239) и того факта, что структурные уравнения (5) при условии (6) отождествляются со структурными уравнениями инвариантных форм θ^{α_1}, θ^{α_2} группы $\hat{G}$.

Выделим теперь тот важный случай, когда $F = \hat{G}/G$ — редуктивное однородное пространство. Связность Картана в этом случае также назовем редуктивной. При выборе векторов E_{α_1} в инвариантном дополнении алгебры Ли группы G этот случай характеризуется тем, что в структурных уравнениях (5)

$$C^{\alpha_2}_{\beta_2\gamma_1} = 0. \tag{7}$$

Хотя, как мы знаем, связность Картана не приводима к $H(M, G)$, но из структурных уравнений видно, что в силу (7) формы ω^{α_2} являются формами связности на расслоении $H(M, G)$, если его структурная группа G связна. Итак, имеем

Предложение 2. *Редуктивная связность Картана в расслоении $\hat{H}(M, \hat{G}) \supset H(M, G)$ со специализированным базисом форм связности ω^{α_1}, ω^{α_2} $(C^{\alpha_2}_{\beta_2\gamma_1} = 0)$ индуцирует связность в подрасслоении $H(M, G)$ с формами связности ω^{α_2} и структурными уравнениями*

$$d\omega^{\alpha_2} = \frac{1}{2} C^{\alpha_2}_{\beta_2\gamma_2} \omega^{\beta_2} \wedge \omega^{\gamma_2} + \overline{\Omega}^{\alpha_2}, \quad \overline{\Omega}^{\alpha_2} = \left(R^{\alpha_2}_{\beta_1\gamma_1} + \frac{1}{2} C^{\alpha_2}_{\beta_1\gamma_1}\right) \omega^{\beta_1} \wedge \omega^{\gamma_1}.$$

Специальным для редуктивной связности является случай, когда группа $\hat{G}$ — полупрямое произведение группы G и некоторого нормального делителя $N \subset \hat{G}$. Этот случай характеризуется тем, что $C^{\alpha_2}_{\beta_2\gamma_1} = 0$, $C^{\alpha_2}_{\beta_1\gamma_1} = 0$ при $E_{\alpha_1} \in T_e N$.

Для дальнейшего важно установить, что структурные уравнения вида (5) в определенных условиях являются критерием того, что некоторый подчиненный им глобальный базис форм на $H(M, G)$ является системой специализированных форм подходящей связности Картана в объемлющем расслоении: $\hat{H}(M, \hat{G}) \supset H(M, G)$.

Предложение 3. *Если на подрасслоении $H(M, G) \subset \hat{H}(M, \hat{G})$, где $\hat{G}$ связна, а G замкнута в $\hat{G}$, определен глобальный базис форм ω^{α_1}, ω^{α_2}, удовлетворяющий структурным уравнениям (5) и такой, что в сопряженном базисе e_{α_1}, e_{α_2} векторные поля e_{α_2} составляют базис фундаментальных полей на $H(M, G)$, то в объемлющем расслоении $\hat{H}(M, \hat{G})$ существует единственная связность Картана, для которой формы ω^{α_1}, ω^{α_2} являются специализированными формами связности.*

Доказательство. Пусть $E_{\alpha_1}, E_{\alpha_2} \in \hat{\mathbf{G}}$ — базис алгебры Ли $\hat{\mathbf{G}}$ группы $\hat{\mathbf{G}}$, определяющий структурные константы в уравнениях (5). Тогда фундаментальные поля e_{α_2} на $H(M, G)$ порождены векторами $E_{\alpha_2} \in T_e G$. Составим на $H(M, G)$ форму $\omega = \omega^{\alpha_1} E_{\alpha_1} + \omega^{\alpha_2} E_{\alpha_2}$ со значениями в $\hat{\mathbf{G}}$. По условиям теоремы для любого фундаментального векторного поля A на $H(M, G)$ имеем $\omega^{\alpha_1}(A) = 0$, $\omega^{\alpha_2}(A) = A^{\alpha_2} = \text{const}$. Пусть векторное поле A порождено действием подгруппы $a(t) \subset G$ на $H(M, G): \tilde{\xi} = \xi \cdot a(t)$, $\xi \in H(M, G)$. Рассмотрим на $H(M, G)$ форму $\omega_t = \omega \circ dR_{a(t)} = \omega_t^{\alpha_1} E_{\alpha_1} + \omega_t^{\alpha_2} E_{\alpha_2}$, зависящую от параметра t. Если считать формулу $\tilde{\xi} = \xi \cdot a(t) = \varphi(\xi, t)$ определяющей отображение $\varphi: H(M, G) \times R_1 \to H(M, G)$, то определенная на $H(M, G) \times R_1$ форма $\omega = \omega \circ d\varphi$ также подчиняется структурным уравнениям (5). Расписав их для двух операторов частного дифференцирования $X = \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} d\xi^\alpha$,

$X_t = \frac{d}{dt}$ (ξ^α — локальные координаты $H(M, G)$) и учитывая, что $\bar{\omega}^{\alpha_1}_{\xi, t}(X_t) = 0$, $\bar{\omega}^{\alpha_2}_{\xi, t}(X_t) = \omega^{\alpha_2}_{\underset{\sim}{\xi}}(A_{\underset{\sim}{\xi}}) = A^{\alpha_2}$, $\bar{\omega}_{\xi, t}(X) = \omega_t$, получим

$$\frac{d\omega_t^{\alpha_{12}}}{dt} = C^{\alpha_{12}}_{\beta_{12}\gamma_{12}} A^{\beta_{12}} \omega_t^{\gamma_{12}}, \quad A^{\beta_1} = 0.$$

Однако этой же линейной системе дифференциальных уравнений удовлетворяют координаты вектора $ad(a^{-1}(t))\omega$. Но, т. к. $\omega_t|_{t=0} = ad(a^{-1}(t))\omega|_{t=0}$, то $\omega_t = \omega \circ dR_{a(t)} = ad(a^{-1}(t))\omega$. Итак,

$$\omega \circ dR_a = ad(a^{-1})\omega, \quad a \in G. \tag{8}$$

Построим теперь на $H(M, G) \times \hat{G}$ следующую форму:

$$\tilde{\omega} = ad(g^{-1})\omega(\xi, d\xi) + \theta(g, dg), \quad \xi \in H, \quad g \in \hat{G}, \tag{9}$$

где $\theta(g, dg) = g^{-1} \cdot dg$ — левоинвариантная форма на $\hat{G}$ со значениями в $\hat{\boldsymbol{G}}$. Эта форма инвариантна относительно следующего действия подгруппы G на $H(M, G) \times \hat{G}$:

$$\tilde{R}_a : (\xi, g) \to (\xi \cdot a, a^{-1}g). \tag{10}$$

Действительно, в силу (8)

$$\tilde{\omega} \circ d\tilde{R}_a = ad(a^{-1} \cdot g)^{-1} \cdot \omega \circ dR_a(\xi, d\xi) + \theta(a^{-1} \cdot g, d(a^{-1} \cdot g)) =$$
$$= adg^{-1} \cdot ada \cdot ada^{-1} \cdot \omega(\xi, d\xi) + \theta(g, dg) = \tilde{\omega}, \quad a = \text{const}.$$

Таким образом, форма $\tilde{\omega}$ на $H \times \hat{G}$ порождает форму $\hat{\omega}$ на

$$\hat{H}(M, \hat{G}) = H(M, G) \times \hat{G}/G$$

со значениями в $\hat{\boldsymbol{G}}$, такую, что $\hat{\omega} \circ d\Phi = \tilde{\omega}$, где $\Phi : H(M, G) \times \hat{G} \to \hat{H}(M, \hat{G})$ — отображение факторизации (2). На $H(M, G) \times \hat{G}$ определено также действие группы $\hat{G}$ $R_{\hat{a}} : (\xi, g) \to (\xi, g \cdot \hat{a})$ коммутирующее с действием (10) группы G: $\tilde{R}_a \cdot R_{\hat{a}} = R_{\hat{a}} \cdot \tilde{R}_a$, $a \in G$, $\hat{a} \in \hat{G}$ и, следовательно, индуцирующее действие группы $\hat{G}$ на объемлющем расслоении $\hat{H}(M, \hat{G})$: $\hat{\xi} \cdot \hat{a} = \Phi(\xi, g \cdot \hat{a})$, $\xi \in H$, $\hat{\xi} \in \hat{H}$, $\hat{a} \in \hat{G}$. Поэтому, т. к.

$$\tilde{\omega} \circ dR_{\hat{a}} = ad(g\hat{a})^{-1}\omega(\xi, d\xi) + \theta(g \cdot \hat{a}, d(g\hat{a})) =$$
$$= ad(\hat{a})^{-1} \cdot ad(g)^{-1} \cdot \omega(\xi, d\xi) + ad(\hat{a})^{-1}\theta(g, dg) = ad(\hat{a})^{-1}\tilde{\omega}, \quad \hat{a} = \text{const},$$

то и $\hat{\omega} \circ dR_{\hat{a}} = ad(\hat{a})^{-1}\hat{\omega}$, $\hat{a} \in \hat{G}$. Таким образом, форма $\hat{\omega}$ является формой типа ad.

Возьмем теперь произвольный элемент $A' \in \hat{\boldsymbol{G}}$ в качестве левоинвариантного поля на $\hat{G}$. Тогда на $H(M, G) \times \hat{G}$ определено векторное поле

$$\tilde{A} = (0, A'), \tag{11}$$

очевидно, инвариантное относительно действия (10) и проектирующееся при факторизации Φ в фундаментальное поле $\hat{A}$ на $\hat{H}(M, \hat{G})$. Но, т. к. $\tilde{\omega}(\tilde{A}) = A'$ в силу (9) и (11), то $\hat{\omega}(\hat{A}) = A'$. Итак, форма $\hat{\omega}$ является формой некоторой связности в расслоении $\hat{H}(M, \hat{G})$, причем в силу (9) имеем $\hat{\omega}|_H = \tilde{\omega}|_{g=e} = \omega$. Так как при этом ограничении все формы ω^{α_1}, ω^{α_2} остаются и на $H(M, G)$ линейно независимыми, то форма $\hat{\omega}$ определяет связность Картана. Она единственна, поскольку форма связности $\hat{\omega}$ по своему ограничению восстанавливается единственным способом. Предложение доказано.

Замечание. Если в условии предложения 3 отказаться от требования фундаментальности полей e_{α_2}, то формы ω^{α_1}, ω^{α_2} могут быть не самими формами связности, а их образом относительно некоторого диффеоморфизма (вообще говоря, локального) пространства $H(M, G)$. Именно это локальное утверждение применительно к связностям Картана содержится в теореме Г. Ф. Лаптева ([2], с. 315). Предложение 3, являясь глобальной формой теоремы Г. Ф. Лаптева о связностях Картана, послужит в следующем пункте обоснованию и интерпретации афинно-нормализованных структур высших порядков.

2. Рассмотрим последовательность главных расслоений $H^p(V_n)$ $(p = 1, 2, 3, \ldots)$ p-реперов и присоединенных к ним расслоений $S^p_m(V_n)$ m^p-элементов касания порядка p и размерности m над дифференцируемым n-многообразием V_n:

$$\begin{array}{ccccccccc} & H^1(V_n) & \leftarrow \ldots \leftarrow & H^p(V_n) & \leftarrow & H^{p+1}(V_n) & \leftarrow \ldots \\ V_n \leftarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ & S^1_m(V_n) & \leftarrow \ldots \leftarrow & S^p_m(V_n) & \leftarrow & S^{p+1}_m(V_n) & \leftarrow \ldots \end{array}$$

Если расслоение $H^p(V_n)$ обслуживает система канонических дифференциальных форм ω^i, ω^i_k, ω^i_{kl}, ..., $\omega^i_{k_1 \ldots k_p}$, симметричных по нижним индексам и удовлетворяющих хорошо известным структурным уравнениям, то расслоению $S^p_m(V_n)$ соответствует ее вполне интегрируемая подсистема

$$\omega^u = (\omega^i(\omega^a, \omega^\alpha), \omega^\alpha_a, \omega^\alpha_{ab}, \ldots, \omega^\alpha_{a_1 \ldots a_p}), \tag{12}$$

где $a, b, c = \overline{1, m}$, $\alpha, \beta, \gamma = \overline{m+1, n}$, $i, k, l = \overline{1, n}$, а u, v — совокупный индекс всей системы (12), удовлетворяющая уравнениям

$$\begin{gathered} d\omega^a = \omega^b \wedge \omega^a_b + \omega^\alpha \wedge \omega^a_\alpha, \quad d\omega^\alpha = \omega^\beta \wedge \omega^\alpha_\beta + \omega^a \wedge \omega^\alpha_a, \\ d\omega^\alpha_a = \omega^\beta_b \wedge (\delta^b_a \omega^\alpha_\beta - \delta^\alpha_\beta \omega^b_a) + \omega^b \wedge \omega^\alpha_{ab} + \omega^\beta \wedge \omega^\alpha_{a\beta}, \end{gathered} \tag{13}$$

$$d\omega^\alpha_{a_1 \ldots a_s} = \sum_{r=1}^{s} \omega^\beta_{b_1 \ldots b_r} \wedge \omega_\beta^{b_1 \ldots b_r}|^\alpha_{a_1 \ldots a_s} + \omega^a \wedge \omega^\alpha_{a_1 \ldots a_s a} + \omega^\beta \wedge \omega^\alpha_{a_1 \ldots a_s \beta},$$

$$\omega_\beta^{b_1 \ldots b_r}|^\alpha_{a_1 \ldots a_s} = \frac{s!}{r!(s-r)!} \delta^{b_1}_{(a_1} \ldots \delta^{b_r}_{a_r} \omega^\alpha_{a_{r+1} \ldots a_s)\beta} -$$

$$- \frac{s!}{(r-1)!(s-r+1)!} \delta^\alpha_\beta \delta^{b_1}_{(a_1} \ldots \delta^{b_{r-1}}_{a_{r-1}} \omega^{b_r}_{a_r \ldots a_s)}, \quad s = \overline{2, p},$$

причем уравнения $\omega^u = 0$ являются условием фиксации элемента $\sigma_m^p \in S_m^p(V_n)$. В частности, расслоению $H^1(V_n)$ линейных реперов $\underset{x}{e_k} \in T_x(V_n)$, $x \in V_n$, соответствует система форм

$$(\omega^i,\ \omega_k^i) = (\omega^a,\ \omega^\alpha,\ \omega_a^\alpha,\ \omega_\beta^\alpha,\ \omega_\beta^a,\ \omega_b^a) \tag{14}$$

и их структурных уравнений

$$\begin{gathered} d\omega^a = \omega^b \wedge \omega_b^a + \omega^\alpha \wedge \omega_\alpha^a, \quad d\omega_b^a = \omega_b^c \wedge \omega_c^a + \omega_b^\alpha \wedge \omega_\alpha^a + \omega^c \wedge \omega_{bc}^a + \omega^\alpha \wedge \omega_{b\alpha}^a, \\ d\omega^\alpha = \omega^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha + \omega^a \wedge \omega_a^\alpha, \quad d\omega_\beta^\alpha = \omega_\beta^\gamma \wedge \omega_\gamma^\alpha + \omega_\beta^a \wedge \omega_a^\alpha + \omega^a \wedge \omega_{\beta a}^\alpha + \omega^\gamma \wedge \omega_{\beta\gamma}^\alpha, \\ d\omega_a^\alpha = \omega_b^\beta \wedge (\delta_a^b \omega_\beta^\alpha - \delta_\beta^\alpha \omega_a^\beta) + \omega^b \wedge \omega_{ab}^\alpha + \omega^\beta \wedge \omega_{a\beta}^\alpha, \\ d\omega_\alpha^a = \omega_\beta^b \wedge (\delta_\alpha^\beta \omega_b^a - \delta_b^a \omega_\alpha^\beta) + \omega^b \wedge \omega_{b\alpha}^a + \omega^\beta \wedge \omega_{\alpha\beta}^a; \end{gathered} \tag{15}$$

расслоению же $S_m^1(V_n)$ m-мерных плоскостей σ_m^1 соответствует подсистема ω^a, ω^α, ω_a^α системы (14). Поскольку при фиксации точки $x_0 \in V_n$ имеем $\omega^i = 0$, $d\underset{x_0}{e_k} = \omega_k^l \underset{x_0}{e_l}$, то уравнения $\omega^i = 0$, $\omega_a^\alpha = 0$ являются условиями фиксации элемента $\sigma_m^1 \in S_m^1(V_n)$, натянутого на векторы $\underset{x_0}{e_a} = (\underset{x_0}{e_1}, \dots, \underset{x_0}{e_m})$ полностью свободного репера $\underset{x_0}{e_k}$.

Наряду с $S_m^1(V_n)$ рассмотрим расслоение $S_{n-m}^1(V_n)$ $(n-m)$-плоскостей, натянутых на векторы $\underset{x_0}{e_\alpha} = (\underset{x_0}{e_{m+1}}, \dots, \underset{x_0}{e_n})$. Фиксация элемента $\nu_{x_0} \in S_{n-m}^1(V_n)$ определяется вполне интегрируемой системой уравнений $\omega^i = 0$, $\omega_\alpha^a = 0$. Таким образом, расслоения $S_m^1(V_n)$ и $S_{n-m}^1(V_n)$ согласованы так, что их элементы никогда не пересекаются.

Определение 1. Нормализацией ν_m^p многообразия V_n порядка p и размерности m называется дифференцируемое, тождественное по базе V_n отображение $\nu_m^p : S_m^p(V_n) \to S_{n-m}^1(V_n)$, при котором элемент $\nu_m^p(\sigma_m^p)$, $\sigma_m^p \in S_m^p(V_n)$ никогда не пересекается с образом $\sigma_m^1 = \tau(\sigma_m^p)$ элемента σ_m^p при каноническом проектировании $\tau : S_m^p(V_n) \to S_m^1(V_n)$.

Из наличия нормализации ν_m^p вытекает система ее основных уравнений

$$\omega_\alpha^a = h_{\alpha u}^a \omega^u = h_{\alpha k}^a \omega^k + h_{\alpha\beta}^{ab} \omega_b^\beta + \dots + h_{\alpha\beta}^{ab_1 \dots b_p} \omega_{b_1 \dots b_p}^\beta. \tag{16}$$

Кроме того, нормализация ν_m^p эквивалентна редукции $H_\nu(S_m^p(V_n), L_n^m) \subset \subset H^1(V_n^m) \oplus S_m^p(V_n)$ ($\oplus$ — сумма Уитни), образованной парами $(\underset{x_0}{e_k}, \underset{x_0}{\sigma_m^p})$, $x_0 \in V_n$ вида $\underset{x_0}{e_a} \in \underset{x_0}{\sigma_m^1} = \tau(\underset{x_0}{\sigma_m^p})$, $\underset{x_0}{e_\alpha} \in \nu_m^p(\underset{x_0}{\sigma_m^p})$ и представляющей главное расслоение с базой $S_m^p(V_n)$, структурной группой $L_n^m = GL(m, R) \times GL(n-m, R)$ и вполне интегрируемой системой канонических форм

$$\omega_b^a,\ \omega_\beta^\alpha,\ \omega^i,\ \omega_a^\alpha,\ \omega_{ab}^\alpha, \dots,\ \omega_{a_1 \dots a_p}^\alpha. \tag{17}$$

Из структурных уравнений (13), (15) видно, что в силу (16) система форм (17) определяет вполне интегрируемую характеристическую

систему

$$\omega^i,\ \omega^a_b,\ \omega^\alpha_\beta,\ \omega^\alpha_a,\ \omega^\alpha_{ab},\ \dots,\ \omega^\alpha_{a_1\dots a_p},\ \omega^\alpha_{a_1\dots a_p b},$$

$$\omega^a_{b\alpha},\ \omega^c_{ab},\ \dots,\ \omega^c_{a_1\dots a_p},\ \omega^\alpha_{\beta a},\ \omega^\alpha_{\beta ab},\ \dots,\ \omega^\alpha_{\beta a_1\dots a_p}, \tag{18}$$

представляющую собой подсистему канонических форм расслоения $H^{p+1}(V_n)$.

Определение 2. Аффинно-нормализованной структурой N^p_m на многообразии V_n, подчиненной нормализации ν^p_m, называется минимальная редукция расслоения $H^{p+1}(V_n)$, на которой характеристическая система (18) форм расслоения $H_\nu(S^p_m(V_n), L^m_n)$ связана линейными соотношениями

$$\omega^k_{la} = \Gamma^k_{lau}\,\omega^u,\quad \omega^b_{a_1\dots a_s} = \Gamma^b_{a_1\dots a_s u}\,\omega^u,\quad s=\overline{3,\ p}; \tag{19}$$

$$\omega^\alpha_{\beta a_1\dots a_r} = \Gamma^\alpha_{\beta a_1\dots a_r u}\,\omega^u,\ r=\overline{2,\ p};\quad \omega^\alpha_{a_1\dots a_p b} = \Gamma^\alpha_{a_1\dots a_p bn}\,\omega^u,$$

где ω^u обозначает всю систему канонических форм (12) на $S^p_m(V_n)$.

Выясним геометрический характер структуры N^p_m. С этой целью рассмотрим следующую группу Ли S_{mp} преобразований R_n:

$$\tilde{x}^a = C^a_b x^b + C^a,$$

$$\tilde{x}^\alpha = C^\alpha_\beta x^\beta + C^\alpha + C^\alpha_a x^a + \frac{1}{2} C^\alpha_{ab} x^a\ x^b + \dots + \frac{1}{p!} C^\alpha_{a_1\dots a_p} x^{a_1}\ \dots\ x^{a_p}.$$

Очевидно, S_{mp} содержит две подгруппы дополнительных размерностей: $L^m_n \subset S_{mp}$ $(C^a = C^\alpha = C^\alpha_a = \dots = C^\alpha_{a_1\dots a_p} = 0)$, $N \subset S_{mp}$ $(C^a_b = \delta^a_b,\ C^\alpha_\beta = \delta^\alpha_\beta)$, являясь их полупрямым произведением (N — нормальный делитель в S_{mp}). По образцу работы [6] можно определить инвариантные формы $\theta^a,\ \theta^\alpha,\ \theta^a_b,\ \theta^\alpha_\beta,\ \theta^\alpha_a,\ \theta^\alpha_{ab},\ \dots,\ \theta^\alpha_{a_1\dots a_p}$ группы S_{mp} и их структурные уравнения

$$d\theta^a = \theta^b \wedge \theta^a_b,\ d\theta^\alpha = \theta^\beta \wedge \theta^\alpha_\beta + \theta^a \wedge \theta^\alpha_a,\ d\theta^a_b = \theta^c_b \wedge \theta^a_c,\ d\theta^\alpha_\beta = \theta^\gamma_\beta \wedge \theta^\alpha_\gamma,$$

$$d\theta^\alpha_a = \theta^\beta_b \wedge (\delta^a_b \omega^\alpha_\beta - \delta^\alpha_\beta \omega^a_b) + \theta^b \wedge \theta^\alpha_{ab},$$

$$d\theta^\alpha_{a_1\dots a_s} = \theta^\beta_{b_1\dots b_s} \wedge (\delta^{b_1}_{a_1} \dots \overset{b}{\delta}_{a_s} \theta^\alpha_\beta - \delta^\alpha_\beta \delta^{b_1}_{(a_1} \dots \overset{b}{\delta}_{a_{s-1}} \theta^{\overset{b}{s}}_{a_s)}) + \theta^b \wedge \theta^\alpha_{a_1\dots a_s b}, \tag{20}$$

$$d\theta^\alpha_{a_1\dots a_p} = \theta^\beta_{b_1\dots b_p} \wedge (\delta^{b_1}_{a_1} \dots \overset{b}{\delta}_{a_p} \theta^\alpha_\beta - \delta^\alpha_\beta \delta^{b_1}_{(a_1} \dots \overset{b}{\delta}_{a_{p-1}} \theta^{\overset{b}{p}}_{a_p)}),\ s=\overline{2,\ p-1}.$$

Так как имеет место вложение $L^m_n \subset S_{mp}$, то по схеме первого пункта статьи определяем расширение

$$\hat{H}_\nu(S^p_m(V_n),\ S_{mp}) \supset H_\nu(S^p_m(V_n),\ L^m_n)$$

расслоения H_ν со структурной группой L^m_n до расслоения $\hat{H}_\nu$ со структурной группой S_{mp}. В связи с этим главную характеристику аффинно-нормализованной структуры N^p_m дает

Предложение 4. *Задание структуры N^p_m эквивалентно заданию на расслоении $\hat{H}_\nu(S^p_m(V_n),\ S_{mp})$, индуцированном нормализацией ν^p_m, точного базиса форм* $\omega^a,\ \omega^\alpha,\ \omega^\alpha_\beta,\ \omega^a_b,\ \omega^\alpha_a,\ \omega^\alpha_{ab},\ \dots,\ \omega^\alpha_{a_1\dots a_p}$,

удовлетворяющих структурным уравнениям

$$d\omega^a = \omega^b \wedge \omega^a_b + \Omega^a, \quad d\omega^a_b = \omega^c_b \wedge \omega^a_c + \Omega^a_b,$$
$$d\omega^\alpha = \omega^\beta \wedge \omega^\alpha_\beta + \Omega^\alpha, \quad d\omega^\alpha_\beta = \omega^\gamma_\beta \wedge \omega^\alpha_\gamma + \Omega^\alpha_\beta,$$
$$d\omega^\alpha_a = \omega^\beta_b \wedge (\delta^b_a \omega^\alpha_\beta - \delta^\alpha_\beta \omega^b_a) + \omega^b \wedge \omega^\alpha_{ab} + \Omega^\alpha_a, \tag{21}$$
$$d\omega^\alpha_{a_1 \dots a_s} = \omega^\beta_{b_1 \dots b_s} \wedge (\delta^{b_1}_{a_1} \dots \delta^{b_s}_{a_s} \omega^\alpha_\beta - \delta^\alpha_\beta \delta^{b_1}_{(a_1} \dots \delta^{b_{s-1}}_{a_{s-1}} \omega^{b_s}_{a_s)}) + \omega^b \wedge \omega^\alpha_{a_1 \dots a_s b} + \Omega^\alpha_{a_1 \dots a_s},$$
$$d\omega^\alpha_{a_1 \dots a_p} = \omega^\beta_{b_1 \dots b_p} \wedge (\delta^{b_1}_{a_1} \dots \delta^{b_p}_{a_p} \omega^\alpha_\beta - \delta^\alpha_\beta \delta^{b_1}_{(a_1} \dots \delta^{b_{p-1}}_{a_{p-1}} \omega^{b_p}_{a_p)}) + \Omega^\alpha_{a_1 \dots a_p} \; (s = \overline{2, p-1})$$

и представляющих собой систему специализированных форм редуктиеной связности Картана $\hat{\gamma}$ *в расслоении* $\hat{H}_\nu(S^p_m(V_n), S_{mp}) \supset \supset H_\nu(S^p_m(V_n), L^m_n)$.

Действительно, структурные уравнения (21) имеют место в силу определяющих N^p_m уравнений (19) и, как видим, отождествляются со структурными уравнениями (20) группы S_{mp} при $\Omega \equiv 0$. Таким образом, система форм $\omega^a, \omega^\alpha, \omega^\alpha_\beta, \omega^a_b, \omega^\alpha_a, \omega^\alpha_{ab}, \dots, \omega^\alpha_{a_1 \dots a_p}$ находится в условиях предложения 3 (условие фундаментальности части сопряженного базиса также выполнено) и, следовательно, определяет на $\hat{H}_\nu$ редуктивную связность Картана ($\dim S_{mp}/L^m_n = \dim S^p_m(V_n)$).

Благодаря редуктивности $\hat{\gamma}$ формы $\omega^a_b, \omega^\alpha_\beta$ являются формами индуцированной связности γ в $H_\nu(S^p_m(V_n), L^m_n)$. Эта связность определяет перенесение „реперов" $(\underset{x}{e_a}, \underset{x}{e_\alpha}, \underset{x}{\sigma^p_m})$ „вдоль" $S^p_m(V_n)$, причем это перенесение сводится к самостоятельному перенесению m-реперов $(\underset{x}{e_a}, \underset{x}{\sigma^p_m})$ и нормальных $(n-m)$-реперов $(\underset{x}{e_\alpha}, \underset{x}{\sigma^p_m})$.

Помимо связностей $\hat{\gamma}$ и γ определена также нелинейная m^p-связность в расслоении $H^1(V_n)$, задаваемая (см. [7]) первыми уравнениями (19) и также определяющая с учетом нормализации ν^p_m связность γ. Именно наличие нормализации ν^p_m и связности γ обуславливает ситуацию, аналогичную той, которая присуща методу нормализации.

Предложение 5. *С каждым m-мерным подмногообразием $V_m \subset V_n$ аффинно-нормализованная структура N^p_m ассоциирует: 1. аффинную (с кручением) связность на V_m; 2. нормальное оснащение на V_m ($\nu_m : V_m \to S^1_{n-m}(V_n)$); 3. линейную связность в нормальном оснащении.*

В самом деле, нормальное оснащение возникает как композиция отображений $f_p : V_m \to S^p_m(V_n)$, $\nu^p_m : S^p_m(V_n) \to S^1_{n-m}(V_n)$, $\nu_m = \nu^p_m \circ f_p$, где f_p — голономное продолжение вложения $f : V_m \to V_n$. Не выходя за пределы реперов из $H^{p+1}(V_n)$, определяемых структурой N^p_m, отображение f_p можно охарактеризовать уравнениями $\omega^\alpha = 0$, $\omega^\alpha_a = 0$, ..., $\omega^\alpha_{a_1 \dots a_{p-1}} = 0$, $\omega^\alpha_{a_1 \dots a_p} = \Lambda^\alpha_{a_1 \dots a_p b} \omega^b$, в силу которых структурные уравнения (21) сводятся к следующим:

$$d\omega^a = \omega^b \wedge \omega^a_b + R^a_{bc} \omega^b \wedge \omega^c, \quad d\omega^a_b = \omega^c_b \wedge \omega^a_c + R^a_{bcd} \omega^c \wedge \omega^d; \tag{22}$$
$$d\omega^\alpha_\beta = \omega^\gamma_\beta \wedge \omega^\alpha_\gamma + R^\alpha_{\beta bc} \omega^b \wedge \omega^c, \tag{23}$$

где (22) представляют собой структурные уравнения аффинной связности на V_m, а (23) — структурные уравнения линейной связности в нормальном оснащении $\nu_m(V_m)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Норден А. П. Пространства аффинной связности. М. — Л., ГИТТЛ, 1950.
2. Лаптев Г. Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Тр. Моск. матем. о-ва, т. 2, 1953, с. 275—382.
3. Ведерников В. И. Обобщение метода нормализации А. П. Нордена на случай расслоенного пространства. Учен. зап. Казанск. ун-та, т. 123, кн. 1, 1963, с. 3—23.
4. Стернберг С. Лекции по дифференциальной геометрии. М., „Мир", 1970.
5. Евтушик Л. Е. Нелинейные связности в метрических пространствах высших порядков. Изв. вузов, Матем., 1970, № 1, с. 48—60.
6. Евтушик Л. Е. Нелинейные $(n-1)^p$-связности в метрических пространствах Картана высших порядков. Матем. заметки, т. 11, № 4, 1972, с. 447—458.
7. Евтушик Л. Е. Нелинейные m^p-связности в главных расслоениях. Матем. заметки, т. 11, № 3, 1972, с. 341—351.

г. Москва

Поступила
24 I 1974