



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. О. Смирнов, Г. М. Головачёв, Трёхфазные решения нелинейного уравнения Шрёдингера в эллиптических функциях,  
*Нелинейная динам.*, 2013, том 9, номер 3, 389–407

<https://www.mathnet.ru/nd396>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.91

18 мая 2025 г., 01:08:12





УДК: 517.957  
MSC 2010: 35Q53

## Трехфазные решения нелинейного уравнения Шрёдингера в эллиптических функциях

А. О. Смирнов, Г. М. Головачёв

Построены трехфазные конечнозонные решения фокусирующего нелинейного уравнения Шрёдингера и уравнения Кадомцева–Петвиашвили-I с поведением почти-периодических «странных волн». Изучена зависимость параметров решения от параметров спектральной кривой.

Ключевые слова: волны-убийцы, странные волны, нелинейное уравнение Шрёдингера, уравнение КП, уравнение Хироты, тэта-функция, редукция, накрытие

### Введение

В настоящее время одной из актуальных задач нелинейной физики является исследование проблемы возникновения «волн-убийц» (rogue waves) или «странных волн» (freak waves). В отличие от солитонов, являющихся распространяющимися с постоянной скоростью незатухающими уединенными волнами, «странные волны» представляют собой локальный кратковременный рост амплитуды или «волны, появляющиеся ниоткуда и исчезающие без следа» [1]. Хотя «волны-убийцы» обнаружены в моделях, относящихся к различным областям физики (см., например, [2]), основные области их появления — это гидродинамика [3–7] и нелинейная оптика [8, 9]. Обычно при изучении «странных волн» в главном приближении рассматривают фокусирующее нелинейное уравнение Шрёдингера (НУШ)

$$i\psi_z + \psi_{xx} + 2|\psi|^2\psi = 0, \quad (1)$$

а при выборе точных решений обращаются к рациональным решениям, получающимся в результате преобразования Дарбу и его обобщений [10–16]. Точные решения, отличающиеся от рациональных, упоминаются довольно редко [8, 17–19]. При учете более тонких эффектов

---

Получено 3 марта 2013 года  
После доработки 31 мая 2013 года

---

Смирнов Александр Олегович  
[alsmir@guap.ru](mailto:alsmir@guap.ru)  
Головачёв Григорий Михайлович  
[ggolovachev@yandex.ru](mailto:ggolovachev@yandex.ru)

Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения (ГУАП)  
190000, Россия, г. Санкт-Петербург, Большая Морская ул., д. 67



[4, 5, 8, 19–24] уравнения отличаются от НУШ дополнительными слагаемыми, приводящими к неинтегрируемости уравнения и, соответственно, к невозможности построения некоторых классов решений.

Вместе с тем, существуют ситуации, когда этими дополнительными слагаемыми можно пренебречь [8, 19, 24], ограничить свое рассмотрение уравнением (1), которое является интегрируемым, и рассмотреть присущие интегрируемым уравнениям классы решений, такие как многофазные периодические решения. С одной стороны, в натурных экспериментах ряда авторов [6, 7, 9] наблюдались волны, по своим характеристикам близкие к рациональным решениям. С другой стороны, в работах [19, 24] показано, что начальные данные, полученные в рамках проекта JONSWAP (Joint Nord Sea Wave Project), могут быть использованы для построения 6-фазного решения НУШ. Вполне возможно, что если бы авторы работ [6, 7, 9] могли сравнить экспериментальные данные с характеристиками многофазных решений, они также получили бы относительно хорошее совпадение, особенно в тех случаях, когда периоды решетки значительно превосходят размеры бассейна.

Естественно, если рассматривать волны на поверхности воды, то вряд ли стоит ожидать возникновения периодических «волн-убийц». Однако в нелинейной оптике вполне возможно создание ситуаций, приводящих к возникновению «странных волн», образующих решетку «световых точек» в планарном волноводе. В связи с этим обратим внимание на работы [12–15], в которых у рациональных решений НУШ параметры выбраны таким образом, что «странные волны» образуют симметричные конфигурации на плоскости  $XOZ$ . Кроме того, единичные «волны-убийцы» могут быть получены в результате синхронизации фаз многофазного решения с большим числом несоизмеримых фаз.

Многофазные конечнозонные решения строятся с помощью метода «конечнозонного (алгебро-геометрического) интегрирования» [25–27], связанного, прежде всего, с именами Дубровина, Новикова, Лакса, Матвеева, Итса, Кричевера (см., например, [28–34]) и их учеников. Интересующихся подробностями возникновения метода отошлем к обзору [35]. Отметим, что рациональные [10–14, 16] и периодические по  $x$  гомоклинические решения [18, 19, 24, 36–38], которые обычно получают с помощью многократных преобразований Дарбу или Бэклунда, могут быть получены также и полным или частичным вырождением многофазных решений [25]. Например, как показано в [39], хорошо известные солитон Перегрин и бризеры Ахмедиева и Ма [3, 8, 40] могут быть получены вырождением двухзонного двоякопериодического решения. Нетрудно понять, что в результате вырождений конечнозонных решений с большим числом фаз можно получать и более сложные рациональные и квазирациональные решения (в частности, те, которые приведены в работах [7, 10–15]).

В настоящей работе строятся и исследуются имеющие поведение «странных волн» трехзонные (трехфазные) решения уравнения (1) и других, связанных с ним, интегрируемых нелинейных уравнений.

## 1. Конечнозонные многофазные решения нелинейного уравнения Шрёдингера

Нелинейные дифференциальные уравнения, интегрируемые методами алгебраической геометрии, могут быть получены как условие совместности системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений со спектральным параметром [25–27]. В частности, рассмотрим уравнения [26, 41, 42]

$$Y_x = \mathcal{U}Y, \quad (1.1a)$$



$$Y_z = \mathfrak{Y}Y, \quad (1.1b)$$

$$Y_t = \mathfrak{W}Y, \quad (1.1c)$$

где

$$\mathfrak{U} = -\lambda \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & i\psi \\ -i\phi & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{V} = 2\lambda\mathfrak{U} + \mathfrak{V}_0, \quad \mathfrak{W} = 4\lambda^2\mathfrak{U} + 2\lambda\mathfrak{W}_0 + \mathfrak{W}_1,$$

из соотношений  $(Y_x)_z = (Y_z)_x$  и  $(Y_x)_t = (Y_t)_x$  получаем так называемые «уравнения нулевой кривизны»

$$\mathfrak{U}_z - \mathfrak{V}_x + \mathfrak{U}\mathfrak{W} - \mathfrak{V}\mathfrak{U} = 0 \quad \text{и} \quad \mathfrak{U}_t - \mathfrak{W}_x + \mathfrak{U}\mathfrak{W} - \mathfrak{W}\mathfrak{U} = 0, \quad (1.2)$$

которые должны выполняться при всех значениях спектрального параметра  $\lambda$ . Из равенств (1.2) следует, что матрицы  $\mathfrak{V}_0, \mathfrak{W}_0, \mathfrak{W}_1$  имеют вид

$$\mathfrak{W}_0 = \mathfrak{V}_0 = \begin{pmatrix} -i\psi\phi & -\psi_x \\ -\phi_x & i\psi\phi \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{W}_1 = \begin{pmatrix} \psi_x\phi - \psi\phi_x & 2i\psi^2\phi - i\psi_{xx} \\ -2i\psi\phi^2 + i\phi_{xx} & \psi\phi_x - \psi_x\phi \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

и что, соответственно,  $\mathfrak{W} = 2\lambda\mathfrak{V} + \mathfrak{W}_1$ . Кроме специального вида матриц (1.3) условия (1.2) приводят к дополнительным соотношениям, которыми являются расщепленное нелинейное уравнение Шрёдингера

$$\begin{cases} i\psi_z + \psi_{xx} - 2\psi^2\phi = 0, \\ i\phi_z - \phi_{xx} + 2\psi\phi^2 = 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

и расщепленное модифицированное уравнение Кортевега де Фриза

$$\begin{cases} \psi_t + \psi_{xxx} - 6\psi\phi\psi_x = 0, \\ \phi_t + \phi_{xxx} - 6\psi\phi\phi_x = 0. \end{cases} \quad (1.5)$$

С этими двумя системами нелинейных дифференциальных уравнений непосредственно связаны еще две. Дифференцируя равенства (1.4) по  $x$  и подставляя их в (1.5), получаем расщепленное модифицированное двумерное нелинейное уравнение Шрёдингера в конусных координатах [43]

$$\begin{cases} i\psi_t + \psi_{xz} + 2i(\psi\phi_x - \phi\psi_x)\psi = 0, \\ i\phi_t - \phi_{xz} + 2i(\phi\psi_x - \psi\phi_x)\phi = 0, \end{cases} \quad (1.6)$$

а решениями расщепленного интегрируемого уравнения Хироты ( $\alpha \in \mathbb{R}$ )

$$\begin{cases} i\psi_t + \psi_{xx} - 2\psi^2\phi - i\alpha(\psi_{xxx} - 6\psi\phi\psi_x) = 0, \\ i\phi_t - \phi_{xx} + 2\psi\phi^2 - i\alpha(\phi_{xxx} - 6\psi\phi\phi_x) = 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

являются функции  $\psi(x, t, -\alpha t)$  и  $\phi(x, t, -\alpha t)$ , где  $\psi(x, z, t)$  и  $\phi(x, z, t)$  суть решения систем (1.4) и (1.5).

Системы нелинейных дифференциальных уравнений (1.4), (1.5) являются первыми двумя интегрируемыми системами из бесконечной иерархии таких систем, называемой АКНС-иерархией [26]. Одной из особенностей конечнозонных многофазных решений интегрируемых нелинейных уравнений является тот факт, что в некотором смысле они являются решением всей иерархии. Из уравнений (1.4) редукциями  $\phi = \pm \bar{\psi}$  получают стандартные формы нелинейного уравнения Шрёдингера, одной из которых (при  $\phi = -\bar{\psi}$ ) является уравнение (1) [34, 41, 44]. Также при  $\phi = -\bar{\psi}$  из системы (1.7) получается интегрируемое уравнение Хироты [16, 45–47]

$$i\psi_t + \psi_{xx} + 2|\psi|^2\psi - i\alpha(\psi_{xxx} + 6|\psi|^2\psi_x) = 0. \quad (1.8)$$

Конечнозонные (алгебро-геометрические) решения систем (1.4), (1.5) строятся по гиперэллиптической кривой  $\Gamma = \{(\chi, \lambda)\}$  рода  $g$  [26, 42]:

$$\Gamma: \chi^2 = \prod_{j=1}^{2g+2} (\lambda - \lambda_j),$$

точки ветвления которой ( $\lambda = \lambda_j$ ,  $j = 1, \dots, 2g + 2$ ) являются краями зон спектра оператора Дирака (1.1a). Бесконечно удаленной точке спектра соответствуют две различные точки  $\mathcal{P}_\infty^\pm$  кривой  $\Gamma$ . В случае  $\phi = -\bar{\psi}$  кривая  $\Gamma$  должна быть инвариантна относительно антиголоморфной инволюции  $\tau_1: (\chi, \lambda) \rightarrow (\bar{\chi}, \bar{\lambda})$ , причем  $\text{Im}(\lambda_j) \neq 0$ :

$$\Gamma: \chi^2 = \prod_{j=1}^{g+1} (\lambda - \lambda_j)(\lambda - \bar{\lambda}_j) = \lambda^{2g+2} + \sum_{j=1}^{2g+2} \chi_j \lambda^{2g+2-j}, \quad \text{Im} \chi_j = 0. \quad (1.9)$$

Следуя стандартной процедуре построения конечнозонных решений [25, 34, 42], выберем на  $\Gamma$  канонический базис циклов  $\gamma^t = (a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g)$  с матрицей индексов пересечения

$$C_0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}.$$

Для выполнения условия  $\phi = -\bar{\psi}$  необходимо [25, 34], чтобы при антиголоморфной инволюции  $\tau_1$  этот базис циклов преобразовывался по правилу

$$\hat{\tau}_1 \mathbf{a} = -\mathbf{a}, \quad \hat{\tau}_1 \mathbf{b} = \mathbf{b} + K\mathbf{a}. \quad (1.10)$$

Каноническому базису циклов соответствует нормированный базис голоморфных дифференциалов

$$\oint_{a_k} d\mathcal{U}_j = \delta_{kj}, \quad k, j = 1, \dots, g. \quad (1.11)$$

Хорошо известно (см., например, [34, 48]), что матрица периодов кривой  $\Gamma$

$$B_{kj} = \oint_{b_k} d\mathcal{U}_j, \quad k, j = 1, \dots, g, \quad (1.12)$$

есть симметричная матрица с положительно определенной мнимой частью.

Построим по матрице периодов  $g$ -мерную тэта-функцию Римана с характеристиками  $\eta, \zeta \in \mathbb{R}^g$  [34, 48, 49]:

$$\Theta[\eta^t; \zeta^t](\mathbf{p}|B) = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^g} \exp\{\pi i(\mathbf{m} + \eta)^t B(\mathbf{m} + \eta) + 2\pi i(\mathbf{m} + \eta)^t(\mathbf{p} + \zeta)\},$$

$$\Theta[\mathbf{0}^t; \mathbf{0}^t](\mathbf{p}|B) \equiv \Theta(\mathbf{p}|B),$$
(1.13)

где  $\mathbf{p} \in \mathbb{C}^g$ , суммирование проходит по целочисленной  $g$ -мерной решетке.

Определим также на  $\Gamma$  нормированные абелевы интегралы второго ( $\Omega_1(\mathcal{P}), \Omega_2(\mathcal{P}), \Omega_3(\mathcal{P})$ ) и третьего ( $\omega_0(\mathcal{P})$ ), рода с асимптотикой в бесконечно удаленных точках  $\mathcal{P}_\infty^\pm$ :

$$\oint_{a_k} d\Omega_1 = \oint_{a_k} d\Omega_2 = \oint_{a_k} d\Omega_3 = \oint_{a_k} d\omega_0 = 0, \quad k = 1, \dots, g,$$

$$\begin{aligned} \Omega_1(\mathcal{P}) &= \mp i(\lambda - K_1 + O(\lambda^{-1})), & \mathcal{P} &\rightarrow \mathcal{P}_\infty^\pm, \\ \Omega_2(\mathcal{P}) &= \mp i(2\lambda^2 - K_2 + O(\lambda^{-1})), & \mathcal{P} &\rightarrow \mathcal{P}_\infty^\pm, \\ \Omega_3(\mathcal{P}) &= \mp i(4\lambda^3 - K_3 + O(\lambda^{-1})), & \mathcal{P} &\rightarrow \mathcal{P}_\infty^\pm, \\ \omega_0(\mathcal{P}) &= \mp (\ln \lambda - \ln K_0 + O(\lambda^{-1})), & \mathcal{P} &\rightarrow \mathcal{P}_\infty^\pm, \\ \chi &= \pm(\lambda^{g+1} + O(\lambda^g)), & \mathcal{P} &\rightarrow \mathcal{P}_\infty^\pm. \end{aligned}$$

Обозначим через  $2\pi i\mathbf{U}$ ,  $2\pi i\mathbf{V}$ ,  $2\pi i\mathbf{W}$  векторы  $b$ -периодов абелевых интегралов второго рода  $\Omega_1(\mathcal{P}), \Omega_2(\mathcal{P}), \Omega_3(\mathcal{P})$  соответственно.<sup>1</sup>

**Теорема 1 ([25, 42]).** *Функция*

$$Y(\mathcal{P}, x, z, t) = \begin{pmatrix} y_1(\mathcal{P}, x, z, t) & y_1(\tau_0\mathcal{P}, x, z, t) \\ y_2(\mathcal{P}, x, z, t) & y_2(\tau_0\mathcal{P}, x, z, t) \end{pmatrix},$$

где  $\tau_0$  — гиперэллиптическая инволюция,  $\tau_0: (\chi, \lambda) \rightarrow (-\chi, \lambda)$ ,

$$\begin{aligned} y_1(\mathcal{P}, x, z, t) &= \frac{\Theta(\mathcal{U}(\mathcal{P}) + \mathbf{U}x + \mathbf{V}z + \mathbf{W}t - \mathbf{X})\Theta(\mathbf{Z})}{\Theta(\mathcal{U}(\mathcal{P}) - \mathbf{X})\Theta(\mathbf{U}x + \mathbf{V}z + \mathbf{W}t + \mathbf{Z})} \times \\ &\quad \times \exp\{\Omega_1(\mathcal{P})x + \Omega_2(\mathcal{P})z + \Omega_3(\mathcal{P})t + i\Phi(x, z, t)\}, \\ y_2(\mathcal{P}, x, z, t) &= \rho \frac{\Theta(\mathcal{U}(\mathcal{P}) + \mathbf{U}x + \mathbf{V}z + \mathbf{W}t + \mathbf{\Delta} - \mathbf{X})\Theta(\mathbf{Z} - \mathbf{\Delta})}{\Theta(\mathcal{U}(\mathcal{P}) - \mathbf{X})\Theta(\mathbf{U}x + \mathbf{V}z + \mathbf{W}t + \mathbf{Z})} \times \\ &\quad \times \exp\{\Omega_1(\mathcal{P})x + \Omega_2(\mathcal{P})z + \Omega_3(\mathcal{P})t - i\Phi(x, z, t) + \omega_0(\mathcal{P})\}, \end{aligned} \quad (1.14)$$

при любом  $\rho \neq 0$  и при любых  $z$  и  $t$  будет являться собственной функцией оператора Дирака (1.1a) с потенциалом

$$\begin{aligned} \psi(x, z, t) &= \frac{2K_0}{\rho} \frac{\Theta(\mathbf{Z})\Theta(\mathbf{U}x + \mathbf{V}z + \mathbf{W}t + \mathbf{Z} - \mathbf{\Delta})}{\Theta(\mathbf{Z} - \mathbf{\Delta})\Theta(\mathbf{U}x + \mathbf{V}z + \mathbf{W}t + \mathbf{Z})} \exp\{2i\Phi(x, z, t)\}, \\ \phi(x, z) &= 2\rho K_0 \frac{\Theta(\mathbf{Z} - \mathbf{\Delta})\Theta(\mathbf{U}x + \mathbf{V}z + \mathbf{W}t + \mathbf{Z} + \mathbf{\Delta})}{\Theta(\mathbf{Z})\Theta(\mathbf{U}x + \mathbf{V}z + \mathbf{W}t + \mathbf{Z})} \exp\{-2i\Phi(x, z, t)\}, \end{aligned} \quad (1.15)$$

<sup>1</sup>Отметим, что в работах [25, 34] используется иная нормировка голоморфных дифференциалов (1.11) и соответственным образом модифицированные определения тэта-функции и векторов  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{W}$ .

удовлетворяющим (1.4), (1.5). Здесь  $\Delta$  — вектор абелевых голоморфных интегралов, вычисленных вдоль пути, соединяющего точки  $\mathcal{P}_\infty^-$  и  $\mathcal{P}_\infty^+$  и не пересекающего ни один из базисных циклов,

$$\begin{aligned}\Delta &= \mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^+) - \mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^-), & \Phi(x, z, t) &= K_1x + K_2z + K_3t, \\ \mathbf{X} &= \mathcal{K} + \sum_{j=1}^g \mathcal{U}(\mathcal{P}_j), & \mathbf{Z} &= \mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^+) - \mathbf{X},\end{aligned}$$

$\mathcal{K}$  — вектор римановых констант [34, 48–50],  $\mathcal{P}_j$ ,  $j = 1, \dots, g$  — неспециальный дивизор. При выполнении условия (1.9) выполняются равенства

$$|\psi|^2 = -4K_0^2 \frac{\Theta(\mathbf{U}x + \mathbf{V}z + \mathbf{W}t + \mathbf{Z} - \Delta)\Theta(\mathbf{U}x + \mathbf{V}z + \mathbf{W}t + \mathbf{Z} + \Delta)}{\Theta^2(\mathbf{U}x + \mathbf{W}t + \mathbf{V}z + \mathbf{Z})} \quad (1.16)$$

и ограничения вещественности на параметры решения

$$\operatorname{Im} \mathbf{U} = \operatorname{Im} \mathbf{V} = \operatorname{Im} \mathbf{W} = \operatorname{Im} \mathbf{Z} = \mathbf{0}, \quad K_0^2 < 0.$$

Недавно один из авторов<sup>2</sup>, анализируя работы [10, 11], заинтересовался указанной там связью между рациональными решениями фокусирующего нелинейного уравнения Шрёдингера и уравнения КП-I. В результате проведенных исследований оказалось [51, 52], что функция  $u(x, z, t) = -2\psi\phi$ , построенная по любым функциям  $\psi(x, z, t)$  и  $\phi(x, z, t)$ , являющимся одновременно решениями уравнений (1.4) и (1.5), удовлетворяет уравнению Кадамцева–Петвиашвили-I (КП-I)

$$3u_{zz} = (4u_t + u_{xxx} + 6uu_x)_x. \quad (1.17)$$

Нетрудно понять, что при  $\phi = \pm\bar{\psi}$  это решение будет вещественным:

$$u(x, z, t) = \mp 2|\psi|^2.$$

Отметим, что по решениям дефокусирующего ( $\phi = \bar{\psi}$ ) нелинейного уравнения Шрёдингера можно строить не только всюду отрицательные решения уравнения (1.17), поскольку для любого решения  $u(x, z, t)$  уравнения (1.17) и для любой постоянной  $c_0$  функция

$$v(x, z, t) = u(x - c_0t, z, t) + \frac{2}{3}c_0$$

также является решением уравнения (1.17).

Напомним также, что по любому решению уравнения КП-I можно по формуле [53–55]

$$w(x, z, t) = u\left(x + \frac{z^2t}{3}, zt, t\right)$$

построить решение цилиндрического уравнения КП-I (цКП-I)

$$\frac{3w_{zz}}{t^2} = \left(4w_t + w_{xxx} + 6ww_x + \frac{2w}{t}\right)_x. \quad (1.18)$$

Таким образом, строя многофазное конечнозонное решение уравнения (1), мы одновременно получаем решения уравнений (1.8), (1.17), (1.18) и редукций систем (1.5), (1.6):

$$\begin{aligned}\psi_t + \psi_{xxx} + 6|\psi|^2\psi_x &= 0, \\ i\psi_t + \psi_{xz} - 4|\psi|^2(\arg \psi)_x\psi &= 0.\end{aligned}$$

<sup>2</sup>А. О. Смирнов

## 2. Особенности трехфазных решений

В случае  $g = 3$  базис голоморфных дифференциалов определяется по формуле [25, 34]

$$d\mathcal{U}_k = (c_{k1}\lambda^2 + c_{k2}\lambda + c_{k3})\frac{d\lambda}{\chi}, \quad (2.1)$$

где

$$C = (A^t)^{-1}, \quad A_{jm} = \oint_{a_j} \lambda^{3-m} \frac{d\lambda}{\chi}.$$

Из равенства  $\int_{\hat{\tau}_\ell} d\omega = \int_\ell \tau^* d\omega$ , где  $\ell$  — произвольный путь на кривой  $\Gamma$ , следует, что

$$\begin{aligned} \overline{A_{jm}} &= \oint_{a_j} \overline{\lambda^{3-m} \frac{d\lambda}{\chi}} = \oint_{a_j} \tau_1^* \left( \lambda^{3-m} \frac{d\lambda}{\chi} \right) = \\ &= \oint_{\hat{\tau}_1 a_j} \lambda^{3-m} \frac{d\lambda}{\chi} = - \oint_{a_j} \lambda^{3-m} \frac{d\lambda}{\chi} = -A_{jm}. \end{aligned}$$

Поскольку  $\overline{A} = -A$ , то  $\overline{C} = -C$ . Проводя аналогичные рассуждения с интегралами по  $b$ -циклам, получаем

$$\overline{B} = -B - K \quad \text{или} \quad \operatorname{Re} B = -\frac{1}{2}K. \quad (2.2)$$

Из билинейных соотношений Римана (см., например, [25, 34, 48]) следует, что координаты векторов  $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}$  имеют вид

$$\begin{aligned} U_m &= -i \left( \frac{d\mathcal{U}_m}{d\xi_-} \Big|_{\xi_- = 0} - \frac{d\mathcal{U}_m}{d\xi_+} \Big|_{\xi_+ = 0} \right), \\ V_m &= -2i \left( \frac{d^2\mathcal{U}_m}{d\xi_-^2} \Big|_{\xi_- = 0} - \frac{d^2\mathcal{U}_m}{d\xi_+^2} \Big|_{\xi_+ = 0} \right), \\ W_m &= -2i \left( \frac{d^3\mathcal{U}_m}{d\xi_-^3} \Big|_{\xi_- = 0} - \frac{d^3\mathcal{U}_m}{d\xi_+^3} \Big|_{\xi_+ = 0} \right), \end{aligned}$$

где  $\xi_\pm = 1/\lambda$  — локальные параметры в окрестности бесконечно удаленных точек  $\mathcal{P}_\infty^\pm$ . Вычисляя производные, получаем равенства

$$\begin{aligned} U_m &= -2ic_{m1}, \quad V_m = 2i\chi_1 c_{m1} - 4ic_{m2}, \\ W_m &= i(4\chi_2 - 3\chi_1^2)c_{m1} + 4i\chi_1 c_{m2} - 8ic_{m3}, \end{aligned}$$

или

$$(\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}) = iC \begin{pmatrix} -2 & 2\chi_1 & 4\chi_2 - 3\chi_1^2 \\ 0 & -4 & 4\chi_1 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Из (2.3) вытекает, что векторы  $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}$  действительны, линейно независимы и образуют базис в  $\mathbb{R}^3$ . Следовательно, любой вектор из  $\mathbb{R}^3$  может быть представлен в виде линейной



комбинации этих векторов. В частности, это относится к векторам периодов трехмерной тэта-функции  $\mathbf{e}_1^t = (1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{e}_2^t = (0, 1, 0)$ ,  $\mathbf{e}_3^t = (0, 0, 1)$ :

$$\mathbf{e}_k = \mathcal{X}_k \mathbf{U} + \mathcal{Z}_k \mathbf{V} + \mathcal{T}_k \mathbf{W}.$$

Следовательно, амплитуда (1.16) трехфазного решения уравнения (1) будет периодической функцией в трехмерном пространстве

$$|\psi|(x + \mathcal{X}_k, z + \mathcal{Z}_k, t + \mathcal{T}_k) = |\psi|(x, z, t)$$

и, в случае решения в виде «волны-убийцы», максимумы ее амплитуды будут находиться в вершинах трехмерной решетки с образующими  $(\mathcal{X}_k, \mathcal{Z}_k, \mathcal{T}_k)$ . Эти образующие могут быть найдены обращением матрицы  $(\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W})$ :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{X}_1 & \mathcal{X}_2 & \mathcal{X}_3 \\ \mathcal{Z}_1 & \mathcal{Z}_2 & \mathcal{Z}_3 \\ \mathcal{T}_1 & \mathcal{T}_2 & \mathcal{T}_3 \end{pmatrix} = (\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W})^{-1} = i \begin{pmatrix} 1/2 & \chi_1/4 & \chi_2/4 - \chi_1^2/16 \\ 0 & 1/4 & \chi_1/8 \\ 0 & 0 & 1/8 \end{pmatrix} A^t.$$

Поскольку трехфазное решение  $\psi(x, z, t_0)$  уравнения (1) зависит от двух координат  $x$  и  $z$  и параметризуется третьей координатой  $t = t_0$ , то величина амплитуды этого решения зависит от того, насколько далеко от плоскости  $t = t_0$  находятся вершины данной трехмерной решетки. Следовательно, в отличие от случая двухфазного решения [56, 57], где изменение начальной фазы  $\mathbf{Z}$  приводило к тривиальному сдвигу решения по плоскости  $XOZ$ , амплитуда трехфазного решения (1.15) уравнения (1) зависит от выбора начальной фазы  $\mathbf{W}t_0 + \mathbf{Z}$  несколько более сложным образом (рис. 4). Если же рассматривать трехфазные решения уравнения КП-I, то их поведение можно описать следующим образом (рис. 2): через момент времени  $\Delta t = \mathcal{T}_k$  поверхность решения  $u(x, z)$  воспроизводит себя со сдвигом на плоскости  $XOZ$  на вектор  $(\mathcal{X}_k, \mathcal{Z}_k)$ .

### 3. Гиперэллиптическая кривая рода $g = 3$ с двумя инволюциями

Для того чтобы воспользоваться матричным аналогом теоремы Аппеля [58] и выразить конечнозонное решение через эллиптические функции, потребуем от спектральной кривой  $\Gamma$  (1.9) инвариантности относительно дополнительных голоморфных инволюций

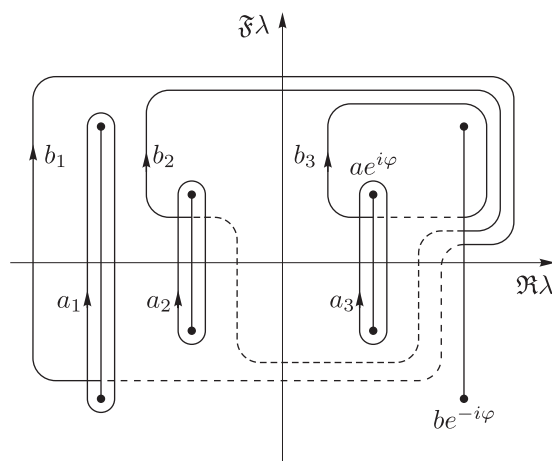
$$\tau_2: (\chi, \lambda) \rightarrow (\chi, -\lambda) \quad \text{и} \quad \tau_3: (\chi, \lambda) \rightarrow (c^4 \lambda^{-4} \chi, c^2 \lambda^{-1}).$$

Нетрудно проверить, что, в частности, данным условиям удовлетворяет кривая ( $0 < a < b$ ,  $c = \sqrt{ab}$ ,  $\varphi < \pi/2$ ):

$$\begin{aligned} \Gamma_3: \chi^2 &= (\lambda^4 - 2a^2 \lambda^2 \cos 2\varphi + a^4)(\lambda^4 - 2b^2 \lambda^2 \cos 2\varphi + b^4), \\ \chi_1 &= 0, \quad \chi_2 = -2(a^2 + b^2) \cos 2\varphi. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Выберем на  $\Gamma_3$  базисы циклов, как показано на рисунке 1.



Рис. 1. Кривая  $\Gamma_3$ .

Нетрудно проверить, что антиголоморфная инволюция  $\tau_1$  преобразует базисы циклов по правилу (1.10) с матрицей

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

и что голоморфные автоморфизмы  $\tau_j$  ( $j = 2, 3$ ) преобразуют базис циклов по правилу

$$\begin{aligned} \widehat{\tau}_j \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} &= M_j \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \\ \widehat{\tau}_j \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} &= (M_j^t)^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + L_j \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{3.2}$$

где

$$\begin{aligned} M_2 &= \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & L_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ M_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, & L_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Поскольку автоморфизмы  $\tau_j$  ( $j = 2, 3$ ) являются инволюциями, то соответствующие матрицы  $M$  и  $L$  удовлетворяют условиям

$$M^2 = I, \quad M^t L = -LM, \quad L^t = -L.$$

Из перестановочности инволюций  $\tau_2$  и  $\tau_3$  вытекает перестановочность матриц  $M_2$  и  $M_3$ , а также матриц  $J_2$  и  $J_3$ , где  $J_k$  — матрица преобразования ненормированных голоморфных дифференциалов

$$\tau_k^* \begin{pmatrix} \lambda^2 \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix} \frac{d\lambda}{\chi} = J_k \begin{pmatrix} \lambda^2 \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix} \frac{d\lambda}{\chi},$$

$$J_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -c^2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -c^{-2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из (3.2) следует, что матрицы  $C$  и  $B$  удовлетворяют условиям

$$CJ_k = M_k^t C, \quad B = M_k^t B M_k - M_k^t L_k, \quad (3.3)$$

а из соотношений (2.2), (3.3) вытекает, что матрица  $B$  имеет следующую структуру ( $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3 \in \mathbb{R}$ ):

$$B = \begin{pmatrix} i(\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_3) & i\mathfrak{b}_1 - 1/2 & i\mathfrak{b}_3 - 1/2 \\ i\mathfrak{b}_1 - 1/2 & i(\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2) & i\mathfrak{b}_2 - 1/2 \\ i\mathfrak{b}_3 - 1/2 & i\mathfrak{b}_2 - 1/2 & i(\mathfrak{b}_2 + \mathfrak{b}_3) \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Из (3.3) и структуры матрицы  $B$  (3.4) следует, что ее мнимая часть может быть диагонализирована с помощью матрицы  $T$  [58]:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

то есть что является верным равенство  $T^t B T = B' + A'$ , где

$$B' = \begin{pmatrix} 4i\mathfrak{b}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 4i\mathfrak{b}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 4i\mathfrak{b}_3 \end{pmatrix}, \quad A' = -\frac{1}{2} T^t K T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Также из (3.3) следует, что матрица  $C$  имеет вид ( $\operatorname{Re} c_{jk} = 0$ )

$$C = \begin{pmatrix} c_{31} + c_{21} & 0 & (c_{31} - c_{21})c^2 \\ c_{21} & c_{32} & -c_{21}c^2 \\ c_{31} & c_{32} & c_{31}c^2 \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Применяя матричную версию теоремы Аппеля [58], получаем, что трехмерная тэта-функция, используемая в решении (1.16), может быть выражена через эллиптические

функции:

$$\begin{aligned} \Theta(\mathbf{p}|B) &= f(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3) = \\ &= \vartheta_3(\tilde{p}_1|h_1)\vartheta_3(\tilde{p}_2|h_2)\vartheta_3(\tilde{p}_3|h_3) + \vartheta_4(\tilde{p}_1|h_1)\vartheta_1(\tilde{p}_2|h_2)\vartheta_1(\tilde{p}_3|h_3) + \\ &\quad + \vartheta_1(\tilde{p}_1|h_1)\vartheta_4(\tilde{p}_2|h_2)\vartheta_1(\tilde{p}_3|h_3) + \vartheta_1(\tilde{p}_1|h_1)\vartheta_1(\tilde{p}_2|h_2)\vartheta_4(\tilde{p}_3|h_3), \end{aligned} \quad (3.7)$$

где  $\tilde{p}_j = p_j + p_{j+1} - p_{j+2}$ ,  $p_{j+3} \equiv p_j$ ,  $h_j = \exp(-4\pi\mathbf{b}_j)$ . Функции  $\vartheta_j(p|h)$  — это эллиптические тэта-функции Якоби [59]:

$$\begin{aligned} \vartheta_1(p|h) &= 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} h^{(m-1/2)^2} \sin[(2m-1)\pi p], \\ \vartheta_2(p|h) &= 2 \sum_{m=1}^{\infty} h^{(m-1/2)^2} \cos[(2m-1)\pi p], \\ \vartheta_3(p|h) &= 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} h^{m^2} \cos(2m\pi p), \\ \vartheta_4(p|h) &= 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m h^{m^2} \cos(2m\pi p). \end{aligned}$$

#### 4. Анализ решения

Из формулы для редукции тэта-функции (3.7) и значений векторов периодов (2.3) получаем следующую формулу для квадрата абсолютной величины трехфазного решения (1.16) фокусирующего нелинейного уравнения Шрёдингера:

$$\begin{aligned} |\psi|^2 &= -4K_0^2 f(k_1x + \kappa_1t + \delta_1, k_2z + \delta_2, k_3x + \kappa_3t + \delta_3) \times \\ &\quad \times f(k_1x + \kappa_1t - \delta_1, k_2z - \delta_2, k_3x + \kappa_3t - \delta_3) \times \\ &\quad \times \{f(k_1x + \kappa_1t, k_2z, k_3x + \kappa_3t)\}^{-2}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где функция  $f(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3)$  задается равенством (3.7),

$$\begin{aligned} k_1 &= -4ic_{21}, \quad k_2 = -8ic_{32}, \quad k_3 = -4ic_{31}, \\ \kappa_1 &= -2k_1(\chi_2 + 2c^2), \quad \kappa_3 = -2k_3(\chi_2 - 2c^2). \end{aligned}$$

Вычисление параметров решения через эллиптические интегралы вынесено в приложение.

Из (4.1) следует, что функция  $|\psi|^2$  периодична по  $z$  и почти-периодична по  $x$  и  $t$ . Кроме того, существуют значения

$$\varphi_1 = \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{ab}{a^2 + b^2}\right), \quad \varphi_3 = \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{-ab}{a^2 + b^2}\right),$$

для которых будет выполняться равенство  $\kappa_1 = 0$  или  $\kappa_3 = 0$ , и, соответственно, решение уравнения КП-I будет периодическим по  $t$ .

Для определенности будем считать, что  $\varphi > \pi/4$ . Характерный вид трехфазного решения уравнения КП-I для этого случая изображен на рисунках 2 и 3.

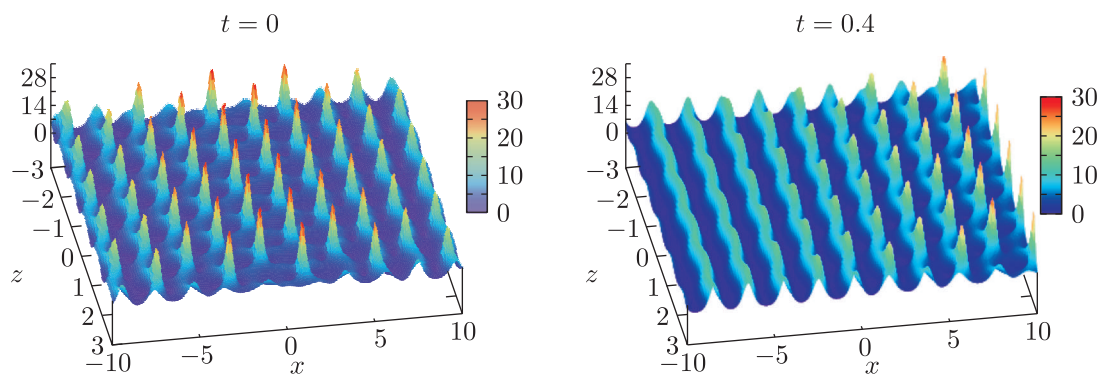


Рис. 2. Решение уравнения КП-I.

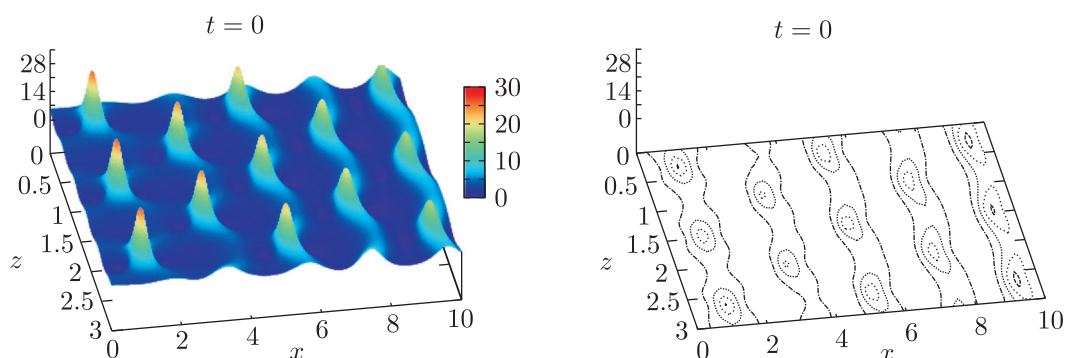


Рис. 3. Крупный план решения.

Решение, изображенное на рисунках 2 и 3, построено при  $k_c = \sqrt{b/a} = 1.3$ ,  $c = 1$ ,  $\varphi = 0.4\pi$ . Зависимость от  $t$  данного решения можно определить следующим образом: пики медленно движутся вправо, а длинноволновая огибающая — влево.

На крупном плане хорошо видно, что пики решения образуют две одинаковые прямоугольные решетки, вершины каждой из которых лежат в центрах прямоугольников периодов другой. Нетрудно видеть, что решение является периодическим по  $z$  и что почти-периодичность по  $x$  заключается в изменении величины амплитуды решения в зависимости от  $x$ -координаты узла решетки.

Изучение вопроса о зависимости параметров решения от параметров его спектральной кривой привело к следующим выводам ( $Z = 1/|k_2|$ ,  $X_j = 1/|k_j|$ ,  $T_j = 1/|\kappa_j|$ ):

- период решения  $Z$  растет при уменьшении  $c$ ,  $k_c$  и при увеличении  $\varphi$ ;
- периоды  $X_1, T_1$  (первая фаза) и  $X_3, T_3$  (третья фаза) растут при уменьшении  $c$  или  $k_c$ ;
- периоды  $X_1, T_1$  растут при увеличении  $\varphi$ ;
- период  $X_3$  слабо зависит от  $\varphi$ , немного возрастая только вблизи значения  $\varphi = \pi/2$ ;
- период  $T_3$  имеет разрыв второго рода при  $2\varphi = \arccos(-ab/(a^2 + b^2))$ , вдали от разрыва почти не меняется;
- параметры  $h_j$ , от которых зависит крутизна и амплитуда решения, не зависят от  $c$  при фиксированных  $k_c$  и  $\varphi$ ;
- параметры  $h_2, h_3$  растут при  $k_c \rightarrow 1$ , в то время как  $h_1$  убывает;

- параметры  $h_1, h_3$  растут при  $\varphi \rightarrow \pi/2$ ;
- зависимость параметра  $h_2$  от  $\varphi$  заметна только вблизи  $k_c = 1$ , при этом  $h_2$  растет с уменьшением  $\varphi$ .

Поскольку  $|\psi| = \sqrt{u/2}$ , то рисунки 2 и 3 одновременно показывают характерное поведение абсолютной величины трехфазного решения нелинейного уравнения Шрёдингера при некоторых значениях параметра  $t$ . График трехфазного решения нелинейного уравнения Шрёдингера при  $z = 1.5$  и некоторых значениях параметра  $t$  показан на рисунке 4.

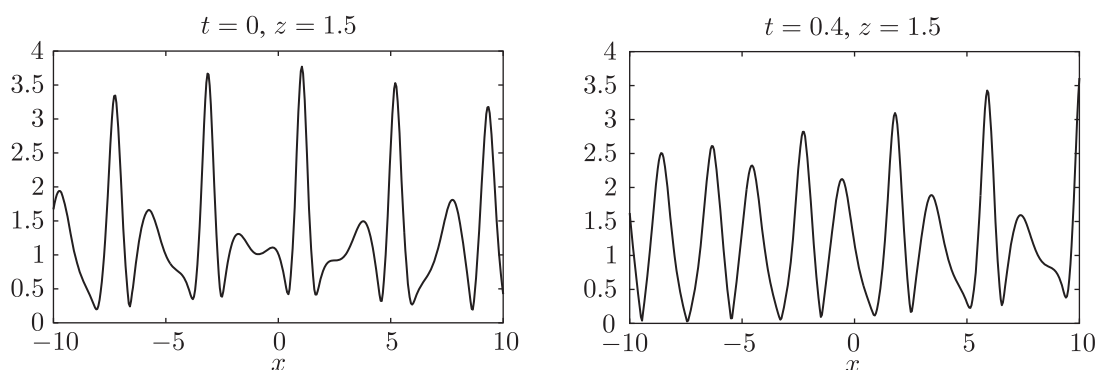


Рис. 4. Решение нелинейного уравнения Шрёдингера при  $z = -5$ .

## Заключительные замечания

Отметим, что периодичность решения по  $z$  является следствием симметрии кривой (следствием условия  $\chi_1 = 0$  в равенстве (2.3)). Поэтому, просто сдвинув точки ветвления кривой вдоль действительной оси, из исходного периодического по  $z$  решения можно получить решение уже почти-периодическое по всем трем переменным. В этом случае решетки перестанут быть прямоугольными, но при этом вершины одной из решеток останутся в центре параллелограмма периодов другой.

Опыт работы с многофазными решениями [60, 61] указывает на то, что число решеток связано с числом листов накрывающего отображения: то есть рассмотрев какую-либо алгебраическую кривую рода  $g$ ,  $n$ -листно ( $n > 2$ ) накрывающую эллиптическую, можно построить  $g$ -фазное почти-периодическое решение уравнения КП-I, пики которого будут находиться в вершинах  $n$  четырехугольных решеток, сдвинутых друг относительно друга на  $n$ -ую часть периода. В то же время из опыта работы с двухфазными решениями уравнения (1) [56, 57] вытекает, что, взяв значения угла  $\varphi < \pi/4$ , мы получили бы решение с менее выраженными и более пологими пиками.

Авторы благодарят проф. В. Б. Матвеева за внимание к работе и полезные обсуждения.

## Приложение. Вычисление параметров трехфазных решений

Поскольку на  $\Gamma_3$  заданы голоморфные инволюции  $\tau_0, \tau_2$ , то она накрывает две другие кривые:  $\Gamma_1 = \Gamma_3/\tau_2$  рода  $g = 1$  (рис. 5),

$$\Gamma_1: \chi_+^2 = (t^2 - 2a^2t \cos 2\varphi + a^4)(t^2 - 2b^2t \cos 2\varphi + b^4), \quad (4.2)$$

и  $\Gamma_2 = \Gamma_3/(\tau_2\tau_0)$  рода  $g = 2$  (рис. 6),

$$\Gamma_2: \chi_-^2 = t(t^2 - 2a^2t \cos 2\varphi + a^4)(t^2 - 2b^2t \cos 2\varphi + b^4), \quad (4.3)$$

где

$$t = \lambda^2, \quad \chi_+ = \chi, \quad \chi_- = \chi\lambda$$

и

$$\frac{dt}{\chi_+} = 2\frac{\lambda d\lambda}{\chi}, \quad \frac{tdt}{\chi_-} = 2\frac{\lambda^2 d\lambda}{\chi}, \quad \frac{dt}{\chi_-} = 2\frac{d\lambda}{\chi}.$$

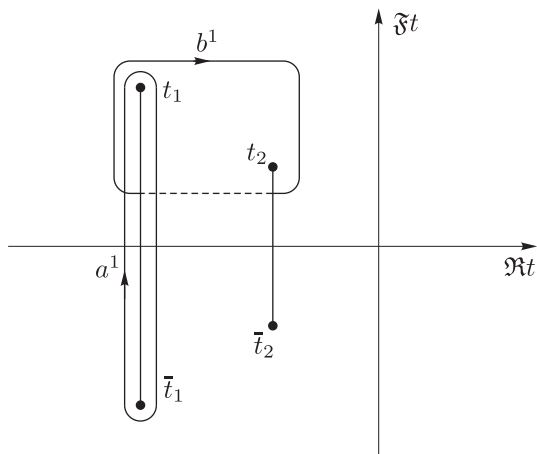


Рис. 5. Кривая  $\Gamma_1$ .

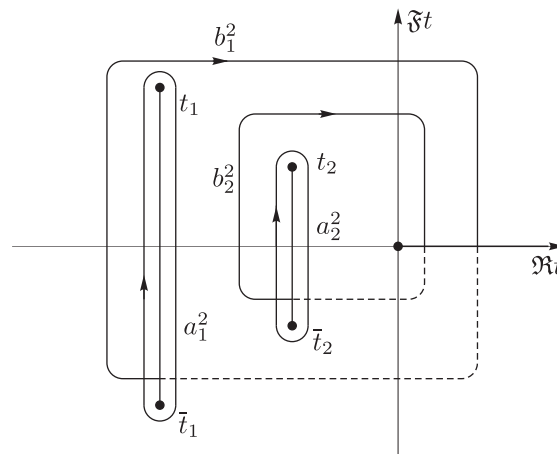


Рис. 6. Кривая  $\Gamma_2$ .

Здесь  $t_1 = b^2 e^{2i\varphi}$ ,  $t_2 = a^2 e^{2i\varphi}$ . Для определенности будем считать, что  $\varphi > \pi/4$  и  $2\varphi > \pi/2$ . Накрывающие отображения порождают следующие отображения базисов циклов:

$$(a_1 \ a_2 \ a_3 \ b_1 \ b_2 \ b_3)^t \rightarrow \begin{pmatrix} S & P \\ Q & R \end{pmatrix} (a^1 \ a_1^2 \ a_2^2 \ b^1 \ b_1^2 \ b_2^2)^t,$$

где

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Напомним, что проверить правильность вычисления матриц  $S$ ,  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  можно с помощью соотношений [25, 62]

$$S^t Q = Q^t S, \quad R^t P = P^t R, \quad S^t R - Q^t P = nI,$$

где  $I$  — единичная матрица,  $n = 2$  — число листов накрытий.

Наличие инволюции  $\tau_3$  приводит к тому, что  $\Gamma_2$  в свою очередь накрывает две эллиптические кривые (рис. 7, 8;  $s_1 = (a^2 + b^2) \cos 2\varphi + i(b^2 - a^2) \sin 2\varphi$ )

$$\Gamma_{\pm}: \nu_{\pm}^2 = (s \pm 2c^2)(s^2 - 2(a^2 + b^2)s \cos 2\varphi + a^4 + b^4 + 2a^2 b^2 \cos 4\varphi), \quad (4.4)$$



где

$$s = t + \frac{c^4}{t}, \quad \nu_{\pm} = \frac{t \pm c^2}{t^2} \chi_{\pm}, \quad \frac{ds}{\nu_{\pm}} = \frac{(t \mp c^2)dt}{\chi_{\pm}} = \frac{2(\lambda^2 \mp c^2)d\lambda}{\chi}$$

Отображения  $\Gamma_2$  на  $\Gamma_{\pm}$  порождают следующие отображения базисов циклов:

$$\begin{pmatrix} a_1^2 \\ a_2^2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_+ \\ a_- \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b_1^2 \\ b_2^2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_+ \\ b_- \end{pmatrix}.$$

Непосредственные вычисления с помощью формул связи между циклами и дифференциалами дают следующие значения для коэффициентов матриц  $C$  (3.6) и  $B$  (3.4):

$$c_{21} = \frac{1}{2(\alpha_1 - 2\beta_1)}, \quad c_{32} = \frac{1}{2\alpha_2}, \quad c_{31} = \frac{1}{2(\alpha_3 - 2\beta_3)},$$

$$ib_1 = \frac{\alpha_1}{2(\alpha_1 - 2\beta_1)}, \quad ib_2 = \frac{\beta_2}{2\alpha_2}, \quad ib_3 = \frac{\alpha_3}{2(\alpha_3 - 2\beta_3)},$$

где

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \oint_{a_+} \frac{ds}{\nu_+}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2} \oint_{a^1} \frac{dt}{\chi_+}, \quad \alpha_3 = \frac{1}{2} \oint_{a_-} \frac{ds}{\nu_-},$$

$$\beta_1 = \frac{1}{2} \oint_{b_+} \frac{ds}{\nu_+}, \quad \beta_2 = \frac{1}{2} \oint_{b^1} \frac{dt}{\chi_+}, \quad \beta_3 = \frac{1}{2} \oint_{b_-} \frac{ds}{\nu_-}.$$

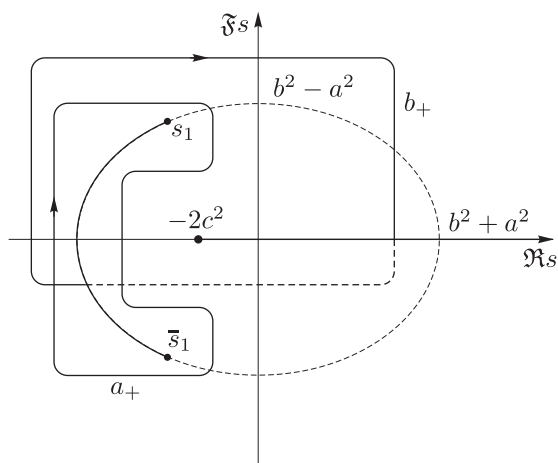


Рис. 7. Кривая  $\Gamma_+$ .

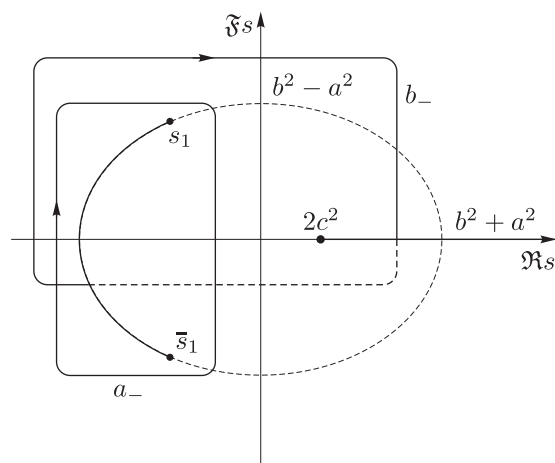


Рис. 8. Кривая  $\Gamma_-$ .

Сводя контурные интегралы к определенным, имеем

$$\alpha_1 = - \int_{-2c^2}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{(s - s_1)(s - \bar{s}_1)(s + 2c^2)}},$$

$$\alpha_3 = - \int_{2c^2}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{(s - s_1)(s - \bar{s}_1)(s - 2c^2)}}.$$



$$\alpha_1 - 2\beta_1 = i \int_{-\infty}^{-2c^2} \frac{ds}{\sqrt{(s-s_1)(s-\bar{s}_1)(-2c^2-s)}},$$

$$\alpha_3 - 2\beta_3 = i \int_{-\infty}^{2c^2} \frac{ds}{\sqrt{(s-s_1)(s-\bar{s}_1)(2c^2-s)}}$$

и

$$\alpha_2 = \frac{-i\sqrt{(A_2^2+1)(A_2^2+k^2)}}{A_2C_2-B_2} \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{(k^2-t^2)(1-t^2)}},$$

$$\beta_2 = \frac{\sqrt{(A_2^2+1)(A_2^2+k^2)}}{A_2C_2-B_2} \int_1^k \frac{dt}{\sqrt{(k^2-t^2)(t^2-1)}},$$

где  $(\mathcal{R}_j = \text{Re}(t_j), \mathcal{I}_j = \text{Im}(t_j))$ 

$$k = \frac{(\mathcal{R}_1 - \mathcal{R}_2)^2 + \mathcal{I}_1^2 + \mathcal{I}_2^2 + \sqrt{D}}{2\mathcal{I}_1\mathcal{I}_2},$$

$$D = ((\mathcal{R}_1 - \mathcal{R}_2)^2 + (\mathcal{I}_1 - \mathcal{I}_2)^2)((\mathcal{R}_1 - \mathcal{R}_2)^2 + (\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2)^2),$$

$$A_2 = \frac{\mathcal{I}_2(k^2 - 1)(\mathcal{R}_1 - \mathcal{R}_2)}{(\mathcal{R}_1 - \mathcal{R}_2)^2 + (\mathcal{I}_1 - \mathcal{I}_2k)^2},$$

$$B_2 = \mathcal{I}_2 - A_2\mathcal{R}_2, \quad C_2 = -\mathcal{R}_2 - A_2\mathcal{I}_2.$$

Вычисление сдвигов фаз  $\delta_j$  при  $\mathbf{Z} = \mathbf{0}$  приводит к следующим выражениям:

$$\delta_1 = \frac{1}{2} - i\mathbf{b}_1, \quad \delta_3 = \frac{1}{2} - i\mathbf{b}_3,$$

$$\delta_2 = \frac{1}{2} + i\mathbf{b}_2 + \frac{1}{2\alpha_2} \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{(t-t_1)(t-\bar{t}_1)(t-t_2)(t-\bar{t}_2)}} =$$

$$= \frac{1}{2} + 2i\mathbf{b}_2 - \frac{\sqrt{(A_2^2+1)(A_2^2+k^2)}}{\alpha_2(A_2C_2-B_2)} \int_0^{-A_2} \frac{dt}{\sqrt{(t^2+k^2)(t^2+1)}}.$$

Поскольку коэффициент  $K_0^2$  выражается через интегралы по всем трем эллиптическим кривым и соответствующая формула очень громоздкая, то мы ее не приводим.

## Список литературы

- [1] Akhmediev N., Ankiewicz A., Taki M. Waves that appear from nowhere and disappear without a trace // Phys. Lett. A, 2009, vol. 373, pp. 675–678.
- [2] Discussion & debate: Rogue waves – towards a unifying concept? // Eur. Phys. J. Special Topics, vol. 185, no. 1 / N. Akhmediev, E. Pelinovsky (Eds.). Berlin: Springer, 2010. 266 pp.
- [3] Peregrine D. H. Water waves, nonlinear Schrödinger equations and their solutions // J. Aust. Math. Soc. Ser. B, 1983, vol. 25, pp. 16–43.



- [4] Dyachenko A. I., Zakharov V. E. On the formation of freak waves on the surface of deep water // Письма в ЖЭТФ, 2008, т. 88, № 5, с. 356–359.
- [5] Захаров В. Е., Шамин Р. В. О вероятности возникновения волн-убийц // Письма в ЖЭТФ, 2010, т. 91, № 2, с. 68–71.
- [6] Chabchoub A., Hoffmann N., Akhmediev N. Rogue waves observation in a water wave tank // Phys. Rev. Lett., 2011, vol. 106, no. 20, 204502, 4 pp.
- [7] Chabchoub A., Hoffmann N., Onorato M., Akhmediev N. Super rogue waves: Observation of a higher-order breather in water waves // Phys. Rev. X, 2012, vol. 2, no. 1, 011015, 6 pp.
- [8] Ахмедиев Н. Н., Анкевич А. Солитоны: нелинейные импульсы и пучки. Москва: Физматлит, 2003. 304 с.
- [9] Kibler B., Fatome J., Finot C., Millot G., Dias F., Genty G., Akhmediev N., Dudley J. M. The Peregrine soliton in nonlinear fibre optics // Nature Phys., 2010, vol. 6, no. 10, pp. 790–795.
- [10] Dubard P., Gaillard P., Klein C., Matveev V. B. On multi-rogue waves solutions of the focusing NLS equation and positon solutions of the KdV equation // Eur. Phys. J. Spec. Top., 2010, vol. 185, no. 1, pp. 247–258.
- [11] Dubard P., Matveev V. B. Multi-rogue waves solutions to the focusing NLS equation and the KP-I equation // Nat. Hazards Earth Syst. Sci., 2011, vol. 11, pp. 667–672.
- [12] Ankiewicz A., Kedzora D. J., Akhmediev N. Rogue waves triplets // Phys. Lett. A, 2011, vol. 375, pp. 2782–2785.
- [13] Kedzora D. J., Ankiewicz A., Akhmediev N. Circular rogue wave clusters // Phys. Rev. E, 2011, vol. 84, no. 5, 056611, 7 pp.
- [14] Ohta Y., Yang J. General higher order rogue waves and their dynamics in the nonlinear Schrödinger equation // Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci., 2012, vol. 468, pp. 1716–1740.
- [15] He J. S., Zhang H. R., Wang L. H., Porsezian K., Fokas A. S. Generating mechanism for higher-order rogue waves // Phys. Rev. E, 2013, vol. 87, no. 5, 052914, 10 pp.
- [16] Guo B., Ling L., Liu Q. P. Nonlinear Schrödinger equation: Generalized Darboux transformation and rogue wave solutions // Phys. Rev. E, 2012, vol. 85, no. 2, 026607, 9 pp.
- [17] Osborne A. R., Onorato M., Serio M. The nonlinear dynamics of rogue waves and holes in deep-water gravity wave trains // Phys. Lett. A, 2000, vol. 275, pp. 386–393.
- [18] Calini A., Schober C. M. Homoclinic chaos increases the likelihood of rogue wave formation // Phys. Lett. A, 2002, vol. 298, pp. 335–349.
- [19] Schober C. M. Melnikov analysis and inverse spectral analysis of rogue waves in deep water // Eur. J. Mech. B Fluids, 2006, vol. 25, no. 5, pp. 602–620.
- [20] Dysthe K. B. Note on a modification to the nonlinear Schrödinger equation for application to deep water waves // Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci., 1979, vol. 369, pp. 105–114.
- [21] Trulsen K., Dysthe K. B. A modified nonlinear Schrödinger equation for broader bandwidth gravity waves on deep water // Wave Motion, 1996, vol. 24, no. 3, pp. 281–289.
- [22] Trulsen K., Kliakhandler I., Dysthe K. B., Velarde M. G. On weakly nonlinear modulation of waves on deep water // Phys. Fluids, 2000, vol. 12, no. 10, pp. 2433–2437.
- [23] Saini A., Vyas V. M., Pandey S. N., Raju T. S., Panigrahi P. K. Traveling wave solutions to nonlinear Schrödinger equation with self-steepening and self-frequency shift, arXiv:0911.2788 (2009), 8 pp.
- [24] Islas A. L., Schober C. M. Predicting rogue waves in random oceanic sea states // Phys. Fluids, 2005, vol. 17, no. 3, 031701, 4 pp.
- [25] Belokolos E. D., Bobenko A. I., Enol'skii V. Z., Its A. R., Matveev V. B. Algebro-geometrical approach to nonlinear evolution equations. (Springer Ser. Nonlinear Dynamics.) Berlin: Springer, 1994. 350 pp.
- [26] Gesztesy F., Holden H. Soliton equation and their algebro-geometric solutions: Vol. 1: (1 + 1)-dimensional continuous models. (Cambridge Stud. Adv. Math., vol. 79.) Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2003. 505 pp.

- [27] Gesztesy F., Holden H., Michor J., Teschl G. Soliton equation and their algebro-geometric solutions: Vol. 2:  $(1 + 1)$ -dimensional discrete models. (Cambridge Stud. Adv. Math., vol. 114.) Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2008. 438 pp.
- [28] Новиков С. П. Периодическая задача для уравнения Кортевега – де Фриза: 1 // Функциональный анализ и его прил., 1974, т. 8, № 3, с. 54–66.
- [29] Lax P. D. Periodic solutions of the KdV equations // Nonlinear wave motion: Proc. AMS–SIAM Summer Sem., Clarkson Coll. Tech., Potsdam, N. Y., 1972). (Lectures in Appl. Math., vol. 15.) Providence, R. I., 1974. P. 85–96.
- [30] Дубровин Б. А., Новиков С. П. Периодическая задача для уравнений Кортевега – де Фриза и Штурма – Лиувилля. Их связь с алгебраической геометрией // Докл. АН СССР, 1974, т. 219, № 3, с. 531–534.
- [31] Итс А. Р., Матвеев В. Б. Операторы Шрёдингера с конечнозонным спектром и  $n$ -солитонные решения уравнения Кортевега – де Фриза // ТМФ, 1975, т. 23, № 1, с. 51–68.
- [32] Дубровин Б. А., Матвеев В. Б., Новиков С. П. Нелинейные уравнения типа Кортевега – де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия // УМН, 1976, т. 31, № 1, с. 55–136.
- [33] Кричевер И. М. Методы алгебраической геометрии в теории нелинейных уравнений // УМН, 1977, т. 32, № 6, с. 183–208.
- [34] Дубровин Б. А. Тэта-функции и нелинейные уравнения // УМН, 1981, т. 36, № 2, с. 11–80.
- [35] Matveev V. B. 30 years of finite-gap integration theory // Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci., 2008, vol. 366, no. 1867, pp. 837–875.
- [36] McLaughlin D. W., Schober C. M. Chaotic and homoclinic behavior for numerical discretizations of the nonlinear Schrödinger equation // Phys. D, 1992, vol. 57, nos. 3–4, pp. 447–465.
- [37] Ablowitz M. J., Schober C. M., Herbst V. M. Numerical chaos, roundoff errors, and homoclinic manifolds // Phys. Rev. Lett., 1993, vol. 71, no. 17, pp. 2683–2686.
- [38] Calini A., Ercolani N. M., McLaughlin D. W., Schober C. M. Mel'nikov analysis of numerically induced chaos in the nonlinear Schrödinger equation // Phys. D, 1996, vol. 89, nos. 3–4, pp. 227–260.
- [39] Смирнов А. О. Эллиптический бризер нелинейного уравнения Шрёдингера // Зап. научн. сем. ПОМИ, 2012, т. 398, с. 209–222.
- [40] Ma Y. C. The perturbed plane-wave solitons of the cubic Schrödinger equation // Stud. Appl. Math., 1979, vol. 60, pp. 43–58.
- [41] Итс А. Р. «Изомонодромные» решения уравнений нулевой кривизны // Изв. АН СССР. Сер. Матем., 1985, т. 49, № 3, с. 530–565.
- [42] Смирнов А. О. Эллиптические решения нелинейного уравнения Шрёдингера и модифицированного уравнения Кортевега – де Фриза // Матем. сб., 1994, т. 185, № 8, с. 103–114.
- [43] Kundu A., Mukherjee A., Naskar T. Modelling rogue waves through exact dynamical lump soliton controlled by ocean currents: Preprint, arXiv:1204.0916 (2012), 5 pp.
- [44] Итс А. Р. Обращение гиперэллиптических интегралов и интегрирование нелинейных дифференциальных уравнений // Вестн. ЛГУ, Сер. Матем., механ., астрон., 1976, т. 7, № 2, с. 39–46.
- [45] Dai C. Q., Zhang J. F. New solitons for the Hirota equation and generalized higher-order nonlinear Schrödinger equation with variable coefficients // J. Phys. A, 2006, vol. 39, no. 4, pp. 723–737.
- [46] Ankiewicz A., Soto-Crespo J. M., Akhmediev N. Rogue waves and rational solutions of the Hirota equation // Phys. Rev. E, 2010, vol. 81, no. 4, 046602, 8 pp.
- [47] Li C. Z., He J. S. Darboux transformation and positions of the inhomogeneous Hirota and the Maxwell–Bloch equation: Preprint, arXiv:1210.2501 (2012), 5 pp.
- [48] Бейкер Г. Ф. Абелевы функции. Теорема Абеля и связанная с ней теория тэта-функций. Москва: МЦНМО, 2008. 736 с.
- [49] Fay J. D. Theta-functions on Riemann surfaces. (Lect. Notes in Math., vol. 352.) Berlin: Springer, 1973. 137 pp.

- [50] Krazer A. Lehrbuch der Thetafunktionen. Leipzig: Teubner, 1903. 509 pp.
- [51] Смирнов А. О. Об одном семействе двухфазных решений уравнения Буссинеска: 1 // Научная сессия ГУАП: Сб. докл.: В 3 ч.: Ч. 1. Технические науки. СПб.: ГУАП, 2012. С. 219–223.
- [52] Смирнов А. О. О простейшем рациональном решении уравнения Буссинеска // Математика и ее приложения: Межвуз. сб. научн. тр. СПб.: ГУРМФ, 2013. Т. 4, с. 58–64.
- [53] Липовский В. Д., Матвеев В. Б., Смирнов А. О. О связи между уравнениями Кадомцева – Петвиашвили и Джонсона // Зап. научн. сем. ЛОМИ, 1986, т. 150, с. 70–75.
- [54] Клейн К., Матвеев В. Б., Смирнов А. О. Цилиндрическое уравнение Кадомцева – Петвиашвили: старые и новые результаты // ТМФ, 2007, т. 152, № 2, с. 304–320.
- [55] Khusnutdinova K. R., Klein C., Matveev V. B., Smirnov A. O. On the integrable elliptic cylindrical Kadomtsev – Petviashvili equation // Chaos, 2013, vol. 23, 013126, 13 pp.
- [56] Смирнов А. О. Решение нелинейного уравнения Шрёдингера в виде двухфазных странных волн // ТМФ, 2012, т. 173, № 1, с. 89–103.
- [57] Смирнов А. О. Периодические двухфазные «волны-убийцы» // Матем. заметки, 2013 (в печати).
- [58] Смирнов А. О. Матричный аналог теоремы Аппеля и редукции многомерных тэта-функций Римана // Матем. сб., 1987, т. 175, № 7, с. 382–391.
- [59] Ахиезер Н. И. Элементы теории эллиптических функций. 2-е изд. Москва: Наука, 1970. 312 с.
- [60] Amosenok E. G., Smirnov A. O. Two-gap 2-elliptic solution of Boussinesq equation // Lett. Math. Phys., 2011, vol. 96, nos. 1–3, pp. 157–168.
- [61] Смирнов А. О., Головачев Г. М., Амосенок Е. Г. Двухзонные 3-эллиптические решения уравнений Буссинеска и Кортевега – де Фриза // Нелинейная динамика, 2011, т. 7, № 2, с. 239–256.
- [62] Смирнов А. О. Конечнотонные решения абелевой цепочки Тоды рода 4 и 5 в эллиптических функциях // ТМФ, 1989, т. 78, № 1, с. 11–21.

### Constructed in the elliptic functions three-phase solutions for the nonlinear Schrödinger equation

Alexander O. Smirnov<sup>1</sup>, Grigory M. Golovachev<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup>Saint Petersburg State University of Airspace Instrumentation (SUAI)

Bolshaya Morskaya str. 67, Saint Petersburg, 190000, Russia

<sup>1</sup>alsmir@guap.ru, <sup>2</sup>ggolovachev@yandex.ru

Three-phase finite-gap with behavior of almost-periodic freak waves solutions for the nonlinear Schrödinger and the KP-I equations were constructed. Dependencies of parameters of solutions from the parameters of spectral curve were studied.

MSC 2010: 35Q53

Keywords: rogue waves, freak waves, nonlinear Schrödinger equation, KP equation, Hirota equation, theta-function, reduction, covering

Received March 3, 2013, accepted May 31, 2013

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2013, vol. 9, no. 3, pp. 389–407 (Russian)