С.В.Соловьев

О ЕСТЕСТВЕННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ СУПЕРПОЗИЦИЙ ВЫДЕЛЕННЫХ ФУНКТОРОВ В НЕКОТОРЫХ ЗАМКНУТЫХ КАТЕГОРИЯХ

Введение. Отправной точкой для данной работы послужила задача описания всех естественных преобразований (е.п.) суперпозиций тензорного произведения $\otimes$, внутреннего hom-функтора $[\,,\,]$ и прямой суммы (бипроизведения) $\oplus$ в категории конечнопорожденных проективных модулей над коммутативным кольцом I с 1 (далее ПМ (I)). В дальнейшем выяснилось, что эту задачу целесообразно ставить в более общих терминах, рассматривая замкнутые категории различных типов. Как оказалось, центральную роль играет свойство выделенного объекта (для ПМ (I) это кольцо I) быть образующим. При этом условии были получены: (а) полное описание е.п. суперпозиций $\otimes$ и $[\,,\,]$ в так называемых компактных замкнутых (КЗ) категориях, в том числе в ПМ(I); (б) полное описание е.п. в КЗ категориях, обогащенных функтором $\oplus$, для некоторого достаточно общего класса суперпозиций $\otimes, [\,,\,]$ и $\oplus$; (в) некоторые более ограниченные результаты для симметрических моноидальных замкнутых (СМЗ) категорий; (г) во всех ситуациях, где применимы перечисленные результаты - легко проверяемое условие коммутативности диаграммы произвольных е.п. Эти результаты в какой-то мере заполняют пробел в изучении е.п. в замкнутых категориях: до сих пор рассматривались обычно е.п. порожденные е.п., принадлежащими структуре замкнутых категорий (так называемые канонические морфизмы или канонические е.п.); см., например,[I], [2],[3].

I. СМЗ категория определяется следующими данными: категорией K, объектом $I \in Ob(K)$, функторами $\otimes : K \times K \to K$ и $[\,,\,] : K^{op} \times K \to K$, естественными изоморфизмами

$$a = a_{XYZ} : (X \otimes Y) \otimes Z \to X \otimes (Y \otimes Z), \quad c = c_{XY} : X \otimes Y \to Y \otimes X,$$

$$r = r_X : X \otimes I \to X, \quad \pi = \pi_{XYZ} : Hom(X \otimes Y, Z) \to Hom(X, [Y, Z])$$

(детали см. в [I]).

КЗ категория - это СМЗ категория, обогащенная двумя дополнительными естественными изоморфизмами $\zeta = \zeta_{XY} : [X,Y] \to Y \otimes [X,I]$ и $\eta = \eta_X : [[X,I],I] \to X$. ζ и η должны подчиняться некоторым соотношениям. Это определение слегка отличается от рассмотренного в [3] , но эквивалентно ему. Условия на ζ, η без труда выводятся из условия, рассмотренных в [3] .

КЗ категория с бипроизведением ($КЗ^+$ категория) – это КЗ категория, к структуре которой добавлены функтор $\oplus : K \times K \to K$, нулевой объект $0 \in Ob(K)$, естественные проекции и инъекции $\oplus$, подчиняющиеся всем условиям, необходимым для того, чтобы $\oplus$ был бипроизведением (см. [4]), е.п., обеспечивающие универсальные свойства 0, а также изоморфизмы

$$d = d_{XYZ} : X \otimes (Y \oplus Z) \to (X \otimes Y) \oplus (X \otimes Z)$$

$$s = s_{XYZ} : [X \oplus Y, Z] \to [X, Z] \oplus [Y, Z], \quad s' = s'_{XYZ} : [X, Y \oplus Z] \to [X, Y] \oplus [X, Z].$$

Кроме того, предполагается выполнение условий

$$0 \otimes f = 0, \quad f \otimes 0 = 0, \quad [f, 0] = 0, \quad [0, f] = 0.$$

Здесь f – произвольный морфизм, а 0 обозначает нулевые морфизмы с соответствующей областью и кообластью.

Канонические е.п. в категориях соответствующего типа – это е.п., которые можно получить из е.п., принадлежащих их структуре при помощи принадлежащих структуре функторов и композиции.

Как обычно, " $I \in Ob(K)$ – образующий" $\Longleftrightarrow$ " для любых морфизмов $f, g : X \to Y \in Mor(K)$ $f \neq g$ влечет $f \cdot h \neq g \cdot h$ для некоторого $h : I \to X \in Mor(K)$."

2. Рассмотрим два списка переменных $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ и $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n, \ldots$. Переменные первого списка назовем ковариантными, а второго контравариантными. Переменные x и $\bar{x}$ будем называть сопряженными. Пусть $I, 0$ – константы. Будем обозначать через $\bar{F}$ результат замены всех переменных x_i в выражении F на $\bar{x}_i$ и наоборот $(1 \leq i < \infty)$. Определим индуктивно понятие формы.

I. Ковариантные переменные и константы суть формы.

2. Если F, G – формы, то $(F \otimes G), [F, G], [\bar{F}, G]$ – формы. $(\otimes, [\,,])$ – форма – это форма, которая не содержит символов $\oplus$, 0. Ниже, если рассматриваются СМЗ или КЗ категории без бипроизведения, все формы предполагаются $(\otimes, [\,,])$ –формами.

Пусть K – категория, $\sigma = \bar{x}_{i_1}, \ldots, \bar{x}_{i_n}, x_{j_1}, \ldots, x_{j_m}$ – список переменных. Здесь и далее будем считать, что в любом рассматриваемом списке переменных $i_1 < \ldots < i_n$, $j_1 < \ldots < j_m$. Через K^σ обозначим категорию $\underbrace{K^{op} \times \ldots \times K^{op}}_{n} \times \underbrace{K \times \ldots \times K}_{m}$. Пусть F – форма, σ_F – список входящих в нее переменных. Поставим ей в соответствие функтор $|F|_K : K^{\sigma_F} \longrightarrow K$. Значение $|F|_K$ определяется как значение терма, получающегося из F при подстановке

элементов набора $(X_1,\dots,X_n,X_{n+1},\dots,X_{n+m})\in Ob(K^{\sigma_F})$ или $Mor(K^{\sigma_F})$ вместо соответствующих переменных из списка σ_F и интерпретации $I, 0, \otimes, [\,,\,], \oplus$ как объектов и функторов K соответственно. Очевидно, все суперпозиции интересующих нас функторов имеют вид $|F|_K$ для некоторой формы F. Более того, когда нет отождествлений аргументов (не рассматриваются суперпозиции с диагональными функторами $\Delta: K \longrightarrow K\times K$) можно обойтись рассмотрением форм, содержащих не более одного вхождения каждой переменной.

Типом будем называть выражение вида $F\to G$, где F,G - формы. Е.п. функтора $|F|_K$ в $|G|_K$ будем называть е.п. типа $F\to G$. Очевидно, каждое е.п. суперпозиций $\otimes, \oplus, [\,,\,]$ характеризуется (вообще говоря, неединственным) типом. Тип называется ($\otimes, [\,,\,]$)-типом, если F,G - ($\otimes, [\,,\,]$)-формы. ($\otimes,[\,,\,]$)-тип $F\to G$ называется уравновешенным, если любые два вхождения одной и той же переменной в $F\to G$ лежат по разные стороны от стрелки, и, кроме того, если в F (в G) входят одновременно x и $\bar{x}$, то ни x, ни $\bar{x}$ не входит в G (в F) (ср. [5]). ($\otimes, [\,,\,]$)-тип называется сингулярным, если найдется переменная, все вхождения которой лежат с одной стороны от стрелки, а все вхождения сопряженной переменной, если они имеются, с противоположной стороны от стрелки. Назовем два вхождения v_1, v_2 переменных в тип $F\to G$ смежными, если оба лежат в F (в G) и нет вхождений форм вида $H_1\oplus H_2$ в $F\to G$, таких, что одно из v_1, v_2 лежит в H_1, а другое в H_2. Назовем тип $F\to G$ дистрибутивно уравновешенным, если в $F\to G$ нет смежных вхождений одной и той же переменной, а если в F (в G) имеются смежные вхождения x и $\bar{x}$, то ни x, ни $\bar{x}$ не входит в G (в F).

ПРИМЕР. Следующие типы являются уравновешенным, сингулярным и дистрибутивно уравновешенным соответственно:

$$[\bar{x}_1, x_2]\otimes x_1 \to x_2;\quad x_1\otimes x_1 \to [\bar{x}_1, I];\ (x_1\otimes x_2)\oplus[\bar{x}_1, x_2]\to x_2\otimes x_1.$$

3. При наличии сопряженной ассоциативности π целесообразно пользоваться несколько обобщенным понятием естественности. Уже единица $\delta=\delta_{XY}: X\to[Y, X\otimes Y]$ и коединица $\varepsilon=\varepsilon_{XY}: [X,Y]\otimes X\to Y$ сопряжения не являются е.п. в обычном смысле. Подходящее понятие естественности можно найти в [6]. Если переменная входит в F и G типа $F\to G$, а сопряженная к ней не входит ни в F ни в G, условие естественности по ней совпадает с обычным. В общем случае условие естественности пишется для каждой пары сопряженных переменных. Композиция обобщенных е.п. не всегда определена, но

для наших целей достаточно "хороших" частных случаев, рассматриваемых в [6] . Далее е.п. понимается в обобщенном смысле.

4. Всюду ниже $I \in Ob(K)$ - образующий. Пусть К СМЗ категория.

ЛЕММА I. Если $\varphi: |[\bar{x}_i, I] \otimes x_i| \to |G|$ - е.п., и $\bar{x}_i, x_i$ не входят в G , то $\varphi = \varphi_0 \cdot \varepsilon$, где $\varphi_0: |I| \to |G|$ - некоторое е.п., а ε - коединица сопряжения.

В доказательстве используется то, что I - образующий.

ТЕОРЕМА I. Если $\varphi: |([\bar{x}_{i_1}, I] \otimes x_{i_1}) \otimes \ldots \otimes ([\bar{x}_{i_n}, I] \otimes x_{i_n})| \to |I|$ - е.п., то найдется $f \in Hom_K(I, I)$ такой, что φ есть композиция

$$|([\bar{x}_{i_1}, I] \otimes x_{i_1}) \otimes \ldots \otimes ([\bar{x}_{i_n}, I] \otimes x_{i_n})| \xrightarrow{\varepsilon \otimes \ldots \otimes \varepsilon} |I \otimes \ldots \otimes I| \xrightarrow{\mu} \ldots \xrightarrow{\mu} |I|.$$

5. В случае, если К - КЗ категория, всякое е.п. $\varphi: |F| \to |G|$ может быть получено из некоторого е.п. типа

$$([\bar{x}_{i_1}, I] \otimes x_{i_1}) \otimes \ldots \otimes ([\bar{x}_{i_n}, I] \otimes x_{i_n}) \to I$$

при помощи композиции с каноническими е.п. и применения π (ср. [3]). Используя теорему I, получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $F \to G$ - уравновешенный тип, $\varphi: |F| \to |G|$ - е.п. Тогда φ можно представить в виде композиции:

$$|F| \xrightarrow{\varphi_0} |G| \xrightarrow{\mu^{-1}} |G \otimes I| \xrightarrow{1 \otimes f} |G \otimes I| \xrightarrow{\mu} |G|,$$

где φ_0 - каноническое е.п., которое строится по $F, G; f \in Hom_K(I, I)$.

6. Пусть К - КЗ$^+$ категория. Всякое е.п. дистрибутивно уравновешенного типа получается из некоторого е.п. типа

$$F_1 \oplus \ldots \oplus F_n \to G_1 \oplus \ldots \oplus G_m,$$

где $F_i \to G_j$ $(1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant m)$ - уравновешенный или сингулярный тип, при помощи композиции с изоморфизмами дистрибутивности.

ЛЕММА 2. Всякое е.п. $\varphi: |F| \to |G|$ в КЗ$^+$ категории, где $F \to G$ сингулярный тип - нулевое.

ЛЕММА 3. Если $\varphi: |F_1 \oplus \ldots \oplus F_n| \to |G_1 \oplus \ldots \oplus G_m|$ - е.п. и $F_i \to G_j$ для всех i, j $(1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant m)$ уравновешенный или сингулярный тип, то $\varphi = \prod_{i=1}^{n} (\coprod_{j=1}^{m} \varphi_{ij})$, где (а) если $F_i \to G_j$ уравновешенный тип, то φ_{ij} имеет вид, описанный в теореме 2, $f \in Hom_K(I, I)$ зависит от i, j ; (б) если $F_i \to G_j$ сингулярный тип, то $\varphi_{ij} = 0$.

ТЕОРЕМА 3. Если $\varphi: |F| \to |G|$ - е.п., и тип $F \to G$ дистрибутивно уравновешенный, то $\varphi = \varphi_1 \cdot \varphi_0 \cdot \varphi_2$, где φ_0 имеет вид, описанный в лемме 3, а φ_1 , φ_2 - канонические е.п., строящиеся по F, G с использованием изоморфизмов дистрибутивности.

7. Учитывая, что параметрами, не определяемыми полностью ти-

пом е.п. в теоремах I-3 являются только морфизмы из $Hom_K(I,I)$ можно доказать следующую теорему:

ТЕОРЕМА 4. Пусть, для произвольного е.п. φ, φ_I обозначает его компоненту при аргументах равных I. Тогда, если φ, ψ: $:|F| \to |G|$ е.п., и выполняются условия одной из теорем I - 3, то $\varphi = \psi \Longleftrightarrow \varphi_I = \psi_I$.

На доказательства теорем 2,3 существенное влияние оказали приложения методов структурной теории доказательств в теории категорий (в особенности работы Г.Е.Минца; см.например [5]). Теоремы I,2, лемма I, частично теорема 4 входили в диссертацию автора, выполненную под руководством Н.А.Шанина в лаборатории математической логики ЛОМИ. Автор благодарен также А.А.Суслину за полезные обсуждения.

Литература

I. Kelly G.M., Mac Lane S. Coherence in closed categories.-J.Pure and Appl.Alg., 1971, vol.1, p.97-140.
2. Mac Lane S. Topology and Logic as a source of Algebra. - Bull. of the AMS, 1976, vol.82, N 1, p.1-40.
3. Kelly G.M., Laplaza M. Coherence in compact closed categories.-J.Pure and Appl.Alg.,1980,vol.19,p.193-213.
4. Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. - М., 1977.
5. Минц Г.Е. Замкнутые категории и теория доказательств. - В кн.: Зап.научн.семинаров ЛОМИ, 1977, т.68, с.83-114.
6. Mac Lane S. Categories for the working mathematician.- Springer, 1971.