



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

V. R. Kiyatkin, Inference rules with metavariables, and logical equations in the
pretabular modal logic PM1,
Sibirsk. Mat. Zh., 2000, Volume 41, Number 1, 88–97

<https://www.mathnet.ru/eng/smj1519>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms
of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.91

May 18, 2025, 01:58:08



УДК 510.6

ПРАВИЛА ВЫВОДА С МЕТАПЕРЕМЕННЫМИ
 И ЛОГИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ
 В ПРЕДТАБЛИЧНОЙ МОДАЛЬНОЙ ЛОГИКЕ PM1

В. Р. Кияткин

Аннотация: Проблема разрешимости логических уравнений для некоторой логики λ вызывает интерес по крайней мере по двум причинам. Во-первых, с ней тесно связана проблема выводимости в логике λ , во-вторых, она сводится к проблеме разрешимости логики λ по допустимости для правил вывода с параметрами. Распознаваемость разрешимости логических уравнений впервые была установлена В. В. Рыбаковым для модальной логики $S4$, интуиционистской логики Int , для модальных логик S и GL , аксиоматизирующих доказуемость и других. Распознаваемость разрешимости логических уравнений с метапеременными в табличных и предтабличных локально конечных модальных логиках $PM2$ – $PM5$, расширяющих логику $S4$, установлена автором. Настоящая работа положительно решает проблему распознаваемости для предтабличной модальной логики $PM1$. Библиогр. 3.

Модальная пропозициональная формула \mathcal{F} от x_1, \dots, x_n считается истинной на топовбулевой алгебре A (обозначение $A \models \mathcal{F}(x_1, \dots, x_n)$), если на ней истинно тождество $\forall x_1, \dots, \forall x_n (\mathcal{F}(x_1, \dots, x_n) = 1)$. Множество формул $\lambda(A) = \{\mathcal{F} \mid A \models \mathcal{F}\}$ называется *логикой алгебры* A . Хорошо известно, что для любой модальной логики $\lambda \supseteq S4$ существует топовбулева алгебра B такая, что $\lambda = \lambda(B)$. Эта алгебра порождает многообразие топовбулевых алгебр $\text{var}(B)$, соответствующее логике λ (обозначение $\text{var}(\lambda)$). Логику λ называют *табличной*, если существует конечная алгебра A такая, что $\lambda = \lambda(A)$, и *нетабличной* в противном случае. Собственно пропозициональные переменные будем отличать от переменных x_i для формул, называя их метапеременными или параметрами p_j . Когда же это различие несущественно, то те и другие переменные будем обозначать через y_l . Правило с метапеременными

$$\frac{\mathcal{A}_1(x_1, \dots, x_k, p_1, \dots, p_m), \dots, \mathcal{A}_n(x_1, \dots, x_k, p_1, \dots, p_m)}{\mathcal{B}(x_1, \dots, x_k, p_1, \dots, p_m)} \quad (1)$$

(обозначение $\mathcal{A}_1(\bar{x}, \bar{p}), \dots, \mathcal{A}_n(\bar{x}, \bar{p})/\mathcal{B}(\bar{x}, \bar{p})$, где $\bar{x} = (x_1, \dots, x_k)$ и $\bar{p} = (p_1, \dots, p_m)$) называется *допустимым в логике* λ , если для любых формул $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_k$ из того, что $\mathcal{A}_i(\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_k, p_1, \dots, p_m) \in \lambda$ для всех $1 \leq i \leq n$ следует $\mathcal{B}(\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_k, p_1, \dots, p_m) \in \lambda$. Правило (1) эквивалентно однопосылочному правилу вида $\mathcal{A}(\bar{x}, \bar{p})/\mathcal{B}(\bar{x}, \bar{p})$, поскольку $\alpha \in \lambda$ и $\beta \in \lambda \Leftrightarrow \alpha \wedge \beta \in \lambda$. *Логическим уравнением* называют любую формулу вида $\mathcal{A}(x_1, \dots, x_k, p_1, \dots, p_m)$ (обозначение $\mathcal{A}(\bar{x}, \bar{p})$). Всякий набор формул $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_k$, удовлетворяющий условию $\mathcal{A}(\bar{\mathcal{C}}, \bar{p}) \in \lambda$, где $\bar{\mathcal{C}} = (\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_k)$, называется *решением* этого уравнения в логике λ . Если все переменные формулы \mathcal{A} являются параметрами, то проблема разрешимости уравнения \mathcal{A} в логике λ — это проблема выводимости данной формулы в λ .

Теорема 1 [1]. Логическое уравнение $\mathcal{A}(\bar{x}, \bar{p})$ разрешимо в логике λ тогда и только тогда, когда в ней недопустимо правило с метапеременными $\mathcal{A}(\bar{x}, \bar{p})/\perp$.

Таким образом, проблема логических уравнений, по существу, сводится к распознаванию допустимости правил вывода с метапеременными.

Шкалой $\langle W, R \rangle$ называется непустое множество W с заданным на нем бинарным отношением R . Шкала $\langle W_1, R_1 \rangle$ называется *открытой подшкалой шкалы* $\langle W_2, R_2 \rangle$, если $W_1 \subseteq W_2$, $R_2 \cap W_1^2 = R_1$ и $\forall a \in W_1, \forall b \in W_2 (aR_2b \Rightarrow b \in W_1)$. Множество всех элементов шкалы $\langle W, R \rangle$, достижимых из фиксированного элемента $a \in W$, т. е. $\{b \in W \mid \langle a, b \rangle \in R\}$, назовем *верхним конусом элемента* a (обозначение $\nabla(a)$). Множество всех элементов шкалы $\langle W, R \rangle$, из которых достижим фиксированный элемент $a \in W$, т. е. $\{c \in W \mid \langle c, a \rangle \in R\}$, назовем *нижним конусом элемента* a (обозначение $\Delta(a)$). Множество $\{b \in \Delta(a) \mid b \neq a, \forall c (\langle b, c \rangle \in R \Rightarrow (c = a) \vee (c = b))\}$ назовем *множеством непосредственных предшественников элемента* a (обозначение $\Lambda(a)$). Отображение φ шкалы $\langle W_1, R_1 \rangle$ в шкалу $\langle W_2, R_2 \rangle$ называется *p-морфизмом* если

- (i) $(\forall a, b \in W_1)(aR_1b \Rightarrow \varphi(a)R_2\varphi(b))$,
- (ii) $(\forall a, b \in W_1)(\varphi(a)R_2\varphi(b) \Rightarrow (\exists c \in W_1)(aR_1c \& (\varphi(c) = \varphi(b)))$.

Всякое подмножество элементов из W , не связанных друг с другом отношением R , называется *антицепью шкалы* $\langle W, R \rangle$. *Моделью* называют тройку $\langle W, R, V \rangle$, где $\langle W, R \rangle$ — шкала, а V — функция означивания переменных и метапеременных: $D \xrightarrow{V} 2^W$, где $D = \text{Dom}(V) = \{y_1, y_2, \dots\}$ — область определения функции V . Стандартным образом функция V распространяется на произвольные формулы:

$$V(\neg \mathcal{A}) = W \setminus V(\mathcal{A}), \quad V(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) = V(\mathcal{A}) \cap V(\mathcal{B}),$$

$$V(\Box \mathcal{A}) = \{a \mid \forall b (\langle a, b \rangle \in R \Rightarrow (b \in V(\mathcal{A})))\}.$$

Модель $\langle W_1, R_1, V_1 \rangle$ называется *открытой подмоделью модели* $\langle W_2, R_2, V_2 \rangle$, если

- (i) $\langle W_1, R_1 \rangle$ — открытая подшкала шкалы $\langle W_2, R_2 \rangle$,
- (ii) $\text{Dom}(V_1) = \text{Dom}(V_2)$ и $\forall y \in \text{Dom}(V_1)(V_1(y) = V_2(y) \cap W_1)$.

Истинность формулы на элементе a модели $\langle W, R, V \rangle$ определяется индуктивно:

$$a \Vdash_V y \Leftrightarrow a \in V(y), \quad y \in \text{Dom}(V),$$

$$a \Vdash_V \neg \mathcal{A} \Leftrightarrow a \not\Vdash_V \mathcal{A} \Leftrightarrow a \notin V(\mathcal{A}),$$

$$a \Vdash_V (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \Leftrightarrow (a \Vdash_V \mathcal{A}) \wedge (a \Vdash_V \mathcal{B}) \Leftrightarrow a \in V(\mathcal{A}) \cap V(\mathcal{B}),$$

$$a \Vdash_V \Box \mathcal{A} \Leftrightarrow \forall b (\langle a, b \rangle \in R \Rightarrow (b \Vdash_V \mathcal{A})) \Leftrightarrow a \in V(\Box \mathcal{A}).$$

Множество $V(a) = \{y_i \mid y_i \in \text{Dom}(V), a \Vdash_V y_i\}$ будем называть *означиванием элемента* a в модели $\langle W, R, V \rangle$. Формула \mathcal{A} истинна в модели тогда и только тогда, когда $\forall a \in W (a \Vdash_V \mathcal{A})$ (обозначение $\langle W, R, V \rangle \Vdash \mathcal{A}$). Формула \mathcal{A} истинна на шкале тогда и только тогда, когда $\forall V (\langle W, R, V \rangle \Vdash_V \mathcal{A})$ (обозначение $\langle W, R \rangle \Vdash_V \mathcal{A}$). Отображение φ называется *p-морфизмом модели* $\langle W_1, R_1, V_1 \rangle$ в модель $\langle W_2, R_2, V_2 \rangle$, если

- (i) φ является p-морфизмом шкалы $\langle W_1, R_1 \rangle$ в шкалу $\langle W_2, R_2 \rangle$,
- (ii) $\text{Dom}(V_1) = \text{Dom}(V_2)$,
- (iii) $\forall y \in \text{Dom}(V_1), \forall a \in W_1 (a \Vdash_{V_1} y \Leftrightarrow \varphi(a) \Vdash_{V_2} y)$.

Теорема 2 [2]. Пусть отображение φ есть p -морфизм модели $\langle W_1, R_1, V_1 \rangle$ на модель $\langle W_2, R_2, V_2 \rangle$. Тогда для любой формулы \mathcal{F} от пропозициональных переменных и метапеременных из $\text{Dom}(V_1)$

$$\forall a \in W_1 (a \Vdash_{V_1} \mathcal{F} \Leftrightarrow \varphi(a) \Vdash_{V_2} \mathcal{F}).$$

Правило с метапеременными $r = \mathcal{A}(\bar{x}, \bar{p}) / \mathcal{B}(\bar{x}, \bar{p})$, где $\bar{x} = (x_1, \dots, x_k)$ и $\bar{p} = (p_1, \dots, p_m)$, истинно в модели $\langle W, R, V \rangle$ (обозначение $\langle W, R, V \rangle \Vdash r$) тогда и только тогда, когда для любого означивания V' такого, что $V'(p_j) = V(p_j)$, $1 \leq j \leq m$, из $\langle W, R, V' \rangle \Vdash \mathcal{A}(\bar{x}, \bar{p})$ следует $\langle W, R, V' \rangle \Vdash \mathcal{B}(\bar{x}, \bar{p})$. Модель $\langle W_n, R_n, V_n \rangle$ называется n -характеристической для логики λ , если для любой формулы $\mathcal{A} = \mathcal{A}(y_1, \dots, y_n)$ от n переменных из $\text{Dom}(V_n)$

$$\mathcal{A} \in \lambda \Leftrightarrow \langle W_n, R_n, V_n \rangle \Vdash \mathcal{A}.$$

Элемент a модели $\langle W_n, R_n, V_n \rangle$ называют *формульным*, если найдется формула \mathcal{F}_a от n переменных из $\text{Dom}(V_n)$ такая, что $\forall b \in W_n ((b \Vdash_{V_n} \mathcal{F}_a \Leftrightarrow (b = a))$. Означивание V называют *формульным в модели* $\langle W_n, R_n, V_n \rangle$, если для любого $y \in \text{Dom}(V)$ существует формула \mathcal{F}_y от n переменных из $\text{Dom}(V_n)$ такая, что $V(y) = V_n(\mathcal{F}_y)$. Пусть C — конечная или бесконечная цепь с максимальным элементом. Максимальный элемент цепи $C = C_1$ назовем *элементом глубины 1*, если a — элемент глубины $d-1$, то максимальный элемент b цепи $C_d = C_{d-1} \setminus \{a\}$ назовем *элементом глубины d* . Известен следующий критерий допустимости для правил вывода с метапеременными.

Теорема 3 [2]. Правило с метапеременными $r = \mathcal{A}(\bar{x}, \bar{p}) / \mathcal{B}(\bar{x}, \bar{p})$, где $\bar{x} = (x_1, \dots, x_k)$ и $\bar{p} = (p_1, \dots, p_m)$, допустимо в логике λ тогда и только тогда, когда правило r истинно в модели $\langle W_n, R_n, V \rangle$ для любой n -характеристической модели $\langle W_n, R_n, V_n \rangle$ логики λ , для любого $n \geq m$ и любого формульного означивания V такого, что $\text{Dom}(V) = \{x_1, \dots, x_k\} \cup \{p_1, \dots, p_m\}$, $V(p_j) = V_n(p_j)$, $1 \leq j \leq m$.

Логик, максимальные в классе нетабличных, называются *предтабличными*. Существует в точности пять (PM1–PM5) предтабличных расширений модальной логики S4 [3]. В частности, модальная логика PM1 = $\{\mathcal{F} \mid \forall \ell = 0, 1, \dots (A_\ell \Vdash \mathcal{F})\}$, где $A_\ell = \{\langle a_{(\ell, k)} \mid 0 \leq k \leq \ell + 1 \rangle, R_\ell\}$ — рефлексивная и транзитивная шкала и $\langle a_{(\ell, k+1)}, a_{(\ell, k)} \rangle \in R_\ell$ (т. е. A_ℓ — цепь длины $\ell + 2$).

Теорема 4 [2]. Следующая модель является n -характеристической для модальной логики PM1:

$$\begin{aligned} T(n) &= \langle \{a_{\xi_1, \dots, \xi_d} \mid 1 \leq d < \infty, \xi_i \subseteq \Omega, \xi_j \neq \xi_{j+1}, 1 \leq j \leq d-1\}, R_n, V_n \rangle, \\ \Omega &= \{y_1, \dots, y_n\}, \quad \Omega = \text{Dom}(V_n), \\ \langle a_{\xi_1, \dots, \xi_s}, a_{\zeta_1, \dots, \zeta_t} \rangle &\in R_n \Leftrightarrow \forall k (1 \leq k \leq t \Rightarrow (\xi_k = \zeta_k) \wedge (s \geq t+1)), \\ V_n(y_i) &= \{a_{\xi_1, \dots, \xi_d} \mid y_i \in \xi_d\}. \end{aligned}$$

Любой элемент этой модели формульный.

Модель $T(n)$ есть прямое объединение 2^n подмоделей — компонент. Все элементы модели $T(n)$ индексируются с помощью всевозможных различных подмножеств ξ_1, \dots, ξ_{2^n} множества Ω , пронумерованных каким-нибудь способом. Элемент a_{ξ_i} считаем максимальным в своей компоненте B_i , $1 \leq i \leq 2^n$. Его глубина d равна 1. Полагаем, что $a_{\xi_i} \Vdash_{V_n} y_s$ тогда и только тогда, когда $y_s \in \xi_i$, т. е. $\xi_i = V(a_{\xi_i})$ — означивание элемента a_{ξ_i} в модели $T(n)$. Для

каждого элемента a_{ξ_i} в качестве множества $\Lambda(a_{\xi_i})$ его непосредственных предшественников берем антицепь элементов $a_{\xi_i, \xi_1}, \dots, a_{\xi_i, \xi_{i-1}}, a_{\xi_i, \xi_{i+1}}, \dots, a_{\xi_i, \xi_{2^n}}$. В компоненте B_i они образуют множество элементов глубины $d = 2$. Полагаем, что $a_{\xi_i, \xi_j} \Vdash_{V_n} y_s$ тогда и только тогда, когда $y_s \in \xi_j$, т. е. $\xi_j = V(a_{\xi_i, \xi_j})$ будет означиванием элемента a_{ξ_i, ξ_j} , $1 \leq j \leq 2^n$ и $j \neq i$. Затем для каждого элемента a_{ξ_i, ξ_j} в качестве множества $\Lambda(a_{\xi_i, \xi_j})$ его непосредственных предшественников берем антицепь элементов $a_{\xi_i, \xi_j, \xi_1}, \dots, a_{\xi_i, \xi_j, \xi_{j-1}}, a_{\xi_i, \xi_j, \xi_{j+1}}, \dots, a_{\xi_i, \xi_j, \xi_{2^n}}$. Они образуют множество элементов глубины $d = 3$ в компоненте B_i . Полагаем, что $a_{\xi_i, \xi_j, \xi_k} \Vdash_{V_n} y_s$ тогда и только тогда, когда $y_s \in \xi_k$, т. е. $\xi_k = V(a_{\xi_i, \xi_j, \xi_k})$ будет означиванием элемента a_{ξ_i, ξ_j, ξ_k} для $1 \leq k \leq 2^n$ и $k \neq j$. Этот процесс продолжаем указанным способом, двигаясь от максимального элемента и увеличивая глубину $d = 3, 4, 5, \dots$. Таким образом, всякая компонента B_i получается последовательным достраиванием множеств непосредственных предшественников для каждого элемента. По существу, компонента B_i представляет из себя пучок бесконечных цепей с максимальным элементом. При этом любые два соседних элемента одной цепи имеют различное означивание. Модель $T(n)$ — это некоторая совокупность таких пучков. Если в этой модели положить $\Omega = \{x_1, \dots, x_q\} \cup \{p_1, \dots, p_l\}$, $q + l = n$, то полученную n -характеристическую модель будем обозначать через $T(q + l) = \langle W_{q+l}, R_{q+l}, V_{q+l} \rangle$.

Зафиксируем какое-нибудь правило вывода $r = \mathcal{A}(\bar{x}, \bar{p}) / \mathcal{B}(\bar{x}, \bar{p})$ вида (1), где $\bar{x} = (x_1, \dots, x_k)$, $\bar{p} = (p_1, \dots, p_m)$. Зададим на шкале $\langle W_n, R_n \rangle$ модели $T(n)$ некоторое означивание V переменных из множества $X = \{x_1, \dots, x_k\}$ и метапеременных из множества $P = \{p_1, \dots, p_m\}$ (т. е. $\text{Dom}(V) = X \cup P$). Полученную модель обозначим через $T = \langle W_n, R_n, V \rangle$. Возьмем произвольную полную цепь C из модели T . Для каждого элемента $a_d \in C$ глубины d определим некоторое множество $\eta(a_d) = P(a_d) \cup X(a_d) \cup F(a_d)$, где $P(a_d) = \{p_j \mid p_j \in P, a_d \Vdash_V p_j\}$, $X(a_d) = \{x_i \mid x_i \in X, a_d \Vdash_V x_i\}$, $F(a_d) = \{f_t \mid f_t \in F, a_d \Vdash_V f_t\}$, F — множество всех подформул φ формул $\mathcal{A}(x_1, \dots, x_k, p_1, \dots, p_m)$ и $\mathcal{B}(x_1, \dots, x_k, p_1, \dots, p_m)$, а также формул вида $\diamond\varphi$, полученных из них. Пусть $\bar{F} = l$. Тогда для элемента a_d глубины d будет однозначно определена последовательность $(\eta(a_1), \dots, \eta(a_d))$, где $\{a_1, \dots, a_d\}$ — верхний конус a_d . Множество $\pi(a_d) = \{\eta(a_1), \dots, \eta(a_d)\}$, состоящее из элементов этой последовательности, назовем r -потенциалом (или просто потенциалом) элемента a_d . Поскольку $\pi(a_{d+1}) = \{\pi(a_d), \eta(a_{d+1})\}$, мощности потенциалов соседних элементов различаются не более чем на 1. Следовательно, потенциал монотонно (может быть, не строго) возрастает с увеличением глубины. Так как $\overline{P \cup X \cup F} = k + m + l$, мощности потенциалов ограничены числом 2^{k+m+l} . Пару $\tau(a_d) = (\eta(a_d), \pi(a_d))$ назовем r -типом (или просто типом) элемента a_d на цепи C в модели T , где $\pi(a_d)$ — потенциал элемента a_d . Для любого фиксированного потенциала π существует ровно $\bar{\pi}$ типов элементов. Отсюда произвольная цепь модели T может содержать максимум $\Theta = 1 + 2 + 3 + \dots + 2^{k+m+l} = (1 + 2^{k+m+l})2^{k+m+l-1}$ различных типов элементов. Множество M элементов модели T назовем полным, если для любого подмножества $\beta \subseteq P$ найдется по крайней мере один элемент $a \in M$ такой, что $\{p_j \mid a \Vdash_{V_n} p_j\} = \beta$, т. е. чье означивание на параметрах совпадает с β . Например, нижний конус любого элемента модели $T(n)$ и множество непосредственных предшественников любого элемента из $T(n)$ являются полными множествами.

Теорема. *Правило вывода с метапеременными*

$$r = \frac{\mathcal{A}(x_1, \dots, x_k, p_1, \dots, p_m)}{\mathcal{B}(x_1, \dots, x_k, p_1, \dots, p_m)}$$

допустимо в логике РМ1 тогда и только тогда, когда оно истинно в любой конечной модели \mathcal{T} такой, что

1) \mathcal{T} является открытой подмоделью модели T_s , которая получается из s -характеристической модели $T(s) = \langle W_s, R_s, V_s \rangle$ для логики РМ1 при $s \leq m + k$ заданием некоторого означивания V^* такого, что $V^*(p_j) = V_s(p_j)$, $1 \leq j \leq m$;

2) модель \mathcal{T} содержит все максимальные элементы модели T_s ;

3) любая цепь модели \mathcal{T} содержит не более $(1 + 2^{k+m+l})2^{k+m+l-1}$ элементов, где k — мощность множества переменных $X = \{x_1, \dots, x_k\}$, m — мощность множества метапеременных $P = \{p_1, \dots, p_m\}$, l — мощность множества F всех подформул φ формул $\mathcal{A}(x_1, \dots, x_k, p_1, \dots, p_m)$ и $\mathcal{B}(x_1, \dots, x_k, p_1, \dots, p_m)$, а также формул вида $\diamond\varphi$, полученных из них;

4) для любого элемента $a \in \mathcal{T}$ если множество $\Lambda(a)$ его непосредственных предшественников неполно, то для каждого подмножества β из P в верхнем конусе $\nabla(a)$ найдется соответствующий ему элемент c_β такой, что $\{p_j \mid c_\beta \Vdash_{V^*} p_j\} = \beta$ и его r -потенциал $\pi(c_\beta)$ равен r -потенциалу $\pi(a)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть правило вывода r недопустимо в логике РМ1. По теореме 3 найдутся некоторая s -характеристическая модель $T(s) = \langle W_s, R_s, V_s \rangle$, формульное означивание V' , удовлетворяющее условию $\text{Dom}(V') = X \cup P = \{x_1, \dots, x_k\} \cup \{p_1, \dots, p_m\}$, $V'(p_j) = V_s(p_j)$, $1 \leq j \leq m$, и элемент $a_0 \in W_s$ такие, что

$$\forall a \in W_s (a \Vdash_{V'} \mathcal{A}(\bar{x}, \bar{p})), \text{ но } a_0 \not\Vdash_{V'} \mathcal{B}(\bar{x}, \bar{p}),$$

т. е. $\langle W_s, R_s, V' \rangle \not\Vdash r$. Докажем, что существует модель \mathcal{T} с указанными свойствами такая, что $\mathcal{T} \not\Vdash r$.

Предложение 1. *Если $s > k + m$, то правило r будет ложно в некоторой $(k + m)$ -характеристической модели $T(k + m) = \langle W_{k+m}, R_{k+m}, V_{k+m} \rangle$ при некотором означивании V'' таком, что $V''(p_j) = V_{k+m}(p_j)$, $1 \leq j \leq m$.*

Указанную $(k + m)$ -характеристическую модель мы получим, преобразуя модель $T_1 = \langle W_s, R_s, V' \rangle$. Произведем преобразование отождествления элементов одной и той же конечной глубины модели T_1 . Начнем с элементов глубины 1. Пусть максимальный элемент $a_{\xi_i} \in T_1$ таков, что его означивание есть $V'(a_{\xi_i}) = \alpha \cup \beta$, где $\alpha \subseteq X$ и $\beta \subseteq P$. Возьмем все остальные максимальные элементы a_{ξ_j} модели T_1 , удовлетворяющие условию $V'(a_{\xi_j}) = \alpha \cup \beta$, и отождествим их с элементом a_{ξ_i} , т. е. сольем последовательно один за другим с a_{ξ_i} . Элемент a_{ξ_i} назовем *элементом слияния*. Далее перейдем к следующему максимальному элементу и выполним преобразование отождествления, затем — к следующему и т. д., пока не останутся только элементы слияния. В результате максимальных элементов в модели будет не больше 2^{k+m} . Если это число строго меньше 2^{k+m} , то добьемся точного равенства. Для этого отменим отождествление необходимого количества тех или иных элементов так, чтобы для всякого $\beta \subseteq P$ осталось ровно 2^k элементов a_{ξ_j} , чье означивание на параметрах в точности совпадает с β , т. е. $V(a_{\xi_j}) \cap P = \beta$. В итоге в результирующей модели останется ровно 2^{k+m} максимальных элементов, т. е. столько же, сколько их в модели $T(k + m)$. Очевидно, ровно столько же будет и компонент. Возьмем одну из компонент полученной модели. Пусть a_{ξ_q} — ее максимальный элемент, а

$V(a_{\xi_q}) = \alpha_1 \cup \beta_1$ — его означивание ($\alpha_1 \subseteq X, \beta_1 \subseteq P$). Элементы глубины 2 этой компоненты образуют множество $\Lambda(a_{\xi_q})$ непосредственных предшественников элемента a_{ξ_q} . Произведем над ними преобразование отождествления. Эта процедура позволит нам оставить в множестве $\Lambda(a_{\xi_q})$ результирующей модели для каждого $\beta_t \subseteq P, \beta_t \neq \beta_1$, ровно 2^k элементов с означиванием β_t на параметрах и $2^k - 1$ элементов с означиванием β_1 , т. е. точно столько, сколько их в модели $T(k+m)$. Возьмем какой-нибудь элемент $a_{\xi_q \xi_s}$ преобразованного множества $\Lambda(a_{\xi_q})$. Пусть $V(a_{\xi_q \xi_s}) = \alpha_2 \cup \beta_2$ — его означивание ($\alpha_2 \subseteq X, \beta_2 \subseteq P$). Рассмотрим множество $\Lambda(a_{\xi_q \xi_s})$ непосредственных предшественников элемента $a_{\xi_q \xi_s}$ в полученной модели. Они образуют множество элементов глубины 3. Произведем над ними процедуру отождествления. Это даст нам возможность оставить в множестве $\Lambda(a_{\xi_q \xi_s})$ непосредственных предшественников в результирующей модели для каждого $\beta_2 \subseteq P, \beta_2 \neq \beta_2$, ровно 2^k элементов с означиванием β_t на параметрах и $2^k - 1$ элементов с означиванием β_2 , т. е. точно столько, сколько их в модели $T(k+m)$. Такие же преобразования проведем для каждого оставшегося элемента $a_{\xi_q \xi_j}$ из множества $\Lambda(a_{\xi_q})$. Далее переходим к элементам глубины 4, 5, 6 и т. д., двигаясь по направлению от максимальных элементов вглубь. Точно такие же преобразования производим со всеми остальными компонентами модели T_1 . Результирующую модель обозначим через \tilde{T} . По построению модель \tilde{T} имеет фрейм, совпадающий с фреймом модели $T(k+m)$, и $V''(p_j) = V_{k+m}(p_j), 1 \leq j \leq m$, т. е. фактически $\tilde{T} = \langle W_{k+m}, R_{k+m}, V'' \rangle$. Отметим, что для любой полной цепи модели T_1 некоторый ее дубликат (относительно означивания V'') содержится в модели \tilde{T} . Определим отображение φ модели T_1 на модель \tilde{T} . Произвольному элементу модели T_1 поставим в соответствие его элемент слияния из модели \tilde{T} , если отождествление не отменялось, и сам этот элемент из \tilde{T} , если отождествление для него отменялось. Очевидно, что отображение φ является p -морфизмом. Тогда по теореме 2

$$\forall a \in W_{k+m}(a \Vdash_{V''} \mathcal{A}(\bar{x}, \bar{p})), \quad \text{но} \quad a'_0 \not\vdash_{V''} \mathcal{B}(\bar{x}, \bar{p}),$$

где $a'_0 = \varphi(a_0)$, т. е. $\langle W_{k+m}, R_{k+m}, V'' \rangle \not\vdash r$, что и требовалось доказать.

Вернемся к модели $T_1 = \langle W_s, R_s, V' \rangle$ и трансформируем ее поэтапно в модель \mathcal{T} . Доказанное предложение 1 позволяет считать, что $s \leq k+m$. Введем некоторое преобразование цепей, которое назовем *прореживанием*. Пусть a — максимальный элемент произвольной цепи C какой-либо компоненты модели T_1 . Все элементы того же r -типа, что и a , образуют некоторую подцепь цепи C с данным элементом a в качестве максимального. Элемент a назовем *представителем* данного типа на C . Удаляем все элементы этой подцепи, кроме самого элемента a , сохраняя его означивание (прореживаем по типу элемента a). В преобразованной таким образом цепи возьмем элемент b глубины 2. Все элементы одинакового с ним типа также образуют некоторую подцепь. Удаляем все элементы этой подцепи, кроме самого элемента b , также сохраняя его означивание (прореживаем по типу элемента b). Во вновь полученной цепи производим такую же процедуру с элементом глубины 3, затем глубины 4 и т. д. В результате получим прореженную цепь C^* , состоящую только из представителей типов, вместе с их означиванием из цепи C . Поскольку различных типов элементов всего $\Theta = (1 + 2^{k+m+l})2^{k+m+l-1}$, то и длина цепи C^* не превосходит Θ . Для любого элемента $a \in C$ через $m(a)$ обозначим представителя его типа на цепи C^* .

Предложение 2. $\forall a \in C$ ($\tau(a) = \tau(m(a))$), в частности, представитель любого типа сохраняет свой тип на прореженной цепи C^* .

Доказательство ведем индукцией по глубине элемента a_d . Пусть для удобства нижний индекс элемента указывает его глубину. Если $d = 1$, то утверждение, очевидно, верно. Пусть оно верно также для всех элементов глубины $d < l$. Возьмем на цепи C элемент a_{l+1} глубины $l + 1$. Если он не максимальный в подцепи однотипных элементов, то на цепи C найдется элемент a_q того же типа, но глубины $q \leq l$. По индукционному предположению $\tau(a_q) = \tau(m(a_q))$. Поскольку $\tau(a_{l+1}) = \tau(a_q)$ и $\tau(m(a_q)) = \tau(m(a_{l+1}))$, то $\tau(a_{l+1}) = \tau(m(a_{l+1}))$. Пусть a_{l+1} максимальный в подцепи однотипных элементов на C , т. е. именно он, сохранив свое означивание, под именем $m(a_{l+1})$ займет соответствующее место на цепи C^* . По определению $\pi(a_{l+1}) = \{\pi(a_l), \eta(a_{l+1})\}$, где $\eta(a_{l+1}) = F(a_{l+1}) \cup P(a_{l+1}) \cup X(a_{l+1})$. Очевидно, что $F(a_{l+1}) = \{f_t \mid f_t \in F, a_{l+1} \Vdash_{V'} f_t\}$ определяется только множествами $P(a_{l+1}) = \{p_j \mid p_j \in P, a_{l+1} \Vdash_{V'} p_j\}$, $X(a_{l+1}) = \{x_i \mid x_i \in X, a_{l+1} \Vdash_{V'} x_i\}$ и $\pi(a_l)$. Аналогично $\pi(m(a_{l+1})) = \{\pi(m(a_l)), \eta(m(a_{l+1}))\}$, и точно так же $F(m(a_{l+1}))$ определяется только множествами $P(m(a_{l+1})) \cup X(m(a_{l+1}))$ и $\pi(m(a_l))$. По построению элементы a_l и a_{l+1} имеют одинаковое означивание, т. е. $P(a_{l+1}) = P(m(a_{l+1}))$ и $X(a_{l+1}) = X(m(a_{l+1}))$. По индукционному предположению $\pi(a_l) = \pi(m(a_l))$. Отсюда $\tau(a_{l+1}) = \tau(m(a_{l+1}))$, что и требовалось.

Возьмем произвольную компоненту модели $T_1 = \langle W_s, R_s, V' \rangle$ с максимальным элементом a . Произведем прореживание всех цепей нижнего конуса $\Delta(a)$ по типу элемента a . В преобразованной компоненте рассмотрим множество $\Lambda(a)$ непосредственных предшественников элемента a . Для каждого $b \in \Lambda(a)$ произведем прореживание всех цепей нижнего конуса $\Delta(b)$ по типу элемента b . В полученной компоненте рассмотрим каждое множество $\Lambda(b)$. Для всякого $c \in \Lambda(b)$ произведем прореживание всех цепей нижнего конуса $\Delta(c)$ по типу элемента c и т. д. Указанное преобразование продолжаем, двигаясь по направлению от максимального элемента вглубь. Аналогично преобразуем и все остальные компоненты модели T_1 . Таким образом будет прорежена каждая цепь модели T_1 . Полученную в итоге модель обозначим через $T_2 = \langle W_2, R_2, V_2 \rangle$. Докажем, что

$$\forall f \in F (T_1 \Vdash f \Leftrightarrow T_2 \Vdash f).$$

Действительно, пусть для некоторой формулы $f_1 \in F$ и некоторого элемента $a \in T_1$ $a \not\Vdash_{V'} f_1$. По предложению 2 элемент $b = m(a)$ из T_2 имеет тот же тип, что и элемент a . Тогда $b \not\Vdash_{V_2} f_1$. Обратное, пусть для некоторой формулы $f_2 \in F$ и некоторого элемента $c \in T_2$ $c \Vdash_{V_2} f_2$. Возьмем любой элемент $d \in T_1$ такой, что $m(d) = c$. По предложению 2 типы элементов d и c равны, т. е. $d \Vdash_{V'} f_2$. Из этого утверждения следует, что

$$\forall a \in W_2 (a \Vdash_{V_2} \mathcal{A}(\bar{x}, \bar{p})), \text{ но } a_0'' \not\Vdash_{V_2} \mathcal{B}(\bar{x}, \bar{p}),$$

где $a_0'' = m(a_0)$, т. е. $\langle W_2, R_2, V_2 \rangle \not\Vdash r$. В полученной конечной модели T_2 , двигаясь по направлению от максимальных элементов вглубь, произведем преобразование отождествления элементов множества $\Lambda(a)$ для каждого $a \in T_2$, описанное в утверждении 1, не отменяя ни одно из них. Полученную результирующую модель обозначим через $\mathcal{T} = \langle W_3, R_3, V_3 \rangle$. По построению все максимальные элементы модели T_1 остались таковыми в модели \mathcal{T} . Все блоки модели \mathcal{T} представляют собой пучки конечных цепей длины не более $\Theta = (1 + 2^{k+m+l})2^{k+m+l-1}$

с максимальными элементами. Все элементы из множества $\Lambda(a)$ непосредственных предшественников любого элемента $a \in \mathcal{T}$ имеют различное означивание. Очевидно, что модель \mathcal{T} является открытой подмоделью модели $T(k+m)$ при некотором означивании V^* таком, что $V^*(p_j) = V_{k+m}(p_j)$, $1 \leq j \leq m$. Отображение ψ , ставящее в соответствие всякому элементу модели T_2 его элемент слияния из модели \mathcal{T} , является p -морфизмом. Отсюда следует, что

$$\forall a \in W_3(a \Vdash_{V_3} \mathcal{A}(\bar{x}, \bar{p})), \text{ но } a_0''' \not\Vdash_{V_3} \mathcal{B}(\bar{x}, \bar{p}),$$

где $a_0''' = \psi(a_0'')$, т. е. $\mathcal{T} \not\Vdash r$. Таким образом, условия 1–3 из формулировки настоящей теоремы справедливы для модели \mathcal{T} .

Докажем справедливость условия 4. Пусть элемент $a \in \mathcal{T}$ таков, что множество $\Lambda(a)$ его непосредственных предшественников неполно. Это значит, что в ходе прореживания из модели T_1 был удален некоторый непосредственный предшественник \tilde{a} элемента a со всем своим нижним конусом $\Delta(\tilde{a})$. Пусть β — произвольное подмножество из P . Означивание V' в модели T_1 таково, что $V'(p_j) = V_s(p_j)$, $1 \leq j \leq m$. Это значит, что нижний конус любого элемента в модели T_1 является полным множеством. Поэтому в $\Delta(\tilde{a}) \subset T_1$ найдется элемент b , чье означивание на параметрах равно β . Тогда в $\nabla(a) \subset T_1$ обязательно найдется элемент c , максимальный среди элементов того же типа, что и b . При этом, с одной стороны, $\pi(c) \subseteq \pi(a) \subseteq \pi(b)$ ввиду монотонности потенциала, с другой стороны, $\pi(c) = \pi(b)$ как потенциалы однотипных элементов. В итоге $\pi(c) = \pi(a)$ и согласно предложению 2 условие 4 теоремы тоже выполнено.

Обратно, пусть некоторая модель $\mathcal{T} = \langle W, R, V''' \rangle$ удовлетворяет условиям настоящей теоремы, т. е. является открытой подмоделью некоторой s -характеристической модели $\langle W_s, R_s, V_s \rangle$, $s \leq m+k$, с заданным на ней означиванием V^* таким, что $V^*(p_j) = V_s(p_j)$, $1 \leq j \leq m$. При этом $W \subset W_s$, $\overline{W} < \infty$, $R = R_s \upharpoonright W$, $V''' = V^* \upharpoonright W$, $V'''(p_j) = V^*(p_j) \upharpoonright W$, $1 \leq j \leq m$. Пусть $\mathcal{T} \not\Vdash r$. Тогда найдется элемент $a_1 \in W$ такой, что

$$\forall a \in W(a \Vdash_{V'''} \mathcal{A}(\bar{x}, \bar{p})), \text{ но } a_1 \not\Vdash_{V'''} \mathcal{B}(\bar{x}, \bar{p}).$$

Докажем, что тогда $\langle W_s, R_s, V^* \rangle \not\Vdash r$ для некоторого формульного означивания V^* такого, что $V^*(p_j) = V_s(p_j)$, $1 \leq j \leq m$. Построим модель \mathcal{T} до модели $T = \langle W_s, R_s, V^* \rangle$ и докажем формульность V^* . С этой целью введем преобразования, в некотором смысле обратные преобразования прореживания и отождествления. Пусть a есть произвольный элемент модели \mathcal{T} и α — его означивание на параметрах. Первое преобразование относится к случаю, когда множество $\Lambda(a)$ непосредственных предшественников элемента a неполно. Пусть $\beta \subset P$ — недостающее подмножество. По условию теоремы в верхнем конусе $\nabla(a)$ найдется элемент c такой, что $\pi(c) = \pi(a)$ и его означивание на параметрах совпадает с β . Добавим в множество $\Lambda(a)$ модели \mathcal{T} элемент b с означиванием, совпадающим с означиванием элемента c , т. е. $\eta(b) = \eta(c)$. Полученное расширение модели обозначим через $\widehat{\mathcal{T}} = \langle \widehat{W}, \widehat{R}, \widehat{V}''' \rangle$. Потенциалы элементов соседствующих элементов a и b могут различаться по мощности лишь на 1. Поскольку $\eta(b) = \eta(c)$, $\eta(c) \in \pi(c)$ и $\pi(c) = \pi(a)$, то $\eta(b) \in \pi(a)$ и, значит, $\pi(b) = \pi(a) = \pi(c)$. Отсюда следует, что типы элементов c и b в модели $\widehat{\mathcal{T}}$ равны. По этой причине из того, что $c \Vdash_{V'''} \mathcal{A}(\bar{x}, \bar{p})$, следует $b \Vdash_{\widehat{V}'''} \mathcal{A}(\bar{x}, \bar{p})$, т. е. в модели $\widehat{\mathcal{T}}$ сохраняются истинность посылки и ложность следствия правила r . Тогда $\widehat{\mathcal{T}} \not\Vdash r$. Произведем такое же преобразование для всех оставшихся недостающих подмножеств из P . В преобразованной таким образом модели множество $\Lambda(a)$

непосредственных предшественников элемента a уже будет полным. Введенное преобразование назовем *пополнением множества* $\Lambda(a)$. Второе преобразование относится к случаю, когда множество $\Lambda(a)$ непосредственных предшественников элемента a будет полным. Возьмем любой элемент b из этого множества. Пусть означивание b на параметрах равно β . Добьемся, если это необходимо, чтобы общее количество элементов с таким же означиванием на параметрах в $\Lambda(a)$ было 2^t в случае $\alpha \neq \beta$ и $2^t - 1$ в случае $\alpha = \beta$, где $t = s - m$, т. е. в точности столько, сколько их в модели $T = \langle W_s, R_s, V^* \rangle$. Для этого добавим в $\Lambda(a)$ необходимое количество элементов, означивание которых совпадает с означиванием элемента b . Полученное расширение модели обозначим через $\widetilde{\mathcal{T}} = \langle \widetilde{W}, \widetilde{R}, \widetilde{V}''' \rangle$. Заметим, что все добавленные элементы будут иметь тот же тип в модели $\widetilde{\mathcal{T}}$, что и элемент b , поскольку будут иметь тот же потенциал. Отображение ϱ модели $\widetilde{\mathcal{T}}$ на модель \mathcal{T} , переводящее каждый добавленный элемент в элемент b , а остальные элементы в самих себя, очевидно, является p -морфизмом. Отсюда по теореме 2

$$\forall a \in \widetilde{W} (a \Vdash_{\widetilde{V}'''} \mathcal{A}(\bar{x}, \bar{p})), \quad \text{но} \quad a'_1 \not\Vdash_{\widetilde{V}'''} \mathcal{B}(\bar{x}, \bar{p}),$$

где $a'_1 = \varrho(a_1)$, т. е. $\widetilde{\mathcal{T}} \not\Vdash r$. Произведем указанное преобразование для каждого $b \in \Lambda(a)$. В преобразованной таким образом модели множество $\Lambda(a)$ непосредственных предшественников элемента a будем называть *абсолютно полным*. Введенное преобразование назовем *абсолютным пополнением множества* $\Lambda(a)$.

Возьмем произвольную компоненту модели \mathcal{T} с максимальным элементом a . Рассмотрим элементы глубины 2. Произведем, если необходимо, преобразования пополнения и абсолютного пополнения множества $\Lambda(a)$ непосредственных предшественников элемента a . В преобразованной модели множество $\Lambda(a)$ будет абсолютно полным, как в модели T_3 . Возьмем в этом новом множестве произвольный элемент b и перейдем к элементам глубины 3. Произведем, если необходимо, преобразования пополнения и абсолютного пополнения множества $\Lambda(b)$ непосредственных предшественников элемента b . В преобразованной модели множество $\Lambda(b)$ также будет абсолютно полным. Произведем указанную процедуру для каждого $b \in \Lambda(a)$. В преобразованной таким образом модели возьмем произвольный элемент c глубины 3 и перейдем к элементам глубины 4. Указанный выше процесс продолжим, переходя к элементам глубины 5, глубины 6 и т. д., двигаясь по направлению от максимального элемента вглубь. Аналогично преобразуем и все остальные компоненты модели \mathcal{T} . По условию теоремы модель \mathcal{T} содержит все максимальные элементы модели T_3 . В результате произведенных преобразований модель $\mathcal{T} = \langle W, R, V''' \rangle$ окажется достроенной до модели $T_3 = \langle W_s, R_s, V^* \rangle$. Из доказанных выше свойств преобразований пополнения и абсолютного пополнения следует, что $\langle W_s, R_s, V^* \rangle \not\Vdash r$.

Докажем формульность означивания V^* . Для любого $\eta \subseteq X \cup P \cup F$ построим формулы

$$\begin{aligned} \varphi(\eta) &= \left(\bigwedge_{x_i \in \eta} x_i \wedge \bigwedge_{x_i \notin \eta} \neg x_i \right) \wedge \left(\bigwedge_{p_j \in \eta} p_j \wedge \bigwedge_{p_j \notin \eta} \neg p_j \right) \wedge \left(\bigwedge_{f_t \in \eta} f_t \wedge \bigwedge_{f_t \notin \eta} \neg f_t \right), \\ \psi(\eta) &= \diamond \left(\bigwedge_{x_i \in \eta} x_i \wedge \bigwedge_{x_i \notin \eta} \neg x_i \right) \wedge \diamond \left(\bigwedge_{p_j \in \eta} p_j \wedge \bigwedge_{p_j \notin \eta} \neg p_j \right) \wedge \diamond \left(\bigwedge_{f_t \in \eta} f_t \wedge \bigwedge_{f_t \notin \eta} \neg f_t \right). \end{aligned}$$

Пусть $\tau = (\eta_d, \{\eta_1, \dots, \eta_d\})$ — некоторый тип элементов модели $\langle W_s, R_s, V^* \rangle$, где $\eta_i \subseteq X \cup P \cup F$, $1 \leq i \leq d$. Определим формулу $f(\tau) = \varphi(\eta_d) \wedge (\psi(\eta_1) \wedge \dots \wedge$

$\psi(\eta_d)$). Покажем, что $f(\tau)$ истинна только на элементах типа τ . Пусть $\tau_1 \neq \tau_2$ и a — элемент типа τ_1 . Тогда $a \not\Vdash_{V^*} f(\tau_2)$. Действительно, если у этих типов разные потенциалы, то найдется некоторое η_s из потенциала типа τ_2 такое, что $a \not\Vdash_{V^*} \psi(\eta_s)$, где $\psi(\eta_s)$ — подформула формулы $f(\tau_2)$. Если же потенциалы одинаковые, то в них найдется некоторое η_q такое, что $a \not\Vdash_{V^*} \varphi(\eta_q)$, где $\varphi(\eta_q)$ — подформула формулы $f(\tau_2)$. В обоих случаях $a \not\Vdash_{V^*} f(\tau_2)$. Таким образом, множество M_τ элементов модели $\langle W_s, R_s, V^* \rangle$ типа τ формульно: $M_\tau = V^*(f_\tau)$. Возьмем произвольную переменную или метапеременную $y_i \in X \cup P$. Пусть $y_i \in \tau$, т. е. $y_i \in \eta_d$ в типе $\tau = (\eta_d, \{\eta_1, \dots, \eta_d\})$. Для любого элемента a данного типа τ $a \Vdash_{V^*} f(\tau)$ и, следовательно, $a \Vdash_{V^*} y_i$. Иными словами, $M_\tau \subseteq V^*(y_i)$ для любого τ такого, что $y_i \in \tau$. С другой стороны, любое $a \in V^*(y_i)$ содержится в M_τ для подходящего τ . Это означает, что

$$V^*(y_i) = M_{\tau_1} \cup \dots \cup M_{\tau_u} = V^*(f(\tau_1)) \cup \dots \cup V^*(f(\tau_u)) = V^* \left(\bigvee_{j=1}^u f(\tau_j) \right),$$

где τ_1, \dots, τ_u — все типы такие, что $y_i \in \tau_j$, $1 \leq j \leq u$. Обозначим формулу $\bigvee_{j=1}^u f(\tau_j) = \mathcal{F}_i$, тогда $V^*(y_i) = V^*(\mathcal{F}_i)$. Это доказывает, что означивание V^* формульно. Тогда по теореме 3 правило r с метапеременными ложно в логике $PM1$. Из теоремы 5 непосредственно следует

Теорема 6. *Предтабличная модальная логика $PM1$ разрешима по допустимости для правил вывода с метапеременными. В предтабличной модальной логике $PM1$ разрешимость логических уравнений алгоритмически распознаваема.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Рыбаков В. В. Уравнения в свободной топобулевой алгебре // Алгебра и логика. 1986. Т. 25, № 2. С. 172–204.
2. Rybakov V. V. Admissibility of logical inference rules. New York; Amsterdam: Elsevier scientific publ., 1996.
3. Максимова Л. Л. Предтабличные расширения логики $S4$ Льюиса // Алгебра и логика. 1975. Т. 14, № 1. С. 28–56.

Статья поступила 18 марта 1998 г.

г. Красноярск