O. T. Izhboldin, Appendix on the group $K_2(F)/\bigcap_{L\geq 1} lK_2(F)$, *Algebra i Analiz*, 2001, Volume 13, Issue 3, 222–228

https://www.mathnet.ru/eng/aa945

Алгебра и анализ
Том 13 (2001), вып. 3

ПРИЛОЖЕНИЕ: О ГРУППЕ $K_2(F)/\bigcap_{L\geqslant 1} LK_2(F)$

© О. Т. Ижболдин

Мы строим поле F, которое содержит первообразный корень степени p, такое что p-кручение в $K_m(F)/\bigcap_{l\geqslant 1} lK_m(F)$ не порождается p-кручением в F^*. В доказательстве используется поле рациональных функций бесконечного произведения многообразий Севери–Брауэра, теорема Меркурьева–Суслина, теорема Суслина о кручении в $K_2(F)$ и теорема Кана.

§1. Введение

Обозначим через μ_m группу корней степени m. Для абелевой группы A обозначим ее m-кручение через $\operatorname{Tors}_m A$ и ее кручение через $\operatorname{Tors} A$.

Зафиксируем простое p. Везде ниже F является полем характеристики, отличной от p. В случае $p = 2$ мы предполагаем, что $\sqrt{-1} \in F$. Пусть ζ_{p^i} — первообразный корень степени p^i и $F_i = F(\zeta_{p^i})$, $F_\infty = \bigcup F_i$. Положим $s(F) = \sup\{n : F_n = F\}$.

1.1. Определение. Положим

$$DK_n(F) = \bigcap_{l\geqslant 1} lK_n(F), \quad D_pK_n(F) = \bigcap_i p^iK_n(F), \quad K_n^t(F) = K_n(F)/DK_n(F).$$

Зададим естественный вопрос: в каких случаях кручение в $K_n^t(F)$ является „стандартным“? Другими словами, *в каких случаях условие* $\zeta_{p^n} \in F^*$ *влечет* $\operatorname{Tors}_{p^n} K_n^t(F) = \{\zeta_{p^n}\} \cdot K_{n-1}^t(F)$?

§4 статьи И. Фесенко содержит описание группы $K_m^t(F) = K_m^{\mathrm{top}}(F)$ для многомерных локальных полей; и там показано, что для многомерных локальных полей с конечным полем вычетов кручение в $K_n^t(F)$ является стандартным.

Главная цель данного приложения — построить поле, у которого кручение в $K_n^t(F)$ не является стандартным.

Мы докажем следующую теорему.

Ключевые слова: теорема Меркурьева–Суслина, многообразия Севери–Брауэра, поле расщепления.

1.2. Теорема. *Пусть p — простое число. Существует поле F характеристики, отличной от p, такое, что $\zeta_p \in F$ и $\operatorname{Tors}_p K_2^t(F) \neq \{\zeta_p, F^*\}$.*

Доказательство содержится в п. 3.4, а сейчас мы выведем несколько следствий.

Следствие 1. *Пусть $m \geqslant 2$. Существует поле F, такое что $\zeta_p \in F$ и $\operatorname{Tors}_p K_m^t(F) \neq \{\zeta_p\} K_{m-1}^t(F)$.*

Доказательство. Пусть F_0 поле, поставляемое теоремой. Пусть $u_0 \in \operatorname{Tors}_p K_2^t(F_0)$ таков, что $u_0 \notin \{\zeta_p, F^*\}$. Положим $F = F_0(t_1, \ldots, t_{m-2})$ и $u = u_0 \cdot \{t_1, \ldots, t_{m-2}\}$. Тогда $u \in \operatorname{Tors}_p K_m^t(F)$ и $u \notin \{\zeta_p\} \cdot K_{m-1}^t(F)$. Значит, $\operatorname{Tors}_p K_m^t(F) \neq \{\zeta_p\} K_{m-1}^t(F)$. •

Следствие 2. *Для каждого $m \geqslant 2$ существует циклическое расширение L/F степени p с группой Галуа $\operatorname{Gal}(L/F) = \{1, \sigma, \ldots, \sigma^{p-1}\}$, такое что последовательность*

$$K_m^t(L) \xrightarrow{1-\sigma} K_m^t(L) \xrightarrow{N_{L/F}} K_m^t(F)$$

не является точной.

Доказательство. Предположим, что последовательность является точной для всех циклических расширений L/F. Рассуждения в [3, лемма 10.4] показывают, что $\operatorname{Tors}_p K_m^t(F) = \{\zeta_p\} K_{m-1}^t(F)$ для всех полей F, содержащих ζ_p. Это противоречит следствию 1. •

В следующем пункте мы рассмотрим понятия общего многообразия и поля расщепления.

§2. Общие поля расщепления для элементов группы $K_2(F)/p^n$

2.1. Обозначим через h_i гомоморфизм

$$h_i : K_2(F) \to \operatorname{Tors}_{p^i} \operatorname{Br}(F_i), \quad \{a, b\} \mapsto (a, b)_{\zeta_{p^i}}.$$

В дальнейшем мы будем использовать

Предложение. *Ядро h_i равно $p^i K_2(F)$.*

Доказательство. Благодаря теореме Меркурьева–Суслина [3] инъективность

$$K_2(F)/p^i \to \operatorname{Tors}_{p^i} \operatorname{Br}(F_i)$$

эквивалентна инъективности $H^2(F, \mu_{p^i}^{\otimes 2}) \to H^2(F(\mu_{p^i}), \mu_{p^i}^{\otimes 2})$. Последняя инъективность следует из теоремы Кана [2, т. 1(1)]. •

Лемма. *Пусть $u \in K_2(F)$ и пусть $j \geqslant i \geqslant 1$. Тогда $(h_i(u))_{F_j} = p^{j-i}h_j(u)$. Более того, если $j \geqslant i \geqslant s(F)$, то $N_{F_j/F_i}(h_j(u)) = h_i(u)$.*

2.2. Определение. Пусть $u \in K_2(F)$ и пусть n — положительное целое. Говорят, что многообразие X является (u,n)-общим, если выполняются следующие условия:

(1) X — однородное многообразие;
(2) для расширения полей E/F следующие условия эквивалентны:
(а) $u_E \in p^n K_2(E)$,
(б) многообразие X_E рационально.

Замечание. Так как X — однородное многообразие, свойство X_E быть рациональным эквивалентно существованию рациональных точек на E-многообразии X_E.

Лемма. *Пусть $u \in K_2(F)$ — и пусть n — положительное целое. Тогда*

(1) *Если X — (u,n)-общее, то $u_{F(X)} \in p^n K_2(F(X))$.*
(2) *Если X — (u,n)-общее и L/F — расширение полей, то X_L — (u_L,n)-общее.*
(3) *Предположим, что X_1 и X_2 — (u,n)-общие. Тогда расширение $F(X_1)/F$ стабильно эквивалентно расширению $F(X_2)/F$.*

Доказательство. (1) $X_{F(X)}$ имеет рациональную точку, и, следовательно, условие (б) в определении выполняется для поля $E = F(X)$. Следовательно, условие (а) выполняется.

(2) Очевидно.

(3) Ввиду (1) и определений многообразия $(X_2)_{F(X_1)}$ и $(X_1)_{F(X_2)}$ рациональны. Следовательно, расширения $F(X_1 \times X_2)/F(X_1)$ и $F(X_1 \times X_2)/F(X_1)$ чисто трансцендентны. Значит, расширение $F(X_1)/F$ стабильно эквивалентно расширению $F(X_2)/F$. •

2.3. Следующий пример доказывает существование (u,n)-общих многообразий (напомним, что в случае $p = 2$ мы предполагаем, что $\sqrt{-1} \in F^*$; если $p = 2$ и $\sqrt{-1} \notin F^*$, существование (u,n)-общих многообразий неизвестно).

Пример. Пусть $u \in K_2(F)$ и пусть A — центральная простая F_n-алгебра, такая что $[A] = h(u_{F_n}) \in \mathrm{Tors}_{p^n} \mathrm{Br}(F_n)$. Пусть S — многообразие Севери–Брауэра алгебры A [3]. Тогда многообразие $R_{F_n/F}(S)$ является (u,n)-общим.

Доказательство. Пусть E/F — расширение полей. Так как F_n/F является расширением Галуа, существует изоморфизм F-алгебр $E \otimes_F F_n \simeq \prod E_n$. Из свойств ограничения по Вейлю следует, что

$$\begin{aligned}&\mathrm{mor}_F(\mathrm{Spec}(E),\, R_{F_n/F}(S)) = \mathrm{mor}_{F_n}(\mathrm{Spec}(E\otimes_F F_n), S)\\ &= \mathrm{mor}_{F_n}(\sqcup \mathrm{Spec}(E_n), S) = \sqcup\, \mathrm{mor}_{F_n}(\mathrm{Spec}(E_n), S).\end{aligned}$$

Значит, многообразие $(R_{R_n/F}(S))_E$ имеет рациональную точку тогда и только тогда, когда S_{E_n} имеет рациональную точку. Так как S_{E_n} является многообразием Севери–Брауэра для $A_{A_{E_n}}$, многообразие S_{E_n} имеет рациональную точку тогда и только тогда, когда алгебра A_{E_n} расщепляется. Ввиду предложения 2.1 это эквивалентно $u_E \in p^n K_2(E)$. •

Предложение 2.4. *Пусть $u \in K_2(F)$ и пусть X является (u,n)-общим многообразием. Тогда группа* $\mathrm{Br}(F(X)/F)$ *порождается элементом $h_r(u)$, где* $r = \min(n, s(F))$.

Доказательство. Пусть A — F_n-алгебра, соответствующая элементу $h_n(u) \in \mathrm{Tors}_{p^n}\mathrm{Br}(F_n)$. Учитывая лемму в 2.2 и пример в 2.3, мы можем предположить, что $X = R_{F_n/F}(S)$, где S — многообразие Севери–Брауэра алгебры A. Хорошо известно, что группа $\mathrm{Br}(F(X)/F)$ порождается $N_{F_n/F}([A])$ [3]. Следовательно, $\mathrm{Br}(F(X)/F)$ порождается $N_{F_n/F}(h_n(u))$. Если $n \leqslant s(F)$, мы получаем $F_n = F$, $r = \min(n, s(F)) = n$ и

$$N_{F_n/F}(h_n(u)) = h_n(u) = h_r(u).$$

Если $n > s = s(F)$, то $r = \min(n,s) = s$ и $N_{F_n/F}(h_n(u)) = N_{F_n/F_r}(h_n(u)) = h_r(u)$. •

Следствие 1. *Пусть $u \in K_2(F)$ и пусть X — (u,n)-общее многообразие. Тогда для каждого $m \geqslant n$ ядро гомоморфизма $K_2(F)/p^m \to K_2(F(X))/p^m$ порождается $p^{m-n}u$.*

Доказательство. Элемент $p^{m-n}u$ лежит в ядре. Согласно предыдущему предложению, группа $\mathrm{Br}(F_m(X)/F_m)$ порождается $h_r(u)$, где $r = \min(n, s(F_m))$. Так как $m \geqslant n$, мы имеем $r = n$. Значит, $h_r(u) = h_n(u) = h_m(p^{n-m}u)$. Так как h_m инъективен, доказательство закончено. •

Следствие 2. *Пусть $u \in K_2(F)$ и пусть X — (u,n)-общее многообразие. Тогда для любого m, удовлетворяющего условию $s(F) \leqslant m \leqslant n$, ядро гомоморфизма $K_2(F)/p^m \to K_2(F(X))/p^m$ порождается элементом u.*

Доказательство. Элемент u лежит в ядре. Так как $s(F) \leqslant m \leqslant n$, имеем $r = m$. Значит, $h_r(u) = h_m(u)$. Так как h_m инъективен, доказательство закончено. •

§3. О группе $K_2(F)/\bigcap_{l\geqslant 1} lK_2(F)$

Вернемся к теореме 1.2.

3.1. Лемма. *Пусть A — абелева группа, для которой гомоморфизм*

$$A/p^nA \to p^mA/p^{n+m}A, \quad \overline{a} \mapsto \overline{p^m a}$$

биективен для всех n, m. Тогда группа $D_p(A) = \bigcap_n p^nA$ является p-делимой и фактор-группа $A/D_p(A)$ не имеет нетривиального кручения.

3.2. Лемма. *Предположим, что $s(F) = \infty$. Тогда*

(1) *группа $D_p(F)$ является p-делимой;*
(2) *фактор-группа $K_2(F)/D_pK_2(F)$ не имеет нетривиального p-кручения;*
(3) *для любого конечно порожденного расширения L/F гомоморфизм*

$$\alpha : K_2(F)/D_pK_2(F) \to K_2(L)/D_pK_2(L)$$

инъективен.

Доказательство. (1), (2) вытекают из леммы 3.1 и следующего утверждения. Пусть E — поле и $\zeta_{p^n} \in E$. Тогда для любого $m \leqslant n$ гомоморфизм

$$K_2(E)/p^mK_2(E) \to p^{n-m}K_2(E)/p^nK_2(E), \quad \overline{u} \mapsto \overline{p^{n-m}u}$$

является изоморфизмом.

Для проверки утверждения пусть $u \in K_2(E)$ таков, что p^{n-m} делим на p^n. Нам нужно показать, что u делится на p^m. По предположению существует $w \in K_2(E)$ такой, что $p^{n-m}u = p^nw$. Следовательно, $p^{n-m}(u - p^mw) = 0$. Значит, $u \in \operatorname{Tors}_{p^{n-m}} K_2(E) + p^mw$. Так как $\operatorname{Tors}_{p^{n-m}} K_2(E) = \{\zeta_{p^{n-m}}, E^*\} = p^m\{\zeta_{p^n}, E^*\} \subset p^mK_2(E)$ (первое равенство — результат Суслина [4]), мы получаем, что $u \in p^mK_2(E)$.

(3) Достаточно рассмотреть два случая: $L = F(t)$ — чисто трансцендентное расширение и L/F — конечное расширение. Случай $L = F(t)$ очевиден (можно использовать специализацию). Если L/F — конечное расширение, то композиция

$$K_2(F) \to K_2(L) \xrightarrow{N_{L/F}} K_2(F)$$

совпадает с умножением на $|L : F|$. Следовательно, ядро α лежит в группе кручения группы $K_2(F)/D_p(F)$. Остается напомнить, что $K_2(F)/D_p(F)$ не имеет нетривиального кручения. •

Следствие. *Пусть $u \in K_2(F)$ таков, что $u_{F_\infty} \notin D_pK_2(F_\infty)$, и пусть L/F — конечно-порожденное расширение. Тогда $u_{LF_\infty} \notin D_pK_2(LF_\infty)$.*

3.3. Пусть X_i, $(i = 1, 2, \ldots)$ — бесконечный набор гладких F-многообразий. Обозначим через $X_{\leqslant n}$ многообразие $X_1 \times \cdots \times X_n$. Обозначим через $X_{\leqslant\infty}$ бесконечное произведение

$$\prod_i X_i = X_1 \times \cdots \times X_i \cdots$$

Другими слвами, $X_{\leqslant\infty}$ является индуктивным пределом многообразий $X_{\leqslant n}$ (конечно, $X_{\leqslant\infty}$ не является многообразием, за исключением случая $\sum \dim X_i < \infty$).

Таким образом, $F(X_{\leqslant\infty})$ совпадает с пределом полей $F(X_{\leqslant n})$. Через $X_{>n}$ обозначим произведение

$$\prod_{i>n} X_i = X_{n+1} \times X_{n+2} \times \cdots$$

Тогда $X_{\leqslant\infty} = X_{\leqslant n} \times X_{>n}$.

Предложение. *Предположим, что $s = s(F) \neq \infty$. Пусть $u \in K_2(F)$ таков, что $u_{F_\infty} \notin D_pK_2(F_\infty)$. Тогда существует расширение полей E/F такое, что $pu_E \in D_pK_2(E)$ и $u_E \notin D_pK_2(E) + \operatorname{Tors} K_2(E)$.*

Доказательство. Пусть X_i — (pu, i)-общее многообразие $(i \geqslant 1)$. Положим $E = F(X_{\leqslant\infty})$. Определение X_i и лемма 2.2 показывают, что $pu_{F(X_i)} \in p^iK_2(F(X_i))$. Значит, $pu_E \in p^iK_2(E)$ для всех $i \geqslant 1$. Следовательно, $pu_E \in D_pK_2(E)$. Теперь мы проверим, что $u_E \notin D_pK_2(E) + \operatorname{Tors} K_2(E)$.

Предположим, что $u_E \in D_pK_2(E) + \operatorname{Tors} K_2(E)$. Пусть $u_E = \mu + \gamma$ таков, что $\mu \in D_pK_2(E)$ и $\gamma \in \operatorname{Tors} K_2(E)$. Обозначим через r порядок элемента γ. Ввиду [1] r взаимно-просто с $\operatorname{char}(F)$. Добавляя ко всем полям ζ_r, мы можем предположить, что $\zeta_r \in F^*$. Тогда элемент γ равен $\{\zeta_r, z\}$ для некоторого $z \in E^*$. Поэтому $\gamma_{E(\sqrt[r]{z})} = \{\zeta_r, z\}_{E(\sqrt[r]{z})} = 0$. Следовательно, $u_{E(\sqrt[r]{z})} = \mu_{E(\sqrt[r]{z})} \in D_pK_2(E(\sqrt[r]{z}))$.

Пусть n таково, что $z \in F(X_{\leqslant n})$, и пусть $K = F(X_{\leqslant n})(\sqrt[r]{z})$. Тогда $E(\sqrt[r]{z}) = F(X_{\leqslant n} \times X_{>n})(\sqrt[r]{z}) = K(X_{>n})$. Следовательно, $u_{K(X>n)} \in D_pK_2(K(X_{>n}))$.

Ввиду следствия 3.2 получаем $u_{KF_\infty} \notin D_PK_2(KF_\infty)$. Пусть m — произвольный элемент, удовлетворяющий двум условиям: $m \geqslant s(F)$ и $u_{KF_\infty} \notin p^mK_2(KF_\infty)$. Добавляя элемент ζ_{p^m} ко всем полям, мы можем предположить, что $m = s(F)$ и $u_K \notin p^mK_2(K)$.

Имеем $u_{K(X_{>n})} \in D_pK_2(K(X_{>n})) \subset p^mK_2(K(X_{>n}))$. Из $u_K \notin p^mK_2(K)$ выводим, что существует k такое, что $u_{K(X_{n+1}\times\cdots\times X_k)}$ делится на p^m. Однако

$u_{K(X_{n+1}\times\cdots\times X_{k-1})}$ не делится на p^m. Положим $\widetilde{K} = K(X_{n+1} \times \cdots \times X_{k-1})$. Тогда $u_{\widetilde{K}} \notin p^m K_2(\widetilde{K})$, $u_{\widetilde{K}(X_k)} \in p^m K_2(\widetilde{K}(X_k))$. Так как $(X_k)_{\widetilde{K}}$ является $(pu_{\widetilde{K}}, k)$-общим, следствия 1 и 2 в 2.4 показывают, что $u_{\widetilde{K}}$ делим на $pu_{\widetilde{K}}$ в группе $K_2(\widetilde{K})/p^m$. Следовательно, существует целое r, для которого $(u - rpu)_{\widetilde{K}} \in p^m K_2(\widetilde{K})$. Так как $1 - rp$ обратим по модулю p^m, получаем $u_{\widetilde{K}} \in p^m K_2(\widetilde{K})$, противоречие. •

3.4. Доказательство теоремы 1.2. Пусть поле F содержит элемент $a \in F^*$ и

(1) $1 \leqslant s(F) < \infty$,

(2) $a \notin F_\infty^{*p}$,

(3) $a \in F^{*m}$ для всех целых m взаимно-простых с p.

Построить такие поля нетрудно. Например,

$$F = \mathbb{Q}(\zeta_p)(x)(\{\sqrt[m]{x} : m \text{ пробегает все целые взаимно простые с } p\}), \qquad a = x.$$

Другой пример: $G = \mathbb{Q}_p(\zeta_p)$, $a = 1 + p(1 - \zeta_p)$ (условие $a \notin F_\infty^{*p}$ выполняется, так как $F(\sqrt[p]{a})/F$ неразветвлено и F_n/F вполне разветвлено для любого n).

Теперь положим $\widetilde{F} = F(t)$, и пусть $u = \{a, t\} \in K_2(\widetilde{F})$. Тогда $u_{\widetilde{F}_\infty} \notin pK_2(\widetilde{K}_\infty)$. В самом деле, в противном случае $a = \partial_t(\{a, t\}) \in F_\infty^{*p}$, что невозможно. Таким образом, все условия предложения 3.3 выполняются для поля $\widetilde{F}$ и элемента u. Пусть $E/\widetilde{F}$ — расширение полей, как в предложении 3.3. Тогда $pu_E \in D_p K_2(E)$. Следовательно, $pu_E \in mK_2(E)$ для всех m, являющихся степенями p. Если m не делится на p, получаем $u_E = \{a, t\} \in \{F^{*m}, t\} \subset mK_2(E)$. Следовательно, $pu_E \in mK_2(E)$ для всех m. Значит, $pu_E \in DK_2(E)$ и, следовательно, $u_E \in \operatorname{Tors}_p K_2^t(E)$. Предположим, что в группе $K_2^t(E)$ выполнялось бы $u = \{\zeta_p, z\}$. Тогда в группе $K_2(E)$ мы бы имели $u \in \{\zeta_p, z\} + DK_2(E) \subset \operatorname{Tors} K_2(E) + D_p K_2(E)$, что противоречит условиям на E в предложении 3.3. •

Список литературы

[1] Izhboldin O., *On p-torsion in K_*^M for fields of characteristic p*, Algebraic K-Theory, Adv. Soviet Math., vol. 4, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991, pp. 129–144.

[2] Kahn B., *Deux théorèmes de comparaison en cohomologie étale: applications*, Duke Math. J. **69** (1993), 137–165.

[3] Меркурьев А. С., Суслин А. А., *К-когомологии многообразий Севери–Брауэра и гомоморфизм норменного вычета*, Изв. АН СССР. Сер. мат. **46** (1982), 1011–1046.

[4] Suslin A. A., *Torsion in K_2 of fields*, K-Theory **1** (1987), 5–29.

Поступило 27 декабря 2000 г.