И. Л. Гуревич, Доказательство существования решения одной обратной смешанной задачи газовой динамики,
Тр. сем. по краев. задачам, 1971, выпуск 8, 66–69

И. Л. ГУРЕВИЧ

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

В работе рассматривается неизменно дозвуковое течение газа, ограниченное линиями тока, причем на свободной границе предполагается известной скорость как функция дуговой координаты. Такие задачи для несжимаемой жидкости исследовались М. И. Хайкиным [1]. Широкий класс задач, в которых скорость есть функция одной из декартовых координат, изучен В. Н. Монаховым [2], и мы будем использовать его метод.

Придерживаемся обозначений монографии [2]: $w = \varphi + i\psi$ — комплексный потенциал; q, θ — модуль и аргумент скорости; $M(q)$ — число Маха; $q^* = \int_1^q \frac{\sqrt{1-M^2}}{q}\, dq$; $\omega = q^* - i\theta$ — переменная плоскости годографа; $z = x + iy$ — переменная плоскости течения; $\rho(q)$ — плотность; $\rho^* = \frac{\rho}{\sqrt{1-M^2}}$ — фиктивная плотность.

Ограничимся рассмотрением следующей конкретной задачи: часть L_z^1 границы течения в криволинейной верхней полуплоскости задается уравнением $\theta = \theta(s)$, а на L_z^2 задано распределение скорости: $q^* = q^*(s) \in C_\beta$, где s — граничная дуговая абсцисса, отсчитываемая от точки стыка L_z^1 и L_z^2. Область в плоскости w есть верхняя полуплоскость. Каждой точке $w = \varphi + i\psi$ сопоставим число $\tau = s + i\psi$, где s — дуговая координата той точки границы в физической плоскости, которой соответствует точка $w = \varphi$ оси $\psi = 0$. Область изменения τ также есть верхняя полуплоскость.

Функция ω удовлетворяет уравнениям

$$\omega_{\bar{w}} - \mu^w(\omega)\,\omega_w = 0, \quad \mu^w = \frac{\rho^* - 1}{\rho^* + 1}, \tag{1}$$

$$\omega_{\bar{\tau}} - \mu^\tau\,[\omega(\tau),\ \omega(f(\tau))] = 0, \quad \mu^\tau = \frac{\rho^*\,[q^*(\tau)]\cdot q\,[f(\tau)] - 1}{\rho^*\,[q^*(\tau)]\cdot q\,[f(\tau)] + 1}, \tag{2}$$

где $f(\tau) \equiv f(s + i\psi) = s$, и краевым условиям

$$q^* = q^*(s), \ -\infty < s < 0; \ \theta = \theta(s), \ 0 < s < +\infty. \tag{3}$$

Разрешимость краевой задачи (2), (3) следует из теоремы 3, § 5, гл. 5 [2] и устанавливаемой ниже равномерной эллиптичности уравнения (2) на искомых решениях. Условие равномерной эллиптичности имеет вид

$$|\mu^{\tau}| < \mu_0 < 1. \tag{4}$$

В неизменно дозвуковых течениях выполняются условия

$$0 < a < \rho^* < b < \infty, \quad 0 < c < \sqrt{1 - M^2}. \tag{5}$$

Поэтому (4) будет следствием неравенства

$$K_1^{-1} < q < K_1. \tag{6}$$

Из условия (5) вытекает справедливость представления $q^* = f_1(q) \ln q$, $0 < a_1^{-1} < f_1(q) < a_2^{-1} < \infty$. Обозначая $\max|q^*|$ через H, получим, что $q_{\max} < \exp(a_1 H)$, $q_{\min} > \exp(-a_2 H)$. Таким образом, для доказательства (6) достаточно оценить H сверху, для чего мы применим (с некоторыми изменениями) метод Жербе [3].

Так как в силу (5) уравнение (1) равномерно эллиптично, то можно построить гомеоморфизм полуплоскости $\operatorname{Im} w \geqslant 0$ на себя решением уравнения $\zeta_{\bar{w}} - \mu^{w}\zeta_{w} = 0$ с нормировкой $\zeta(0) = 0$, $\zeta(\infty) = \infty$, где $\zeta = \xi + i\eta$, причем $|w(\zeta_1) - w(\zeta_2)| < M_1|\zeta_1 - \zeta_2|^{\alpha}$ при $|\zeta_1 - \zeta_2| < 1$, $|\zeta(w)| < M_2|w|$ при $|w| > 1$. Отобразим затем область $\operatorname{Im}\zeta \geqslant 0$ на полуплоскость функцией $\zeta' \equiv \xi' + i\eta' = \ln\zeta$. При этом луч $\xi > 0$ (образ L_z^1) перейдет в прямую $\eta' = 0$.

Действительная часть аналитической функции $\omega(\zeta')$ представляется при $\eta' = 0$ по формуле Вилля:

$$q^*(\xi') = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\theta(\xi') - \theta(u)}{\operatorname{sh}\frac{\pi}{2}(\xi' - u)}\, du + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q^*(u + i\pi)}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{2}(u - \xi')}\, du. \tag{7}$$

Последний член в (7) по абсолютной величине меньше, чем

$$\max_{L_z^2} |q^*| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{2}u} = \max_{L_z^2} |q^*|.$$

Для того, чтобы мажорировать первый интеграл в (7), разобьем прямую интегрирования на интервал $I_1 = [\xi' - \varepsilon, \xi' + \varepsilon]$ и дополнение I_2. Интеграл по I_2 мажорируется величиной

$$\max_{L_z^1} |\theta| \int_{\varepsilon/\pi}^{+\infty} \frac{du}{\operatorname{sh}\frac{\pi}{2}u} = \frac{2}{\pi}\max_{L_z^1}|\theta| \cdot \left|\ln \operatorname{th}\frac{\varepsilon}{4}\right|.$$

Займемся оценкой интеграла по I_1. Предположим, что на L_z^1

$$|\theta(s_1)-\theta(s_2)| < N|s_1-s_2|^{\beta}[\max(1,\ s_1,\ s_2)]^{-n}, \qquad (8)$$
$$0<\beta\leqslant 1,\ n\geqslant\alpha\beta.$$

Легко проверяется справедливость следующих неравенств:

$$\begin{gathered}|s_1-s_2|<|\varphi_1-\varphi_2|\,q_{\min}^{-1}<|\varphi_1-\varphi_2|\,e^{a_2H};\\ |\varphi_1-\varphi_2|<M_1|\xi_1-\xi_2|^{\alpha} \text{ при } |\xi_1-\xi_2|<1;\\ |\xi_1-\xi_2|<|\xi_1'-\xi_2'|\max(\xi_1,\ \xi_2);\\ \max(\xi_1,\ \xi_2)<M_2\max(\varphi_1,\ \varphi_2) \text{ при } \xi_1,\ \xi_2>1;\\ \max(\varphi_1,\ \varphi_2)<\max(1,\ s_1,\ s_2)\,q_{\max}<\max(1,\ s_1,\ s_2)\,e^{a_1H}.\end{gathered} \qquad (9)$$

Из (8), (9) вытекает оценка

$$|\theta(\xi_1')-\theta(\xi_2')|<K[\max(1,\ s_1,\ s_2)]^{\alpha\beta-n}e^{\beta H(a_2+\alpha a_1)}|\xi_1'-\xi_2'|^{\alpha\beta},$$

или, ввиду (8),

$$|\theta(\xi_1')-\theta(\xi_2')|<Ke^{\beta H(a_2+\alpha a_1)}|\xi_1'-\xi_2'|^{\alpha\beta}, \qquad (10)$$

где $K=NM_1M_2^{\alpha}$.

Учитывая (10), интеграл по I_1 можно мажорировать величиной

$$2Ke^{\beta H(a_2+\alpha a_1)}\frac{\varepsilon^{\alpha\beta}}{\alpha\beta\pi^{1+\alpha,\ \beta}}=K_1e^{\beta H(a_2+\alpha a_1)}\varepsilon^{\alpha\beta}.$$

Принимая во внимание (7) и полученные оценки, запишем неравенство

$$H\leqslant\max_{L_z^2}|q^*|+\frac{2}{\pi}\max_{L_z^1}|\theta|\cdot\left|\ln\operatorname{th}\frac{\varepsilon}{4}\right|+K_1e^{\beta H(a_2+\alpha a_1)}\varepsilon^{\alpha\beta}. \qquad (11)$$

Возьмем $\varepsilon=\exp\left[-\frac{H(a_2+\alpha a_1)}{\alpha}\right]$, $0<\varepsilon<1$. Тогда $\left|\ln\operatorname{th}\frac{\varepsilon}{4}\right|\leqslant$ $\leqslant|\ln\varepsilon|+\left|\ln\operatorname{th}\frac{1}{4}\right|$, и неравенство (11) дает

$$H\leqslant\max_{L_z^2}|q^*|+\frac{2}{\pi}\max_{L_z^1}|\theta|\cdot\left|\ln\operatorname{th}\frac{1}{4}\right|+K_1+\frac{2}{\pi}\max_{L_z^1}|\theta|\cdot H\frac{a_2+\alpha a_1}{\alpha}. \qquad (12)$$

Предположим выполненным условие

$$\max_{L_z^1}|\theta|<\frac{\pi}{2}\left[\frac{a_2+\alpha a_1}{\alpha}\right]^{-1}-\delta. \qquad (13)$$

Тогда из (12) получим окончательную оценку

$$H\leqslant\frac{\pi}{2\delta}\left[\max_{L_z^2}|q^*|+\frac{2}{\pi}\max_{L_z^2}|\theta|\cdot\left|\ln\operatorname{th}\frac{1}{4}\right|+K_1\right].$$

Таким образом, справедлива следующая

Теорема. *При выполнении условий* (8), (13) *исходная задача имеет хотя бы одно решение.*

Автор благодарен В. Н. Монахову, указавшему ему на работу Жербе.

ЛИТЕРАТУРА

[1]. Хайкин М. И. Теоремы существования для одного класса обратных смешанных краевых задач теории аналитических функций. Труды КАИ, вып. 64, 3—24, 1961.

[2]. Монахов В. Н. Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. Новосибирск, НГУ, 1969.

[3]. Жербе Р. Теория поверхностных волн. М., ИЛ, 218—309, 1959.