



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

V. I. Vasyunin, Two classical theorems of function model theory via the coordinate-free approach, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1989, Volume 178, 5–22

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.83

January 16, 2025, 21:17:53



ДВЕ КЛАССИЧЕСКИЕ ТЕОРЕМЫ О МОДЕЛИ В БЕСКООРДИНАТНОМ ИЗЛОЖЕНИИ

Настоящая заметка, имеющая чисто дидактический характер, посвящена изложению в рамках бескоординатной функциональной модели (см. [1], [2]) двух известных и широко используемых теорем Б. Секефальви-Надя и Ч. Фойаша, а именно: теоремы о связи инвариантных подпространств сжатия с регулярными факторизациями его характеристической функции и теоремы о подъеме коммутанта (а точнее - операторов, сплетающих пару сжатий).

Доказательство первой теоремы в существенном повторяет то доказательство, которое авторы приводят в своей монографии [3], но существенным для нас пунктом будет выделение роли функциональных вложений и формулировка "промежуточного" критерия наличия инвариантного подпространства именно в терминах "дополнительного" функционального вложения.

Доказательства теоремы о подъеме я вообще приводить не буду. (Доказательство, которое не опирается на модель, приведено в той же монографии [3]). Нас будет больше интересовать вытекающая из теоремы о модели параметризация поднятых операторов, т.е. то, чему посвящена статья С.Надя и Фойаша [4]. С.Надь и Фойаш параметризовали поднятые операторы матричными элементами, естественно возникающими при использовании их модели. Однако эти параметры не являются независимыми. Преимущество предлагаемой параметризации видится в том, что, исходя из бескоординатной модели, мы естественно получаем несколько иные параметры и, например, вместо двух матричных элементов Надя-Фойаша, связанных неким соотношением, которое нельзя явно разрешить относительно какого-либо из параметров, мы используем один свободный параметр. При желании от бескоординатной модели нетрудно перейти к любой конкретной реализации, будь то модель Секефальви-Надя-Фойаша, де Бранжа-Ровняка, Павлова или любая другая.

I. Основные понятия и обозначения

Пусть T - вполне неунитарное сжатие, действующее в гильбертовом пространстве H . Действующий в более широком гильбертовом пространстве \mathcal{H} унитарный оператор U будет унитарной дилатацией оператора T , т.е. будет удовлетворять соотношению $T^n = P_H U^n | H$, где P_H - ортопроектор в \mathcal{H} на подпрост-

ранство H . Мы будем предполагать дилатацию минимальной, т.е. будем предполагать, что минимальное U -приводящее подпространство, содержащее H , совпадает с \mathcal{H} . Пространство \mathcal{H} имеет следующую структуру

$$\mathcal{H} = G_* \oplus H \oplus G$$

где G и G_- - это соответственно U - и U^* -инвариантные подпространства, причем из условия минимальности следует, что операторы $U|G$ и $U^*|G_*$ суть чистые изометрии. Реализация чистой изометрии как оператора умножения на независимую переменную в векторном пространстве Харди H^2 позволяет построить изометрические вложения

$$\pi: L^2(E) \rightarrow \mathcal{H},$$

$$\pi_*: L^2(E_*) \rightarrow \mathcal{H},$$

сплетающие оператор умножения на z в соответствующем пространстве L^2 (квадратично-суммируемых E - или E_* -значных функций на единичной окружности) с унитарной дилатацией U . При этом, отождествляя пространство Харди $H^2(E)$ с подпространством функций из $L^2(E)$, у которых коэффициенты Фурье с отрицательными номерами равны нулю, мы можем считать, что

$$\pi H^2(E) = G,$$

$$\pi_* H^2(E_*) = G_*,$$

где $H^2(E_*) = L^2(E_*) \ominus H^2(E_*)$. Поскольку оператор θ , $\theta \stackrel{\text{def}}{=} \pi_*^* \pi$, коммутирует с умножением на z (а точнее, сплетает оператор умножения на z в $L^2(E)$ с оператором умножения на z в $L^2(E_*)$), он является оператором умножения на ограниченную функцию. А так как $\theta H^2(E) \subset H^2(E_*)$, то $\theta \in H^\infty(E \rightarrow E_*)$, т.е. θ - ограниченная аналитическая в единичном круге функция, принимающая значения в пространстве операторов, действующих из E в E_* . Функция θ называется характеристической функцией оператора T .

Каждая сжимающая операторно-значная аналитическая функция представляется в виде ортогональной суммы постоянного унитарного оператора и чистой сжимающей функции, т.е. такой функции θ , для которой $\|\theta(0)e\|_{E_*} < \|e\|_E$, $\forall e \in E$, $e \neq 0$. Характеристическая функция любого сжатия является чистой.

С сжимающей аналитической функцией θ мы будем ассоциировать $L^\infty(E \rightarrow E)$ - функцию Δ , $\Delta \stackrel{\text{def}}{=} (I - \theta^* \theta)^{1/2}$. Подпространство $\text{clos } \Delta L^2(E)$ мы будем обозначать символом $L^2_\Delta(E)$.

Кроме вложений π и π_* мы будем использовать еще два изометрических оператора τ и τ_* , которые определяются равенствами

$$\begin{aligned} \tau \Delta &= \pi - \pi_* \theta, \\ \tau_* \Delta_* &= \pi_* - \pi \theta^*, \quad (\Delta_* \stackrel{\text{def}}{=} (I - \theta \theta^*)^{1/2}). \end{aligned}$$

Операторы τ и τ_* изометрически вкладывают пространства $L^2_\Delta(E)$ и $L^2_{\Delta_*}(E_*)$ в \mathcal{H} , а точнее - на ортогональные дополнения образов $\pi_* L^2(E)$ и, соответственно, $\pi L^2(E)$. Подпространства $\mathcal{R} \stackrel{\text{def}}{=} \tau L^2_\Delta(E) = \mathcal{H} \ominus \pi L^2(E)$ и $\mathcal{R}_* \stackrel{\text{def}}{=} \tau_* L^2_{\Delta_*}(E_*) = \mathcal{H} \ominus \pi_* L^2(E_*)$ называются остаточной и $*$ -остаточной частью пространства унитарной дилатации.

В заключение приведем несколько полезных формул, связывающих операторы π и τ .

$$\begin{aligned} \tau^* \pi &= \Delta & \tau_*^* \pi &= 0 \\ \tau^* \pi_* &= 0 & \tau_*^* \pi_* &= \Delta_* \\ \tau \tau^* &= I - \pi_* \pi_*^* & \tau_* \tau_*^* &= I - \pi \pi^* \end{aligned}$$

Эти формулы легко проверяются, используя непосредственно определение операторов τ , τ_* , θ и Δ .

Более подробно со всеми упомянутыми здесь понятиями можно познакомиться по работам [1] и [2].

2. Инвариантные подпространства, функциональные вложения и регулярные факторизации

ТЕОРЕМА. Пусть T - вполне неунитарное сжатие в гильбертовом пространстве H , θ - его характеристическая функция, π и π_* - функциональные вложения, введенные в предыдущем пункте. Существует взаимно однозначное соответствие между:

- 1) инвариантными подпространствами оператора T ;
- 2) функциональными вложениями η , согласованными с вложениями π и π_* , т.е. такими изометрическими вложениями $\eta: L^2(F) \rightarrow \mathcal{H}$, сплетающими оператор умножения на z в $L^2(F)$ с унитарной дилатацией, для которых: i) $\eta^* G \subset H^2(F)$, ii) $\eta^* G_* \subset H^2_*(F)$, iii) $\pi_*^* (I - \eta \eta^*) \pi = 0$;

3) регулярными факторизациями характеристической функции θ , т.е. такими представлениями $\theta = \theta_2 \theta_1$, для которых $\theta_1 \in H^\infty(E \rightarrow F)$, $\theta_2 \in H^\infty(F \rightarrow E_*)$, θ_i - сжимающие функции, и оператор Z , действующий из $L^2_\Delta(E)$ в $L^2_{\Delta_1}(E) \oplus L^2_{\Delta_2}(F)$ и определя-

емый тождеством

$$Z \Delta u = \Delta_1 u \oplus \Delta_2 \theta_1 u,$$

является унитарным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы будет разбито на серию лемм, и начнем мы с изучения той дополнительной структуры в пространстве минимальной унитарной дилатации \mathcal{H} , которую привносит наличие у оператора T инвариантного подпространства H_1 . Введем обозначения:

$$T_1 \stackrel{\text{def}}{=} T|_{H_1}, \quad H_2 \stackrel{\text{def}}{=} H \ominus H_1, \quad T_2 \stackrel{\text{def}}{=} P_{H_2} T|_{H_2},$$

$$\mathcal{H}_k \stackrel{\text{def}}{=} \text{span} \{ U^n H_k : n \in \mathbb{Z} \}, \quad U_k = U|_{\mathcal{H}_k}.$$

2.1. ЛЕММА. U_k - минимальная унитарная дилатация оператора T_k , $k = 1, 2$. •

В дальнейшем без специального пояснения объекты, относящиеся к операторам T_1 и T_2 будут помечаться индексами 1 и 2. Так, например, соответствующее разложению $\mathcal{H} = G_* \oplus H \oplus G$ разложение пространств \mathcal{H}_1 и \mathcal{H}_2 будет $\mathcal{H}_k = G_{k*} \oplus H_k \oplus G_k$.

В нижеследующих леммах доказательства будут проводиться только для объектов с индексом 1. Утверждения, касающиеся оператора T_2 получаются простой заменой оператора T на T^* .

2.2. ЛЕММА. $G_1 \subset G$, $G_{*2} \subset G_*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$$G_1 \oplus H_1 = \text{span} \{ U_i^n H_1 : i \geq 0 \} \subset \text{span} \{ U^n H : n \geq 0 \} = G \oplus H.$$

Пусть h_k - произвольные векторы из H_k , тогда

$$(U_1^n h_1, h_2) = (P_H U^n h_1, h_2) = (T^n h_1, h_2) = (T_1^n h_1, h_2) = 0,$$

т.е. $G_1 \oplus H_1 \perp H_2$, а следовательно $G_1 \oplus H_1 \subset G \oplus H_1$ и $G_1 \subset G$. •

2.3. ЛЕММА. $G \ominus G_1 \in \text{Lat } U$, $G_* \ominus G_{*2} \in \text{Lat } U^*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $g \in G \ominus G_1$, $h_1 \in H_1$. Тогда

$$Ug \in G, \quad h_1 \in H \implies (Ug, h_1) = 0;$$

$g \in G \ominus G_1$, $U^n h_1 \in G_1 \oplus H_1 \implies (Ug, U^{n+1} h_1) = (g, U^n h_1) = 0$ для всех n , $n \geq 0$. Таким образом $Ug \perp U^n h_1$, т.е. $Ug \perp G_1 \oplus H_1$ и, следовательно, $Ug \in G \ominus G_1$. •

2.4. ЛЕММА. Существует подпространство E_1 в E , такое что $G_1 = \pi|_{L^2(E_1)}$, т.е. вложение π_1 может быть выбрано равным $\pi|_{L^2(E_1)}$.

Существует подпространство E_{*2} в E_* , такое что $G_{*2} = \pi_*|_{L^2(E_{*2})}$, т.е. вложение π_{*2} может быть выбрано равным $\pi_*|_{L^2(E_{*2})}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $G_1 \in \text{Lat } U \Rightarrow \pi^* G_1 \in \text{Lat } (z|_{H^2(E)})$ и, следовательно, по теореме Бёрлинга-Лакса $\pi^* G_1 = \varphi H^2(E')$ для некоторого вспомогательного пространства E' и внутренней функции φ , $\varphi \in H^\infty(E' \rightarrow E)$.

Но, поскольку по лемме 2.3 $G \ominus G_1 \in \text{Lat } U$, т.е. $\pi^*(G \ominus G_1) \in \text{Lat } (z|_{H^2(E)})$, то для некоторой внутренней функции ψ , $\psi \in H^\infty(E'' \rightarrow E)$, справедливо равенство $\pi^*(G \ominus G_1) = \psi H^2(E'')$. Таким образом

$$H^2(E) = \pi^* G = (\varphi, \psi) H^2(E' \oplus E''),$$

и, следовательно, (φ, ψ) - постоянный унитарный оператор. Выбирая $E_1 \stackrel{\text{def}}{=} \varphi E'$, получаем требуемое представление:

$$G_1 = \pi|_{L^2(E_1)}. \bullet$$

2.5. ЛЕММА. Пусть $G \ominus H_1 = \gamma H^2(F) \oplus R_1$ - разложение Вольда для изометрического оператора $U|_{G \ominus H_1}$. Здесь γ - изометрическое вложение пространства $H^2(F)$ в $G \ominus H_1$, сплетающее оператор умножения на z в $H^2(F)$ с вполне неунитарной частью оператора $U|_{G \ominus H_1}$. Тогда

$$1) \mathcal{K} = \gamma L^2(F) \oplus R_1 \oplus R_{*2}.$$

$$2) R_1 = \tau_1 L_{\Delta_1}^2(E_1) \subset \tau L_{\Delta}^2(E);$$

$$R_{*2} = \tau_{*2} L_{\Delta_{*2}}^2(E_{*2}) \subset \tau_* L_{\Delta_*}^2(E_*).$$

3) Существуют изометрические отображения

$$i: E_1^\perp \oplus E_{*1} \xrightarrow{\text{HA}} F \quad (E_1^\perp \stackrel{\text{def}}{=} E \ominus E_1)$$

$$i_*: E_{*2}^\perp \oplus E_2 \xrightarrow{\text{HA}} F \quad (E_{*2}^\perp \stackrel{\text{def}}{=} E_* \ominus E_{*2}),$$

такие что

$$\gamma = (\pi|_{L^2(E_1^\perp)}, \pi_{*1}) i^* = (\pi_*|_{L^2(E_{*2}^\perp)}, \pi_2) i_*^*.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$$\gamma H^2(F) \oplus R_1 = G \ominus H_1 = (G \ominus G_1) \oplus (G_1 \ominus H_1).$$

Используя функциональные вложения относящиеся к оператору T_1 , можно записать:

$$\begin{aligned} G_1 \oplus H_1 &= \mathcal{H}_1 \ominus G_{*1} = (\pi_{*1} L^2(E_{*1}) \oplus \tau_1 L^2_{\Delta_1}(E_1)) \ominus \pi_{*1} H^2_-(E_{*1}) = \\ &= \pi_{*1} H^2(E_{*1}) \oplus \tau_1 L^2_{\Delta_1}(E_1); \end{aligned}$$

а по лемме 2.4 $G \ominus G_1 = \pi H^2(E) \ominus \pi H^2(E_1) = \pi H^2(E_1^\perp)$, следовательно,

$$\gamma H^2(F) \oplus R_1 = \pi H^2(E_1^\perp) \oplus \pi_{*1} H^2(E_{*1}) \oplus \tau_1 L^2_{\Delta_1}(E_1).$$

Итак, приводящее подпространство R_1 совпадает с подпространством $\tau_1 L^2_{\Delta_1}(E_1)$, т.е. с остаточной частью пространства \mathcal{H}_1 , а вполне неприводящее $\gamma H^2(F)$ равно $\pi H^2(E_1^\perp) \oplus \pi_{*1} H^2(E_{*1})$.

Определим равенством $i \stackrel{\text{def}}{=} \gamma^*(\pi|L^2(E_1^\perp), \pi_{*1})$ оператор i , сплетающий оператор умножения на z в $L^2(E_1^\perp \oplus E_{*1})$ с оператором умножения на z в $L^2(F)$, т.е. оператор i является оператором умножения на ограниченную операторнозначную функцию. Но поскольку $i H^2(E_1^\perp \oplus E_{*1}) = H^2(F)$, функция i является постоянным оператором. И так как $\text{Range } \gamma \subset \subset \text{Range}(\pi|L^2(E_1^\perp), \pi_{*1})$, то проектор $\gamma\gamma^*$ является тождественным оператором на подпространстве $\text{Range}(\pi|L^2(E_1^\perp), \pi_{*1})$, а следовательно $i^*i = I$, т.е. i — изометрически отображает $E_1^\perp \oplus E_{*1}$ на F и $\gamma = (\pi|L^2(E_1^\perp), \pi_{*1})i^*$.

Определим пространство R_{*2} , как $*$ -остаточную часть пространства \mathcal{H}_2 , т.е. $R_{*2} = \tau_{*2} L^2_{\Delta_{*2}}(E_{*2})$ и покажем, что разложение $\gamma H^2_-(F) \oplus R_{*2}$ является разложением Вольда пространства $G_* \oplus H_2$ для оператора $U^*|G_* \oplus H_2$. Действительно,

$$\begin{aligned} G_* \oplus H_2 &= (G_* \ominus G_{*2}) \oplus (G_{*2} \oplus H_2) = \pi_* H^2_-(E_{*2}) \oplus \\ &\oplus (\pi_2 H^2_-(E_2) \oplus \tau_{*2} L^2_{\Delta_{*2}}(E_{*2})) = (\pi_*, \pi_2) H^2_-(E_{*2}^\perp \oplus E_2) \oplus R_{*2}, \end{aligned}$$

т.е. R_{*2} действительно является максимальным приводящим подпространством изометрии $U^*|G_* \oplus H_2$. Поэтому

$$\begin{aligned} R_{*2} &= \bigcap_{n \geq 0} U^{*n}(G_* \oplus H_2) = \mathcal{H} \ominus \bigcup_{n \geq 0} U^{*n}(\mathcal{H} \ominus (G_* \oplus H_2)) = \\ &= \mathcal{H} \ominus \bigcup_{n \geq 0} U^{*n}(G \oplus H_1) = \mathcal{H} \ominus (\gamma L^2(F) \oplus R_1), \end{aligned}$$

т.е. $\mathcal{H} = \gamma L^2(F) \oplus R_1 \oplus R_{*2}$ и утверждение 1) леммы доказано.

В утверждении 2) нам осталось доказать включения $R_1 \subset R$ и $R_{*2} \subset R_*$, которые проверяются тривиально:

$$R_1 = \bigcap_{n \geq 0} U^n(G \oplus H_1) \subset \bigcap_{n \geq 0} U^n(G \oplus H) = R;$$

$$R_{*2} = \bigcap_{n \geq 0} U^{*n}(G_* \oplus H_2) \subset \bigcap_{n \geq 0} U^{*n}(G_* \oplus H) = R_* .$$

Для завершения доказательства леммы осталось построить унитарный оператор $i_* : E_{*2}^\perp \oplus E_2 \rightarrow F$. Искомый оператор определим равенством

$$i_* \stackrel{\text{def}}{=} \eta^*(\pi_* | L^2(E_{*2}^\perp), \pi_2) .$$

Ясно, что это выражение задает оператор умножения на функцию из $L^\infty(E_{*2}^\perp \oplus E_2 \rightarrow F)$. Проверка того, что эта функция является унитарной константой, аналогична проверке этого факта для функции i и опирается на тождество $\eta H_-^2(F) = \pi_* H_-^2(E_{*2}^\perp) \oplus \pi_* H_-^2(E_2)$, которое нетрудно вывести из уже полученных равенств:

$$\begin{aligned} \pi_* H_-^2(E_{*2}^\perp) \oplus \pi_* H_-^2(E_2) &= (G_* \oplus H_2) \ominus R_{*2} = \\ &= (\mathcal{H} \ominus (G \oplus H_1)) \ominus R_{*2} = [\eta L^2(F) \oplus R_1 \oplus R_{*2}] \ominus (\eta H_-^2(F) \oplus R_1) \ominus \\ &\ominus R_{*2} = [\eta H_-^2(F) \oplus R_{*2}] \ominus R_{*2} = \eta H_-^2(F) . \quad \bullet \end{aligned}$$

2.6. ЗАМЕЧАНИЕ. Ортогональность подпространств $\pi_{*1} H^2(E_{*1})$ и $\pi H^2(E_1^\perp)$ влечет тождество $\pi_{*1}^* \pi | L^2(E_1^\perp) = 0$, а из определения $\pi_1 = \pi | L^2(E_1)$ вытекает равенство $\pi_1^* \pi | L^2(E_1^\perp) = 0$. Аналогично справедливы тождества

$$\pi_{*2}^* \pi_* | L^2(E_{*2}^\perp) = 0, \quad \pi_{*2}^* \pi_* | L^2(E_{*2}) = 0 .$$

2.7. СЛЕДСТВИЕ. Характеристические функции операторов T_1 и T_2 совпадают с чистыми частями аналитических сжимающих функций $\eta^* \pi$ и $\pi_*^* \eta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$$\eta^* \pi = i(\pi | L^2(E_1^\perp), \pi_{*1})^* (\pi | L^2(E_1^\perp), \pi_1) = i \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \pi_{*1}^* \pi_1 \end{pmatrix}$$

$$\pi_*^* \eta = (\pi_* | L^2(E_{*2}^\perp), \pi_{*2})^* (\pi_* | L^2(E_{*2}^\perp), \pi_2) i_*^* = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \pi_{*2}^* \pi_2 \end{pmatrix} i_*^* . \quad \bullet$$

Итак мы построили функциональное вложение η и подготовили все, чтобы проверить наличие требуемых в теореме свойств i)- $-i i i$).

2.8. ЛЕММА.

- i) $\eta^* G \subset H^2(F)$;
- ii) $\eta^* G_* \subset H^2(F)$;
- iii) $\pi_*^*(I - \eta\eta^*)\pi = 0$;

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения i) и ii) вытекают из включений

$$G \subset \eta H^2(F) \oplus R_1, \quad G_* \subset \eta H^2(F) \oplus R_{*2}.$$

Для проверки тождества iii) нужно привлечь утверждения I) и 2) леммы 2.5. Согласно утверждению I) оператор $I - \eta\eta^*$ является проектором на подпространство $R_1 \oplus R_{*2}$, т.е.

$I - \eta\eta^* = \tau_1 \tau_1^* + \tau_{*2} \tau_{*2}^*$. А включения $R_1 \subset R$ и $R_{*2} \subset R_*$ равносильны равенствам $\pi_*^* \tau_1 = 0$ и $\pi^* \tau_{*2} = 0$. Поэтому

$$\pi_*^*(I - \eta\eta^*)\pi = \pi_*^*(\tau_1 \tau_1^* + \tau_{*2} \tau_{*2}^*)\pi = 0. \quad \bullet$$

Итак, задавшись инвариантным подпространством H_1 мы построили отвечающее ему функциональное вложение η . Переход от функционального вложения к регулярной факторизации совсем прост: достаточно положить $\theta_1 = \eta^* \pi$, $\theta_2 = \pi_*^* \eta$. Условие i) обеспечивает аналитичность функции θ_1 , действительно:

$$\theta_1 H^2(E) = \eta^* \pi H^2(E) = \eta^* G \subset H^2(F), \quad \text{откуда } \theta_1 \in H^\infty(E \rightarrow F).$$

Аналогично из условия ii) вытекает аналитичность функции θ_2 : $\theta_2 \in H^\infty(F \rightarrow E_*)$. Условие iii) собственно и есть условие факторизации: $\theta = \theta_2 \theta_1$. Осталось проверить регулярность факторизации.

2.9. ЛЕММА. Пусть η — изометрическое вложение пространства $L^2(F)$ в \mathcal{H} , сплетающее оператор умножения на z в $L^2(F)$ с минимальной унитарной дилатацией U .

Пусть $\theta_1 = \eta^* \pi$, $\theta_2 = \pi_*^* \eta$, $\Delta_k = (I - \theta_k^* \theta_k)^{1/2}$ и оператор Z , действующий из $L^2_\Delta(E)$ в $L^2_{\Delta_1}(E) \oplus L^2_{\Delta_2}(F)$ определен на плотном множестве векторов вида Δu формулой

$$Z \Delta u = \Delta_1 u \oplus \Delta_2 \theta_1 u.$$

Тогда, если оператор η удовлетворяет соотношению $\pi_*^*(I - \eta\eta^*)\pi = 0$, то оператор Z является унитарным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем оператор Z в матричном виде

$$Z = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix}, \quad Z_1 \Delta = \Delta_1, \quad Z_2 \Delta = \Delta_2 \theta_1.$$

Условие $\pi_*^*(I - \eta\eta^*)\pi = 0$ обеспечивает факторизацию

$\theta = \theta_2 \theta_1$, а, следовательно, и изометричность оператора Z :

$$\Delta Z^* Z \Delta = \Delta_1^2 + \theta_1^* \Delta_2^2 \theta_1 = I - \theta_1^* \theta_2^* \theta_2 \theta_1 = \Delta^2,$$

откуда, в силу плотности множества $\Delta L^2(E)$ в пространстве $L^2_{\Delta}(E)$, получаем тождество $Z^* Z = I | L^2_{\Delta}(E)$.

Таким образом, оператор $Z Z^*$ является проектором, и достаточно проверить, что $Z_1 Z_1^* = I | L^2_{\Delta_1}(E)$ и $Z_2 Z_2^* = I | L^2_{\Delta_2}(F)$, поскольку тогда автоматически $Z_1 Z_2^* = 0$.

$$\begin{aligned} \Delta_1 Z_1 \Delta_1 &= \Delta_1^2 = I - \pi^* \eta \eta^* \pi = \pi^* (I - \eta \eta^*) \pi = \\ &= \pi^* (I - \eta \eta^*) (\tau \Delta + \pi_* \theta) = \pi^* (I - \eta \eta^*) \tau \Delta. \end{aligned}$$

Итак $\Delta_1 Z_1 = \pi^* (I - \eta \eta^*) \tau$, поэтому

$$\begin{aligned} \Delta_1 Z_1 Z_1^* \Delta_1 &= \pi^* (I - \eta \eta^*) \tau \tau^* (I - \eta \eta^*) \pi = \\ &= \pi^* (I - \eta \eta^*) (I - \pi_* \pi_*^*) (I - \eta \eta^*) \pi = \pi^* (I - \eta \eta^*)^2 \pi = \\ &= \pi^* (I - \eta \eta^*) \pi = \Delta_1^2. \end{aligned}$$

Откуда опять же в силу плотности множества $\Delta_1 L^2(E)$ в $L^2_{\Delta_1}(E)$ получаем тождество $Z_1 Z_1^* = I | L^2_{\Delta_1}(E)$.

Далее

$$\begin{aligned} \Delta_2 Z_2 \Delta_2 &= \Delta_2^2 \theta_1 = \theta_1 - \theta_2^* \theta = \eta^* \pi - (\eta^* \pi_*) (\pi_*^* \pi) = \\ &= \eta^* (I - \pi_* \pi_*^*) \pi = \eta^* \tau \tau^* \pi = \eta^* \tau \Delta, \end{aligned}$$

Откуда $\Delta_2 Z_2 = \eta^* \tau$ и

$$\Delta_2 Z_2 Z_2^* \Delta_2 = \eta^* \tau \tau^* \eta = \eta^* (I - \pi_* \pi_*^*) \eta = \Delta_2^2,$$

т.е. $Z_2 Z_2^* = I | L^2_{\Delta_2}(F)$. ●

Построение инвариантного подпространства по заданной регулярной факторизации $\theta = \theta_2 \theta_1$ проще всего осуществляется выбором конкретной функциональной модели, а именно:

$$\eta = \begin{pmatrix} L^2(E_*) \\ L^2_{\Delta_1}(E) \\ L^2_{\Delta_2}(F) \end{pmatrix}, \quad \pi = \begin{pmatrix} \theta \\ Z_{\Delta} \end{pmatrix}, \quad \pi_* = \begin{pmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Изометричность операторов π и π_* очевидна, $\pi_*^* \pi = \theta$ и

$$\text{span}(\pi_* L^2(E_*), \pi L^2(E)) = L^2(E_*) \oplus \Sigma L^2_{\Delta}(E) = \mathcal{H},$$

поэтому пространство

$$H = \mathcal{H} \ominus (\pi H^2(E) \oplus \pi_* H^2(E_*))$$

является модельным пространством для оператора с характеристической функцией θ , в котором оператор представляется как компрессия своей унитарной дилатации: $T = P_H \pi | H$.

Разложение $H = H_2 \oplus H_1$, где

$$H_2 = \begin{pmatrix} H^2(E_*) \\ 0 \\ L^2_{\Delta_2}(F) \end{pmatrix} \ominus \begin{pmatrix} \theta_2 \\ 0 \\ \Delta_2 \end{pmatrix} H^2(F),$$

$$H_1 = \begin{pmatrix} \theta_2 & 0 \\ 0 & I \\ \Delta_2 & 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} H^2(F) \\ L^2_{\Delta_1}(E) \end{pmatrix} \ominus \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \Delta_1 \end{pmatrix} H^2(E) \right],$$

является искомым, т.е. $H_1 \in \text{Lat } T$.

Чтобы завершить доказательство теоремы нужно проверить взаимную однозначность указанного соответствия между подпространствами, вложениями η и факторизациями. Для этого, начав с некоторой регулярной факторизации $\theta = \theta_2 \theta_1$, проделаем по цепочке всю процедуру: построим инвариантное подпространство H_1 , по нему - изометрию η , по ней - новую факторизацию $\theta = (\pi_*^* \eta)(\eta^* \pi)$ и убедимся, что она совпадает с исходной.

Тут следует сразу оговорить, что имеется естественный произвол в выборе вспомогательного пространства F . Можно выбрать другое пространство, скажем F_1 , той же размерности и произвольный унитарный оператор V , отождествляющий F и F_1 : $V F = F_1$. Тогда вложение $\eta: L^2(F) \rightarrow \mathcal{H}$ заменится на $\eta_1 = \eta V^*: L^2(F_1) \rightarrow \mathcal{H}$ и факторизация $\theta = \theta_1 \theta_2$ на факторизацию $\theta = (\theta_1 V^*)(V \theta_2)$. Все эти объекты естественно считать эквивалентными и не различать. Впрочем и исходный оператор T мы рассматриваем с точностью до унитарной эквивалентности, а характеристическую функцию θ - с точностью до постоянных унитарных множителей слева и справа, т.е. с точностью до выбора подпространств E и E_* .

Итак, фиксируем регулярную факторизацию $\theta = \theta_2 \theta_1$.

По ней строим подпространство H_1 по указанной выше формуле. Тогда

$$\begin{aligned}
G \oplus H_1 &= \pi H^2(E) \oplus H_1 = \\
&= \begin{pmatrix} \theta \\ \Delta_1 \\ \Delta_2 \theta_1 \end{pmatrix} H^2(E) \oplus \begin{pmatrix} \theta_2 0 \\ 0 I \\ \Delta_2 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} H^2(F) \\ L_{\Delta_1}^2(E) \end{pmatrix} \ominus \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \Delta_1 \end{pmatrix} H^2(E) \right] = \\
&= \begin{pmatrix} \theta_2 \\ 0 \\ \Delta_2 \end{pmatrix} H^2(F) \oplus \begin{pmatrix} 0 \\ L_{\Delta_1}^2(E) \\ 0 \end{pmatrix}, \\
\text{т.е. } R_1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ L_{\Delta_1}^2(E) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \gamma = \begin{pmatrix} \theta_2 \\ 0 \\ \Delta_2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

и окончательно проверяем, что новая факторизация $\theta = (\pi_*^* \gamma)(\gamma^* \pi)$:

$$\begin{aligned}
\pi_*^* \gamma &= (I, 0, 0) \begin{pmatrix} \theta_2 \\ 0 \\ \Delta_2 \end{pmatrix} = \theta_2, \\
\gamma^* \pi &= (\theta_2^*, 0, \Delta_2) \begin{pmatrix} \theta \\ \Delta_1 \\ \Delta_2 \theta_1 \end{pmatrix} = \theta_2^* (\theta_2 \theta_1) + \Delta_2 \theta_1 = \theta_1,
\end{aligned}$$

совпадает с исходной, что и завершает доказательство теоремы. ●

3. Теорема о подъеме

Теорема Секефальви-Надя-Фойаша о подъеме утверждает, что для каждого оператора $X, X: H_1 \rightarrow H_2$, сплетающего сжатия T_i в пространствах H_i найдется оператор Y , $\|Y\| = \|X\|$, сплетающий минимальные унитарные дилатации U_i операторов T_i , сохраняющий структуру пространства минимальной унитарной дилатации:

$$Y G_1 \subset G_2, \quad Y^* G_{*2} \subset G_{*1},$$

и такой, что его компрессия $P_{H_2} Y|_{H_1}$ совпадает с оператором X .

Легко проверяется обратное утверждение: если оператор $Y: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ удовлетворяет условиям

$$Y U_1 = U_2 Y, \quad Y G_1 \subset G_2, \quad Y^* G_{*2} \subset G_{*1}, \quad (I)$$

то компрессия оператора Y , $X \stackrel{\text{def}}{=} P_{H_2} Y|_{H_1}$, сплетает сжатия T_1 и T_2 , т.е. $X T_1 = T_2 X$.

При работе с функциональной моделью оператора естественно

использовать функциональную параметризацию сплетающих операторов, в частности, операторов из коммутанта. Построение такой параметризации является основным результатом работы С.-Надя-Фойаша [4]. В несколько отличающейся форме получается естественная параметризация, если исходить из бескоординатной функциональной модели. А именно, справедлива следующая теорема.

3.1. ТЕОРЕМА о параметризации. Пусть \mathcal{H}_2 - пространство минимальных унитарных дилатации U_i вполне неунитарных сжатий, $i = 1, 2$. Тогда для того, чтобы ограниченный оператор Y , действующий из \mathcal{H}_1 в \mathcal{H}_2 удовлетворял соотношениям (I) необходимо и достаточно, чтобы оператор Y имел вид

$$Y = \pi_{*2} A_* \pi_{*1}^* + \tau_2 \Delta_2 A \pi_1^* + \tau_2 B \tau_{*1}^* , \quad (2)$$

где $A_* \in H^\infty(E_{*1} \rightarrow E_{*2})$, $A \in H^\infty(E_1 \rightarrow E_2)$ - произвольная пара аналитических оператор-функций, связанных соотношением

$$A_* \theta_1 = \theta_2 A ,$$

а B - произвольная функция из $L^\infty(P_{\Delta_{*1}} E_1 \rightarrow P_{\Delta_2} E_2)$,

$P_\Delta(\zeta)$ - проекторно-значная функция, значения которой суть проекторы на подпространство $\text{clos } \Delta(\zeta)E$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. То, что оператор Y , имеющий вид (2), удовлетворяет условиям (I), почти очевидно. Поскольку все операторы π и τ сплетают операторы умножения на z с соответствующей унитарной дилатацией, а операторы A, A_* и B коммутируют с z , ясно, что $YU_i = U_i Y$. Проверим выполнение вclusions:

$$\begin{aligned} YG_1 &= (\pi_{*2} A_* \pi_{*1}^* + \tau_2 \Delta_2 A \pi_1^* + \tau_2 B \tau_{*1}^*) \pi_1 H^2(E_1) = \\ &= (\pi_{*2} A_* \theta_1 + \tau_2 \Delta_2 A) H^2(E_1) = (\pi_{*2} \theta_2 + \tau_2 \Delta_2) A H^2(E_1) = \\ &= \pi_{*2} A H^2(E_1) \subset \pi_{*2} H^2(E_2) = G_2 ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y^* G_{*2} &= (\pi_{*1} A_*^* \pi_{*2}^* + \pi_1 A^* \Delta_2 \tau_2^* + \tau_{*1} B \tau_2^*) \pi_{*2} H^2(E_{*2}) = \\ &= \pi_{*1} A_*^* H^2(E_{*2}) \subset \pi_{*1} H^2(E_{*1}) = G_{*1} . \end{aligned}$$

Теперь проверим, что оператор Y , удовлетворяющий условиям (I), имеет вид (2) для некоторых A, A_* и B .

Условие $YG_1 \subset G_2$ запишем в виде $Y\pi_1 H^2(E_1) \subset \pi_{*2} H^2(E_2)$ и введем оператор

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \pi_{*2}^* Y \pi_1 . \quad (3)$$

Поскольку

$$Az = \pi_2^* \Upsilon \pi_1 z = \pi_2^* \Upsilon U_1 \pi_1 = \pi_2^* U_2 \Upsilon \pi_1 = zA,$$

оператор A является оператором умножения на ограниченную измеримую функцию, которая, более того, является аналитической, так как

$$A \mathbb{H}^2(E_1) = \pi_2^* \Upsilon \pi_1 \mathbb{H}^2(E_1) \subset \pi_2^* \pi_2 \mathbb{H}^2(E_2) = \mathbb{H}^2(E_2).$$

Из условия $\Upsilon \pi_1 \mathbb{H}^2(E_1) \subset \pi_2 \mathbb{H}^2(E_2)$ вытекает, что $\Upsilon \pi_1 L^2(E_1) \subset \pi_2 L^2(E_2)$, т.е. $\text{Range } \Upsilon \pi_1 \subset \text{Range } \pi_2$, а следовательно,

$$\Upsilon \pi_1 = (\pi_2 \pi_2^*) \Upsilon \pi_1 = \pi_2 A.$$

Аналогичным образом условие $\Upsilon^* G_{*2} \subset G_{*1}$ приводит к аналитической функции A_* ,

$$A_* \stackrel{\text{def}}{=} \pi_{*2}^* \Upsilon \pi_{*1} \quad (4)$$

которая удовлетворяет соотношению $\pi_{*2}^* \Upsilon = A_* \pi_{*1}^*$. А следовательно, между функциями A и A_* существует связь

$$A_* \theta_1 = A_* \pi_{*1}^* \pi_1 = \pi_{*2}^* \Upsilon \pi_1 = \pi_{*2}^* \pi_2 A = \theta_2 A.$$

Теперь попробуем восстановить оператор Υ , если определены равенствами (3) и (4) функции A и A_* .

$$\begin{aligned} \Upsilon &= (\pi_{*2} \pi_{*2}^* + \tau_2 \tau_2^*) \Upsilon = \pi_{*2} A_* \pi_{*1}^* + \tau_2 \tau_2^* \Upsilon (\pi_1 \pi_1^* + \tau_{*1} \tau_{*1}^*) = \\ &= \pi_{*2} A_* \pi_{*1}^* + \tau_2 \tau_2^* \pi_2 A \pi_1 + \tau_2 (\tau_2^* \Upsilon \tau_{*1}^*) \tau_{*1}^* = \\ &= \pi_{*2} A_* \pi_{*1}^* + \tau_2 \Delta_2 A \pi_1 + \tau_2 B \tau_{*1}^*, \end{aligned}$$

где мы положили $B \stackrel{\text{def}}{=} \tau_2^* \Upsilon \tau_{*1}^*$. Ясно, что $B: L_{\Delta_{*1}}^2(E_{*1}) \rightarrow L_{\Delta_2}^2(E_2)$, сплетает операторы умножения на z в этих пространствах, т.е. B есть оператор умножения на функцию из $L^\infty(P_{\Delta_{*1}} E_1 \rightarrow P_{\Delta_2} E_2)$. При желании можно считать B функцией из $L^\infty(E_1 \rightarrow E_2)$, равной нулю на $\text{Ker } \Delta_{*1}$ и имеющий образ в ортогональном дополнении к $\text{Ker } \Delta_2$.

3.2. ЗАМЕЧАНИЕ. Нетрудно получить "симметричную" запись оператора Υ :

$$\Upsilon = \pi_2 A \pi_1^* + \pi_{*2} A_* \Delta_{*1} \tau_{*1}^* + \tau_2 B \tau_{*1}^* \quad (5)$$

Эту формулу можно получить из формулы (2), записав оператор

π_{*1}^* в виде $\pi_{*1}^* = \theta_1 \pi_1^* + \Delta_{*1} \tau_{*1}^*$ и воспользовавшись соотношением $A_* \theta_1 = \theta_2 A$, а можно ее получить и непосредственно:

$$\begin{aligned} Y &= Y(\pi_1 \pi_1^* + \tau_{*1} \tau_{*1}^*) = \pi_2 A \pi_1^* + (\pi_{*2} \pi_{*2}^* + \tau_2 \tau_2^*) Y \tau_{*1} \tau_{*1}^* = \\ &= \pi_2 A \pi_1^* + \pi_{*2} A_* \Delta_{*1} \tau_{*1}^* + \tau_2 B \tau_{*1}^* . \end{aligned}$$

3.3. ЗАМЕЧАНИЕ. Если не предполагать полной неунитарности исходных сжатий, то к пространству минимальной унитарной дилатации вполне неунитарной части оператора нужно будет добавить то подпространство, на котором исходное сжатие унитарно. Пусть спектральная теорема дает реализацию этой унитарной части, как умножение на \bar{z} в некотором L_{μ}^2 и σ - изометрическое вложение L_{μ}^2 в \mathcal{H} , осуществляющее эту реализацию, т.е. сплетающее умножение на \bar{z} в L_{μ}^2 с унитарным оператором U в \mathcal{H} . Тогда оператор Y , удовлетворяющий условиям (I), будет параметризоваться большим числом функций

$$\begin{aligned} Y &= \pi_{*2} A_* \pi_{*1}^* + \tau_2 \Delta_2 A \pi_1^* + \tau_2 B \tau_{*1}^* + \\ &+ \sigma_2 \Gamma_1 \sigma_1^* + \sigma_2 \Gamma_2 \tau_{*1}^* + \sigma_2 \Gamma_{12} \sigma_1^* , \end{aligned}$$

где ограниченные функции Γ_1, Γ_2 и Γ_{12} действуют как операторы умножения $\Gamma_1: L_{\mu_1}^2 \rightarrow L_{\Delta_2}^2(E_2)$, $\Gamma_2: L_{\Delta_{*1}}^2(E_{*1}) \rightarrow L_{\mu_2}^2$, $\Gamma_{12}: L_{\mu_1}^2 \rightarrow L_{\mu_2}^2$ и являются свободными параметрами, т.е. могут задаваться независимо. Если оператор Y задан, то параметры Γ определяются формулами:

$$\Gamma_1 = \tau_2^* Y \sigma_1, \quad \Gamma_2 = \sigma_2^* Y \tau_{*1}, \quad \Gamma_{12} = \sigma_2^* Y \sigma_1 .$$

3.4. ТЕОРЕМА УМНОЖЕНИЯ. Пусть $Y_{21}: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ и $Y_{32}: \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_3$ удовлетворяют условию (I). Тогда оператор $Y_{31} = Y_{32} \stackrel{\text{def}}{=} Y_{32} Y_{21}$ также удовлетворяет условию (I) и его параметры вычисляются по следующим формулам:

$$A_{31} = A_{32} A_{21}, \quad A_{*31} = A_{*32} A_{*21},$$

$$B_{31} = \Delta_3 A_{32} \theta_2^* A_{*21} \Delta_{*1} + B_{32} \Delta_{*2} A_{*21} \Delta_{*1} + \Delta_3 A_{32} \Delta_2 B_{21} - B_{32} \theta_2 B_{21} .$$

Кроме параметров A и A_* мультипликативными являются также функции

$$C \stackrel{\text{def}}{=} \tau_2^* Y \tau_1 = \Delta_2 A \Delta_1 - B \theta_1 ,$$

$$C_* \stackrel{\text{def}}{=} \tau_{*2}^* Y \tau_{*1} = \Delta_{*2} A_* \Delta_{*1} - \theta_2 B.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$$A_{31} = \pi_3^* Y_{31} \pi_1 = \pi_3^* Y_{32} Y_{21} \pi_1 = \pi_3^* Y_{32} \pi_2 A_{21} = A_{32} A_{21}.$$

Аналогично проверяется мультипликативность функции A_*

$$\begin{aligned} B_{31} &= \tau_3^* Y_{31} \tau_{*1} = \tau_3^* Y_{32} (\pi_{*2} \pi_{*2}^* + \tau_2 \tau_2^*) Y_{21} \tau_{*1} = \\ &= \tau_3^* Y_{32} (\pi_{*2} A_{*21} \pi_{*1}^* \tau_{*1} + \tau_2 B_{21}) = \\ &= \tau_3^* Y_{32} [(\pi_2 \theta_2^* + \tau_{*2} \Delta_{*2}) A_{*21} \Delta_{*1} + (\pi_2 \Delta_2 - \tau_{*2} \theta_2) B_{21}] = \\ &= (\tau_3^* \pi_3 A_{32} \theta_2^* + B_{32} \Delta_{*2}) A_{*21} \Delta_{*1} + (\tau_3^* \pi_3 A_{32} \Delta_2 - B_{32} \theta_2) B_{21} = \\ &= \Delta_3 A_{32} \theta_2^* A_{*21} \Delta_{*1} + B_{32} \Delta_{*2} A_{*21} \Delta_{*1} + \Delta_3 A_{32} \Delta_2 B_{21} - B_{32} \theta_2 B_{21}. \end{aligned}$$

Мультипликативность функций C и C_* проверяется одинаково.

Докажем, к примеру, мультипликативность функций C .

$$\begin{aligned} C_{31} &= \tau_3^* Y_{31} \tau_1 = \tau_3^* Y_{32} (\pi_{*2} \pi_{*2}^* + \tau_2 \tau_2^*) Y_{21} \tau_1 = \\ &= \tau_3^* Y_{32} \pi_{*2} A_{*21} \pi_{*1}^* \tau_1 + C_{32} C_{21} = C_{32} C_{21}, \end{aligned}$$

поскольку $\pi_{*1}^* \tau_1 = 0$. ●

Выясним теперь ту неоднозначность, с которой оператором X задается его подъем Y .

3.5. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Оператор $P_{H_2} Y|_{H_1}$ равен нулю в том и только в том случае, когда $Y = \pi_2 \Gamma \pi_{*1}^*$ для некоторой функции Γ , $\Gamma \in H^{\infty}(E_{*1} \rightarrow E_2)$, другими словами, когда

$$A = \Gamma \theta_1, \quad A_* = \theta_2 \Gamma, \quad B = \Delta_2 \Gamma \Delta_{*1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Gamma \in H^{\infty}(E_{*1} \rightarrow E_2)$, $Y = \pi_2 \Gamma \pi_{*1}^*$ и $h \in H_1$. Тогда $\pi_{*1}^* h \in H^2(E_{*1})$, $\Gamma \pi_{*1}^* h \in H^2(E_2)$ и $Y h \in \pi_2 H^2(E_2) = G_2$ т.е. $Y h \perp H_2$.

Пусть теперь $P_{H_2} Y|_{H_1} = 0$. А так как $Y G_1 \subset G_2$, то и $P_{H_2} Y|_{H_1} \oplus G_1 = 0$. Включение $Y^* G_{*2} \subset G_{*1}$ равносильно включению $Y(H_1 \oplus G_1) \subset H_2 \oplus G_2$ а поэтому условие $P_{H_2} Y|_{H_1} \oplus G_1 = 0$ равносильно включению $Y(H_1 \oplus G_1) \subset G_2$, т.е.

$$Y(\pi_{*1} H^2(E_{*1}) \oplus \tau_1(L_{\Delta_1}^2(E_1))) \subset \pi_2 H^2(E_2).$$

Применяя к обеим частям этого включения оператор U^{**} и устремляя n к ∞ , получим $Y\mathcal{H}_1 \subset \pi_2 L^2(E_2)$, т.е. $\tau_{*2}^* Y = 0$. Аналогично применяя оператор U^{**} в пределе получаем $Y\tau_1 L_{\Delta_1}^2(E_1) \subset \{0\}$, т.е. $Y\tau_1 = 0$.

Теперь введем функцию Γ , $\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \pi_2^* Y \pi_{*1}$; включение $Y\pi_{*1} H^2(E_{*1}) \subset \pi_2 H^2(E_2)$ влечет ее аналитичность, т.е. $\Gamma \in H^\infty(E_{*1} \rightarrow E_2)$. И, наконец,

$$Y = (\pi_2 \pi_{*2}^* + \tau_{*2} \tau_{*2}^*) Y (\pi_{*1} \pi_{*1}^* + \tau_1 \tau_1^*) = \pi_2 \Gamma \pi_{*1}^*.$$

Приведенные в формулировке выражения параметров A, A_* и B через функцию Γ следуют непосредственно из определений, например:

$$A = \pi_2^* Y \pi_1 = \pi_2^* \pi_2 \Gamma \pi_{*1}^* \pi_1 = \Gamma \theta_1. \quad \bullet$$

В заключение приведем вид оператора Y в различных конкретных модельных представлениях.

3.6. Модель Надя-Фойаша. Приходящее представление.

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} L^2(E_*) \\ L_{\Delta}^2(E) \end{pmatrix}, \quad \pi = \begin{pmatrix} \theta \\ \Delta \end{pmatrix}, \quad \pi_* = \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix}, \quad \tau_* = \begin{pmatrix} \Delta_* \\ -\theta^* \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} A_* & 0 \\ \Delta_2 A \theta_1^* + B \Delta_{*1} & \Delta_2 A \Delta_1 - B \theta_1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что в правом нижнем углу стоит функция C , поэтому из этого представления сразу вытекает утверждение теоремы 3.4 о мультипликативности C .

3.7. Модель Надя-Фойаша. Уходящее представление.

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} L^2(E) \\ L_{\Delta_*}^2(E_*) \end{pmatrix}, \quad \pi = \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \pi_* = \begin{pmatrix} \theta^* \\ \Delta_* \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} \Delta \\ -\theta \end{pmatrix}, \quad \tau_* = \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} A & \theta_2^* A_* \Delta_{*1} + \Delta_2 B \\ 0 & \Delta_{*2} A_* \Delta_{*1} - \theta_2 B \end{pmatrix}.$$

3.8. Модель Надя-Фойаша. Смешанное представление. Если выбрать для пространства \mathcal{H}_1 уходящее представление, а для пространства \mathcal{H}_2 - приходящее, то получим

$$Y = \begin{pmatrix} \theta_2 A & A_* \Delta_{*1} \\ \Delta_2 A & B \end{pmatrix}.$$

3.9. Модель Павлова

$$\mathcal{H} = L^2(E_* \oplus E, \begin{pmatrix} I & \theta \\ \theta^* & I \end{pmatrix}),$$

$$\pi_* = \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \pi_*^* = (I, \theta), \quad \pi = \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix}, \quad \pi^* = (\theta^*, I),$$

$$\tau = \begin{pmatrix} -\theta \\ I \end{pmatrix} \Delta^{-1}, \quad \tau^* = (0, \Delta), \quad \tau_* = \begin{pmatrix} I \\ -\theta^* \end{pmatrix} \Delta_*^{-1}, \quad \tau_*^* = (\Delta_*, 0).$$

$$Y = \begin{pmatrix} A_* \Delta_{*1}^2 - \theta_2 \Delta_2^{-1} B \Delta_{*1} & 0 \\ A \theta_1^* + \Delta_2^{-1} B \Delta_{*1} & A \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} A_* & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\theta_2 \\ I \end{pmatrix} (A \theta_1^* + \Delta_2^{-1} B \Delta_{*1}) (I, 0).$$

3.10. Модель де Бранжа-Ровняка.

$$\mathcal{H} = L^2(E_* \oplus E, \begin{pmatrix} I & \theta \\ \theta^* & I \end{pmatrix}^{-1}),$$

$$\pi_* = \begin{pmatrix} I \\ \theta^* \end{pmatrix}, \quad \pi_*^* = (I, 0), \quad \pi = \begin{pmatrix} \theta \\ I \end{pmatrix}, \quad \pi^* = (0, I),$$

$$\tau = \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta \end{pmatrix}, \quad \tau^* = \Delta^{-1}(-\theta^*, I), \quad \tau_* = \begin{pmatrix} \Delta_* \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_*^* = \Delta_*^{-1}(I, -\theta).$$

$$Y = \begin{pmatrix} A_* & 0 \\ \theta_2^* A_* + \Delta_2 B \Delta_{*1}^{-1} & \Delta_2^2 A - \Delta_2 B \Delta_{*1}^{-1} \theta_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} A_* & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} (\theta_2^* A_* + \Delta_2 B \Delta_{*1}^{-1}) (I, -\theta).$$

Литература

1. N i k o l s k i i N.K., V a s y u n i n V.I. A unified approach to function models, and the transcription problem. Preprint LOMI E-5-86, 1986.
2. Н и к о л ь с к и й Н.К., Х р у щ ё в С.В. Функциональная модель и некоторые задачи спектральной теории функций. - Труды МИАН, 1987, т.176, с.97-210.
3. С е к е ф а л ь в и - Н а д ь Б., Ф о я ш Ч. Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. М., Мир, 1970.
4. S z . - N a g y В., F o i a ş С. On the structure of intertwining operator. - Acta Sci.Math., 1973, t.35, p.225-254.

V.I. Vasyunin. Two classical theorems of function model theory via the coordinate-free approach.

Summary

The aim of the paper is to present a new approach to the proof of two well-known theorems of Sz.-Nagy-Foiaş: the first one concerns the correspondence between invariant subspaces of a given contraction T and regular factorizations of the characteristic function Θ_T of T , the second one is the commutant lifting theorem. The proofs are based on the coordinate-free approach to the functional model. In other words, a concrete spectral representation of a minimal unitary dilation is not fixed. The essential point in the first theorem is an assertion in terms of functional mappings $\eta: L^2(F) \rightarrow \mathcal{H}$ (\mathcal{H} is the space of a minimal unitary dilation U) equivalent to the existence of an invariant subspace of T . As to the lifting theorem, our approach provides us with a new parametrization of lifted operator that seems to be more natural than the known Sz.-Nagy - Foias parametrization.