Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

Н. В. Азбелев, В. П. Максимов, Уравнения с запаздывающим аргументом,
Дифференц. уравнения, 1982, том 18, номер 12, 2027–2050

https://www.mathnet.ru/de4723

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.91
16 декабря 2025 г., 21:47:45

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ДЕКАБРЬ 1982 г., ТОМ XVIII, № 12

ОБЗОРНЫЕ СТАТЬИ

УДК 517.929

Н. В. АЗБЕЛЕВ, В. П. МАКСИМОВ

УРАВНЕНИЯ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

Математическое описание многих явлений выводит нас за рамки классических дифференциальных уравнений и предлагает все новые и новые виды функционально-дифференциальных уравнений [1—3]. Возникающая таким образом потребность в общих концепциях вызвала интерес многих исследователей к различным обобщениям обыкновенного дифференциального уравнения. Наиболее целенаправленно развивалась теория «обыкновенных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве», где евклидово пространство значений искомой функции заменяется общим банаховым пространством [4—6]. Однако эта теория не охватывает ряд актуальных случаев, в частности, не охватывает уравнения вида

$$\begin{gathered}\dot{x}(t)=f(t, x[h(t)], \ \dot{x}[g(t)]), \quad t\in[a, b],\\ x(\xi)=\varphi(\xi), \quad \dot{x}(\xi)=\psi(\xi), \text{ если } \xi\notin[a, b].\end{gathered} \tag{1}$$

Таким уравнениям и некоторым их обобщениям посвящены многочисленные работы, связанные с прикладными задачами, с попытками установить общую точку зрения на достаточно широкий класс уравнений и с применениями новых схем функционального анализа [7—14]. В цикле работ, которым посвящен обзор [15], заложены основы теории обобщения обыкновенного дифференциального уравнения, содержащего в себе уравнения с отклоняющимся аргументом и уравнения интегро-дифференциальные. Это обобщение основано на рассмотрении с единой точки зрения различных уравнений, решениями которых являются абсолютно непрерывные функции. Границы общности новой теории определяются свойствами операторов, порождаемых уравнениями. Особое место в упомянутой теории заняли уравнения с вольтерровыми (по А. Н. Тихонову [16]) операторами, так называемые «уравнения с последействием» [17] и их частный случай — «уравнения с запаздывающим аргументом» [18, 19]. Актуальным представителем такого обобщения обыкновенного дифференциального уравнения является уравнение (1) в предположении, что $h(t)\leqslant t$, $g(t)\leqslant t$. Уравнения с вольтерровыми операторами оказались изученными наиболее обстоятельно благодаря работам В. Вольтерра, А. Н. Тихонова и Н. Н. Красовского.

Предлагаемая работа представляет собой обзор основных идей и результатов общей теории функционально-дифференциальных уравнений с вольтерровыми операторами. Особое внимание уделяется краевым задачам. Историю функционально-дифференциальных уравнений и специальные вопросы — такие, как устойчивость, колеблемость, периодические решения — мы не затрагиваем, отсылая читателя к соответствующим монографиям [17, 20, 21] и обзорам [2, 3, 22].

Ниже используются обозначения: R^n — евклидово пространство n-мерных векторов с нормой $|\cdot|$, $L^n[0, b]$ — пространство вектор-функций $y:[0, b]\to R^n$ с суммируемыми компонентами и нормой

$$\|y\|_{L^n[0,\,b]}=\int_0^b |y(s)|\,ds,$$

$D^n[0,\ b]$ — пространство вектор-функций $x:[0,\ b]\to R^n$ с абсолютно непрерывными компонентами и нормой

$$\|x\|_{D^n[0,\,b]}=|x(0)|+\|\dot{x}\|_{L^n[0,\,b]},$$

E — единичная матрица, J — тождественный оператор. Индекс $[0,\ b]$ в обозначении пространств будем опускать, если это не вызывает недоразумений.

§ 1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЯХ

Некоторые уравнения с запаздывающим аргументом, даже очень простые внешне, приводят к загадкам и парадоксам [1, 23], если смотреть на них с привычной точки зрения классической теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Например, для уравнения

$$\dot{x}(t)-\dot{x}\left(\frac{t}{2}\right)-x(t)=f(t),\quad t\in[0,\ \infty),$$

задача Коши ($x(0)=\alpha$) разрешима лишь при специальных α и f, причем решение не будет единственным ни при каких α и f. Если же подойти к приведенному примеру с позиций общей теории, то мы не встретим здесь затруднений: пример служит хорошей иллюстрацией теоремы 3 работы [24].

Здесь мы сформулируем основные положения общей теории линейных функционально-дифференциальных уравнений применительно к уравнению

$$(\mathscr{L}x)(t)\overset{\text{def}}{=}(Q\dot{x})(t)+A(t)x(0)=f(t),\quad t\in[0,\ \infty),\tag{2}$$

где главная часть Q оператора $\mathscr{L}$ имеет вид

$$(Qy)(t)=y(t)-\frac{d}{dt}\int_0^t Q(t,\ s)y(s)\,ds.\tag{3}$$

Уравнение (2) будем рассматривать в следующих предположениях.

I. При каждом фиксированном $b>0$ элементы $q_{ij}(t,\ s)$ $n\times n$-матрицы $Q(t,\ s)$ в треугольнике $\Delta_b=\{(t,\ s):0\leqslant s\leqslant t\leqslant b\}$ удовлетворяют условиям: $q_{ij}(t,\ s)$ измеримы по совокупности переменных, при каждом фиксированном $t\in(0,\ b]$ функции $q_{ij}(t,\ s)$ аргумента s измеримы и ограничены, $q_{ij}(t,\ s)$ при каждом фиксированном $s\in[0,\ b)$ являются функциями ограниченной вариации, причем

$$\sup_{s\in[0,\,b)}\bigvee_{t=s}^{b} q_{ij}(t,\ s)<+\infty,$$

функции $\int_0^{\min\{t,\,\tau\}} q_{ij}(t,\ s)\,ds$ аргумента t абсолютно непрерывны при любом $\tau\in(0,\ b]$.

II. При каждом фиксированном $b>0$ компоненты вектор-функции $f:[0,\ b]\to R^n$ и элементы $n\times n$-матрицы A суммируемы на отрезке $[0,\ b]$.

III. При каждом фиксированном $b>0$ и каждом $z\in L^n[0,\ b]$ для уравнения $Qy=z$ в пространстве $L^n[0,\ b]$ сходятся последовательные приближения (спектральный радиус оператора $(Q-J):L^n[0,\ b]\to L^n[0,\ b]$ меньше единицы).

Решение уравнения (2) — такая вектор-функция $x:[0,\ \infty)\to R^n$ с абсолютно непрерывными на каждом конечном отрезке $[0,\ b]$ компонентами, которая удовлетворяет (2) при почти всех $t>0$.

Равенство (3) определяет при выполнении условий I общий вид линейного ограниченного вольтеррова оператора в пространстве L^n. Таким образом, в предположениях I и II уравнение (2) — общий случай линейного уравнения с ограниченным при каждом $b>0$ линейным вольтерровым оператором $\mathscr{L}: D^n[0, b]\to L^n[0, b]$.

Как показано в [24], задача Коши

$$\mathscr{L}x=f, \quad x(0)=\alpha \tag{4}$$

при выполнении условия III однозначно разрешима при любых $\alpha\in R^n$ и $f\in L^n$. В случае $\alpha=0$ задача (4) имеет вид $Q\dot{x}=f$, $x(0)=0$. Следовательно, для производной искомого решения имеем равенство $\dot{x}=Q^{-1}f$. Пользуясь общим видом непрерывно действующего в L^n вольтеррова оператора, последнее равенство можно записать так: $\dot{x}(t)=$ $=\frac{d}{dt}\int\limits_0^t C(t, s)f(s)ds$, откуда $x(t)=\int\limits_0^t C(t, s)f(s)ds$. Ядро $C(t, s)$ интегрального оператора $C: L^n\to D^n$ в правой части полученного представления решения полуоднородной задачи (4) называют матрицей Коши [15, 20, 24]. Столбцы $n\times n$-матрицы X, определяемой равенством

$$X(t)=E-\int\limits_0^t C(t, s)A(s)ds,$$

удовлетворяют однородному уравнению $\mathscr{L}x=0$ и составляют фундаментальную систему уравнения (2). Матрицу X называют фундаментальной матрицей уравнения (2) [15, 20, 24]. Таким образом, общее решение уравнения (2) имеет представление

$$x(t)=X(t)\alpha+\int\limits_0^t C(t, s)f(s)ds, \tag{5}$$

где α — произвольный постоянный вектор.

Для обыкновенного дифференциального уравнения $\dot{x}(t)=F(t)x(t)+$ $+f(t)$ главная часть Q оператора $\mathscr{L}$ имеет вид

$$(Qy)(t)=y(t)-\int\limits_0^t F(t)y(s)ds.$$

К уравнению (2) с главной частью вида

$$(Qy)(t)=y(t)-\int\limits_0^t K(t, s)y(s)ds \tag{6}$$

приводятся с помощью подстановки $x(t)=x(0)+\int\limits_0^t \dot{x}(s)ds$ разрешенные относительно производной уравнения с запаздывающим аргументом, интегро-дифференциальные уравнения, а также ряд других уравнений, изучавшихся ранее вне связи друг с другом [15, 23—27]. Естественный путь изучения каждого нового уравнения начинается с поиска представления общего решения. Равенство (5) непосредственно отвечает на вопрос о виде общего решения для всех уравнений с главной частью вида (6), так как перечисленные выше условия выполняются при естественных предположениях.

Для уравнения «нейтрального типа»

$$\begin{gathered}\dot{x}(t)-\sum_{i=1}^{k}B_i(t)\dot{x}[g_i(t)]-\sum_{j=1}^{m}P_j(t)x[h_j(t)]=r(t), \quad t\in[0, \infty),\\ x(\xi)=\varphi(\xi), \quad \dot{x}(\xi)=\psi(\xi), \quad \text{если} \quad \xi<0,\end{gathered} \tag{7}$$

оператор Q имеет более сложную структуру. Чтобы выделить здесь линейную операцию $\mathscr{L}$ и записать ее главную часть, введем следующие обозначения:

$$(S_\nu y)(t)=\begin{cases} y[\nu(t)], & \text{если } \nu(t)\geqslant 0,\\ 0 & \text{если } \nu(t)<0,\end{cases}$$

$$z^\nu(t)=\begin{cases} 0, & \text{если } \nu(t)\geqslant 0,\\ z[\nu(t)], & \text{если } \nu(t)<0.\end{cases}$$

Теперь уравнение (7) можно записать в виде

$$\dot{x}(t)-\sum_{i=1}^{k} B_i(t)(S_{g_i}\dot{x})(t)-\sum_{j=1}^{m} P_j(t)(S_{h_j}x)(t)=f(t),$$

где правая часть

$$f=r+\sum_{i=1}^{k} B_i\psi^{g_i}+\sum_{j=1}^{m} P_j\varphi^{h_j}$$

не зависит от искомой функции, а левую часть определяет линейная операция

$$\mathscr{L}x=\dot{x}-\sum_{i=1}^{k} B_iS_{g_i}\dot{x}-\sum_{j=1}^{m} P_jS_{h_j}x.$$

Пусть, далее,

$$(Sy)(t)=\sum_{i=1}^{k} B_i(t)(S_{g_i}y)(t), \tag{8}$$

$$(K_hy)(t)=\int_0^t \sum_{j=1}^{m} P_j(t)\chi_j(t,s)y(s)ds,\quad A(t)=-\sum_{j=1}^{m} P_j(t)\chi_j(t,0),$$

где $\chi_j(t, s)$ — характеристическая функция множества $\{(t, s) : 0\leqslant s\leqslant \leqslant h_j(t)\}$. Тогда $\mathscr{L}x=(J-S-K_h)\dot{x}-Ax(0)$ и, следовательно, $Q=J-$ $-S-K_h$.

Для того чтобы главная часть Q удовлетворяла условию I (чтобы оператор Q непрерывно действовал в пространстве L^n), достаточно, чтобы на каждом отрезке $[0, b]$ выполнялись условия: элементы $n\times n$-матриц B_i измеримы и ограничены в существенном; элементы $n\times n$-матриц P_j суммируемы; функции $h_j : [0, b]\to R^1$ измеримы, $h_j(t)\leqslant t$ почти всюду; функции $g_i : [0, b]\to R^1$ измеримы, $g_i(t)\leqslant t$ почти всюду и обеспечено непрерывное действие операторов S_{g_i} в пространстве L^n. А именно [28, с. 707],

$$\operatorname{mes} e=0\Rightarrow \operatorname{mes} g_i^{-1}(e)=0,\ \mu_i=\sup_{e\subset[0,b],\operatorname{mes} e>0}\frac{\operatorname{mes} g_i^{-1}(e)}{\operatorname{mes} e}<\infty.$$

Здесь mes — мера Лебега, $g_i^{-1}(e)=\{t\in[0, b] : g_i(t)\in e\}$. При этом число μ_i — норма оператора $S_{g_i} : L^n\to L^n$.

Если, кроме того, функции r, φ, ψ, h_j и g_i обеспечивают суммируемость свободного члена f, то выполнено и условие II.

Весьма общий случай уравнения (2) получим, если главная часть имеет вид $Q=J-S-K$, где оператор K определен равенством

$$(Ky)(t)=\int_0^t K(t,s)y(s)ds. \tag{9}$$

В этом случае условие I будет выполняться, если, кроме перечисленных предположений относительно оператора S, будут выполнены следующие требования: элементы $k_{ij}(t, s)$ $n\times n$-матрицы $K(t, s)$ при каждом фиксированном $b>0$ измеримы по совокупности переменных в Δ_b, причем

$$\lim_{\operatorname{mes} e\to 0} \operatorname{vrai\,sup}_{s\in[0,\,b]} \int_{e\cap[s,\,b]} |k_{ij}(t,\,s)|\,dt=0.$$

Как известно, в этих условиях оператор $K: L^n\to L^n$ слабо вполне непрерывен и, следовательно, его спектральный радиус равен нулю.

В случае $Q=J-S-K$ условие III выполнено, если при каждом $b>0$ спектральный радиус $\rho_b(S)$ оператора $S: L^n[0,\,b]\to L^n[0,\,b]$ меньше единицы. Это следует из результатов работы [24], где показано, что в сделанных предположениях относительно S и K справедливо равенство $\rho_b(S+K)=\rho_b(S)$. Оценки $\rho_b(S)$ имеются в работах [24, 30—34]. Здесь мы сформулируем следующее утверждение, вытекающее из результатов работ [24, 35].

Теорема 1. *Пусть для каждого $b>0$ существует такое число $\tau_b>0$, что либо все множества $\omega_i(\tau_b)=\{t\in[0,\,b]: t-g_i(t)\leqslant\tau_b\}$ пусты, либо*

$$\sum_i \mu_i \operatorname{vrai\,sup}_{t\in\omega_i(\tau_b)} \|B_i(t)\|<1,$$

где суммирование проводится по тем индексам i, для которых множество $\omega_i(\tau_b)$ не пусто. Тогда $\rho_b(S)<1$ для каждого $b>0$.

Из приведенной теоремы следует, в частности, что условие III выполнено, если, например, $t-g_i(t)\geqslant\tau>0$, $i=1,2,\ldots,k$.

Теория функционально-дифференциальных уравнений ставит много новых вопросов о свойствах оператора S в пространствах суммируемых функций. Некоторые результаты изучения этого оператора освещены в работах [25, 29—34].

Использование представления (5) и общих теорем об уравнении (2) при изучении уравнения (7) вызвало в свое время дискуссии, связанные с тем, что в распространенных монографиях об уравнениях с запаздывающим аргументом [18, 19] решение уравнения определяется как непрерывное продолжение «начальной функции» φ. Такое определение приводит к понятию «бесконечномерной фундаментальной системы». В то же время в представлении (5) столбцы $n\times n$-матрицы X составляют базис пространства решений однородного уравнения $\mathscr{L}x=0$ (фундаментальную систему этого уравнения). Однако представление (5) не противоречит утверждениям упомянутых монографий, так как каждый элемент «бесконечномерной фундаментальной системы» является решением неоднородного уравнения $\mathscr{L}x=f_i$ со специальной правой частью f_i. Поясним сказанное на примере уравнения

$$\dot x(t)+p(t)x[h(t)]=r(t),\quad t\in[0,\,\infty);\quad x[h(t)]=\varphi[h(t)],\ \text{если}\ h(t)<0.$$

Это уравнение в упомянутых монографиях не изучалось как самостоятельный объект: там рассматривались лишь решения «начальной задачи», связанные со способом задания x при $t<0$. Такой подход к уравнению с запаздывающим аргументом объясняется давно сложившейся традицией, возникшей при исследовании уравнения с постоянным коэффициентом p и постоянным запаздыванием $\Delta=t-h(t)$. Согласно этой традиции, восходящей к Хильбу [36], решением называют функцию, определенную не при $t>0$, где это решение неизвестно, а на множестве, являющемся объединением полуоси $[0,\,\infty)$ с областью значений функции h (с так называемым «начальным множеством»). Такое определение включает в решение и заданную начальную функцию φ. Поэтому естественным образом возникает условие «непрерывной стыковки» $x(0)=\varphi(0)$. Различные начальные задачи отличаются друг от друга тем, что задаются различные множества начальных функций. Размерность фундаментальной системы рассматриваемой задачи (размерность базиса пространства решений при $r=0$) совпадает с размерностью множества начальных функций φ. Так, для «основной начальной задачи» [19]

$$\dot x(t)+p(t)x[h(t)]=0,\quad t\in[0,\,\infty),\quad x[h(t)]=\varphi[h(t)],\ \text{если}\ h(t)\leqslant 0,$$

где φ пробегает пространство абсолютно непрерывных функций, пространство решений имеет счетный базис. Это является следствием того, что такой базис имеет пространство абсолютно непрерывных функций. Если же ограничиться конечномерным множеством начальных функций, как это, например, сделано в [19], то и фундаментальная система будет конечномерной.

Такая точка зрения на понятие решения уравнения с запаздывающим аргументом привела к ряду тонких результатов о существовании периодических решений и об устойчивости некоторых классов уравнений. Однако распространение описанного подхода на уравнения вида (7) не принесло ожидаемых результатов, и понятие бесконечномерной фундаментальной системы долгое время тормозило развитие наших представлений об уравнениях с отклоняющимся аргументом.

Применение общей теории уравнения (2) к изучению уравнения (7) основано на том, что начальные функции φ и ψ (предыстория описываемого уравнением процесса) фиксируются и решением называется функция, определенная при $t \geqslant 0$ и удовлетворяющая равенству (7) почти всюду. При этом выполнение условия $x(0)=\varphi(0)$ не обязательно, и начальные функции входят в состав правой части f уравнения. Такой подход к изучению уравнений с отклоняющимся аргументом, как отмечено в [37], уже назревал в работах некоторых авторов. Однако только в [38] было четко сформулировано понятие решения уравнения с отклоняющимся аргументом. Физический смысл этого определения вряд ли надо искать и обсуждать: такое определение позволяет непосредственно пользоваться общей теорией уравнения (2) для изучения математических моделей, естественным образом возникающих при описании некоторых задач.

§ 2. МАТРИЦА КОШИ

Для матрицы Коши $C(t, s)$ обыкновенного дифференциального уравнения $\dot{x}(t)=F(t)x(t)+f(t)$ имеет место замечательное равенство $C(t, s)=X(t)X^{-1}(s)$, где X — фундаментальная матрица. Таким образом, при фиксированном s матрица $C(t, s)$ как функция первого аргумента удовлетворяет матричному уравнению $\dot{X}=FX$, а при фиксированном t как функция второго аргумента — «сопряженному уравнению» $\dot{Y}=-R^*Y$. Аналогам этих свойств для различных классов функционально-дифференциальных уравнений были посвящены работы [37, 39—44].

Для построения уравнения, решением которого была бы матрица $C(t, \cdot)$, зафиксируем матрицу Коши $W(t, s)$ некоторой вспомогательной задачи Коши $(Q_W\dot{x})(t)=\dot{z}(t)$, $x(0)=0$. Например, положим $W(t, s)=E$ в треугольнике Δ_b (тогда $Q_W=J$).

Всюду ниже всякую матрицу Коши будем считать определенной в квадрате $[0, b]\times[0, b]$, полагая $C(t, s)=0$ при $0\leqslant t<s\leqslant b$.

Решение вспомогательной задачи имеет представление $x(t)=\int\limits_0^t W(t, s)z(s)ds$. Это равенство — так называемая «W-подстановка» [15] — устанавливает взаимно-однозначное соответствие между множеством решений z уравнения $QQ_W^{-1}z=f$ и множеством решений x задачи Коши $\mathscr{L}x=f$, $x(0)=0$ для уравнения (2). Обозначив для сокращения записи $QQ_W^{-1}=U$, получим

$$x(t)=\int\limits_0^t C(t, s)f(s)ds=\int\limits_0^b W(t, s)\,(U^{-1}f)\,(s)ds.$$

Правую часть этого равенства можно рассматривать при каждом фиксированном $t\in(0, b]$ как значение вектор-функционала на элементе $U^{-1}f$. Поэтому при любом f имеем:

$$\int_0^b C(t, s) f(s) ds = \int_0^b [(U^{-1})^* W(t, \cdot)](s) f(s) ds,$$

где звездочкой обозначен сопряженный оператор. Таким образом,

$$C(t, s) = [(U^{-1})^* W(t, \cdot)](s). \tag{10}$$

Отсюда

$$[U^* C(t, \cdot)](s) = W(t, s). \tag{11}$$

Запишем

$$(Uy)(t) = y(t) - \frac{d}{dt} \int_0^t U(t, s) y(s) ds$$

и воспользуемся представлением оператора U^*, сопряженного к линейному вольтеррову оператору $U : L^n \to L^n$, в терминах ядра $U(t, s)$ [25]. Тогда уравнение (11) примет форму

$$C(t, s) - C(t, s) \frac{d}{ds} \int_0^s U(s, \tau) d\tau -$$

$$- \frac{\partial}{\partial s} \int_s^t C(t, \tau) \left[\frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^s U(\tau, \xi) d\xi \right] d\tau = W(t, s).$$

В конкретных случаях удобнее непосредственно использовать вид сопряженных операторов и записывать уравнение (11), не прибегая к построению ядра $U(t, s)$. Пусть, например, $Q = J - S - K$. Положив $Q_W = J$, из (11) получим при каждом фиксированном t на отрезке $[0, t]$ уравнение

$$C(t, s) - C(t, s) \sum_{i=1}^k B_i(s) \sigma_i(s, s) - \frac{\partial}{\partial s} \int_s^t C(t, \tau) \sum_{i=1}^k B_i(\tau) \sigma_i(s, \tau) d\tau -$$

$$- \int_s^t C(t, \tau) K(\tau, s) d\tau = E,$$

где $\sigma_i(s, \tau)$ — характеристическая функция множества

$$\{(\tau, s) \in [0, t] \times [0, t] : 0 \leqslant g_i(\tau) \leqslant s\}.$$

Предположим, что при каждом фиксированном $b > 0$ существует ограниченный вольтерров оператор $P = (J - S)^{-1}$. Тогда уравнение $Q\dot{x} \equiv (J - S - K)\dot{x} = f$ эквивалентно уравнению $(J - PK)\dot{x} = Pf$, где оператор $PK : L^n \to L^n$ оказывается слабо вполне непрерывным оператором Вольтерра:

$$(PKy)(t) = \int_0^t [PK(\cdot, s)](t) y(s) ds = \int_0^t K_P(t, s) y(s) ds.$$

Так как $QQ_W^{-1} = (P^{-1} - K)(J - PK)^{-1} = P^{-1}$, то для матрицы Коши уравнения (2) в силу (10) и (11) соответственно имеем:

$$C(t, s) = [P^* W(t, \cdot)](s) \quad \text{и} \quad [(P^{-1})^* C(t, \cdot)](s) = W(t, s),$$

где $W(t, s)$ — матрица Коши уравнения $(J - PK)\dot{x} = Pf$.

Остановимся на специфике случая $Q = J - K$, для которого матрица Коши была исследована в [44]. В этом случае из (10) при $Q_W = J$ имеем

$$C(t, s) = E + \int_s^t V(\tau, s) d\tau, \quad s \in [0, t]. \tag{12}$$

Отметим, что резольвента $V(t, s)$ ядра $K(t, s)$ удовлетворяет каждому из уравнений

$$V(t, s)=\int_s^t V(t, \tau)K(\tau, s)d\tau+K(t, s),$$

$$V(t, s)=\int_s^t K(t, \tau)V(\tau, s)d\tau+K(t, s).$$

Из (12) следует, в частности, что при почти каждом $s\in[0, b)$ матрица Коши как функция первого аргумента имеет абсолютно непрерывные на $[s, b]$ элементы, причем $\frac{\partial}{\partial t}C(t, s)=V(t, s)$. Отсюда и из (12) получаем, что при любом f

$$\frac{d}{dt}\left\{\int_0^t C(t, s)f(s)ds\right\}=\int_0^t C'_t(t, s)f(s)ds+f(t).$$

Далее, из уравнения для резольвенты $V(t, s)$ следует, что

$$C'_t(t, s)-\int_s^t K(t, \tau)C'_\tau(\tau, s)d\tau=K(t, s).$$

Если элементы ядра $K(t, s)$ имеют ограниченную вариацию по s при почти каждом t, то с помощью интегрирования по частям из последнего равенства получаем

$$C'_t(t, s)+\int_s^t d_\tau K(t, \tau)C(\tau, s)=K(t, t)C(t, s).$$

Отсюда видно, что для уравнения с «распределенным запаздыванием»

$$(\mathscr{L}x)(t)\overset{\text{def}}{=}\dot{x}(t)-\int_0^t d_sR(t, s)x(s)=f(t) \tag{13}$$

матрица Коши при каждом фиксированном s как функция первого аргумента является решением матричной задачи Коши

$$\dot{X}(t)=\int_s^t d_\tau R(t, \tau)X(\tau),\quad X(s)=E,\quad t\geqslant s$$

(здесь главная часть Q оператора $\mathscr{L}$ имеет вид (6), где $K(t, s)=$ $=R(t, t)-R(t, s)$). Таким образом, сечение $C(t, 0)$ представляет собой фундаментальную матрицу, и поэтому общее решение (5) в случае уравнения (13) имеет вид

$$x(t)=C(t, 0)\alpha+\int_0^t C(t, s)f(s)ds.$$

Приведенные соотношения позволяют изучать свойства матрицы $C(t, s)$ по каждому аргументу: определенные свойства ядра $K(t, s)$ порождают соответствующие свойства матрицы Коши, в частности, для уравнения (13) функция $C(t, \cdot)$ имеет ограниченную вариацию. Условия непрерывности и абсолютной непрерывности этой функции также формулируются в терминах ядра $K(t, s)$ [44, 46].

В теории устойчивости обыкновенного дифференциального уравнения широко используется соотношение $C(t, s)=C(t, \tau)C(\tau, s)$ $(s\leqslant\tau\leqslant$

$\leqslant t$). В случае уравнения (13) это соотношение заменяется более сложным [20]: $C(t, s)=C(t, \tau)C(\tau, s)+\Theta(t, \tau, s)$, где

$$\Theta(t, \tau, s)=\int_{\tau}^{t} C(t, \xi)\left[\int_{s}^{\tau} d_{\eta}R(\xi, \eta)C(\eta, s)\right]d\xi.$$

Отметим, что $\Theta(t, \tau, s)\equiv 0$ тогда и только тогда, когда (13) — обыкновенное дифференциальное уравнение. В. А. Тышкевич [20] изучал свойства $\Theta(t, \tau, s)$ и распространил на уравнение (13) ряд теорем об устойчивости из главы III книги Е. А. Барбашина [45].

Для построения оценки матрицы Коши применимы различные варианты метода сравнения [47]. Эффективность этих методов зависит от возможностей проинтегрировать мажорантное уравнение сравнения или получить нужную оценку его функции Коши. Отметим, что в случае, когда оператор $Q: L^1\to L^1$ определен равенством

$$(Qy)(t)=y(t)-\mu(t)\int_{0}^{t} \nu(s)y(s)ds,$$

согласно (12) имеем

$$C(t, s)=1+\int_{s}^{t} \mu(\tau)\nu(s)\left\{\exp\int_{s}^{\tau} \mu(\xi)\nu(\xi)d\xi\right\}d\tau.$$

В заключение приведем следующее утверждение об оценке функции Коши уравнения с постоянными коэффициентами p_i и постоянными запаздываниями Δ_i.

Теорема 2 [48]. *Функция Коши $C(t, s)$ скалярного уравнения*

$$\dot{x}(t)=\sum_{i=1}^{m} p_i x[t-\Delta_i],\quad t\in[0, \infty),\quad x(\xi)=0,\ \textit{если}\ \xi<0,$$

допускает оценку $|C(t, s)|\leqslant N\exp[-\alpha(t-s)]$, $0\leqslant s\leqslant t<\infty$, *где* α *и* N — *положительные постоянные, тогда и только тогда, когда существует такое число* $\beta<0$, *что для всех корней* λ_j *квазиполинома* $\lambda-\sum_{i=1}^{m} p_i\exp(-\Delta_i\lambda)$ *выполняется неравенство* $\operatorname{Re}\lambda_j\leqslant\beta$.

Отметим, что при $m=1$ утверждение теоремы 2 имеет место, если $-\frac{\pi}{2\Delta_1}<p_1<0$ [48]. Другие теоремы об оценках функции Коши имеются в недавно депонированных работах В. В. Малыгиной.

§ 3. НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ

Пусть L — линейное многообразие функций $y: [0, \infty)\to R^n$ с суммируемыми на каждом конечном отрезке $[0, b]$ компонентами, D — линейное многообразие функций $x: [0, \infty)\to R^n$ с абсолютно непрерывными на каждом $[0, b]$ компонентами. Пусть, далее, $F: D\to L$ — вольтерров оператор, т. е. однозначное отображение, обладающее свойством: для любого числа $\tau>0$ и любых таких $x_1, x_2\in D$, что $x_1(t)=x_2(t)$ на $[0, \tau]$, выполняется почти всюду на $[0, \tau]$ равенство $(Fx_1)(t)=(Fx_2)(t)$. Это свойство позволяет рассматривать уравнение $\dot{x}=Fx$ и его решения на любом отрезке $[0, b]$, игнорируя значения $x(t)$ и $(Fx)(t)$ при $t>b$. Иначе говоря, решением на $[0, b]$ уравнения

$$\dot{x}=Fx \tag{14}$$

будем называть элемент $x\in D^n[0, b]$, удовлетворяющий почти всюду на $[0, b]$ равенству $\dot{x}(t)=(F_b x)(t)$. Здесь «сужение» $F_b: D^n[0, b]\to L^n[0, b]$ оператора $F: D\to L$ определено равенством $(F_b x)(t)=(Fy_x)(t)$, $t\in[0, b]$, где элемент $y_x\in D$ выбран так, чтобы $y_x(t)=x(t)$

на $[0, b]$. В дальнейшем индекс «b» в обозначении оператора F_b будем опускать.

Если задача Коши

$$\dot{x}=Fx, \quad x(0)=\alpha \tag{15}$$

разрешима на $[0, b]$ при любом $\alpha \in R^n$, то существует такая функция $\varphi : [0, b] \times R^n \to R^n$, что решение уравнения

$$\dot{x}(t)=\varphi(t, x(0)) \tag{16}$$

является также и решением на $[0, b]$ уравнения (14). Если, кроме того, задача Коши разрешима однозначно, то на $[0, b]$ уравнения (14) и (16) эквивалентны. В этом случае общее решение на $[0, b]$ уравнения (14) имеет представление

$$x(t)=\alpha+\int_0^t \varphi(s, \alpha)\,ds.$$

Свойство приводимости уравнения (14) к «канонической форме» (16) или к другому удобному для исследования эквивалентному уравнению сыграло важную роль в развитии наших представлений о функционально-дифференциальных уравнениях [15, 23, 24, 26, 29, 49].

Будем называть уравнение (14) *вольтерово приводимым* на отрезке $[0, b]$, если существует такой вполне непрерывный вольтерров оператор $F_1 : D^n[0, b] \to L^n[0, b]$, что для каждого $\tau \in (0, b]$ множества решений на $[0, \tau]$ уравнений (14) и $\dot{x}=F_1x$ совпадают.

Требование глобальной вольтерровой приводимости оказывается излишне жестким, если можно ограничиться рассмотрением не всех решений, а лишь тех, для которых справедлива некоторая оценка, например,

$$|x(0)| \leqslant \rho, \quad |\dot{x}(t)| \leqslant \gamma(t), \quad t \in [0, b], \quad \gamma \in L^1[0, b]. \tag{17}$$

В этом случае достаточно иметь дело с вольтерово приводимым уравнением $\dot{x}=Hx$, где оператор $H : D \to L$ выбран так, что $(Hx)(t)=(Fx)(t)$, $t \in [0, b]$ для всех $x \in D$, удовлетворяющих оценке (17).

В работах [49—52] понятие «приводимость» используется без требования вольтерровости оператора F_1. Ради сокращения мы будем говорить ниже о приводимости, подразумевая вольтеррову приводимость.

В основе классической теории обыкновенного дифференциального уравнения лежат теоремы о локальной разрешимости задачи Коши, о связности и компактности множества решений этой задачи, о продолжаемости и о непрерывной зависимости решений от параметров. Эти теоремы распространяются на весь класс приводимых уравнений. Таким образом, имеются достаточные основания для введения понятия приводимости и для специального изучения класса приводимых уравнений. Этот класс естественным образом обобщает обыкновенные дифференциальные уравнения, специфику которых определяют свойства оператора Немыцкого. Отметим, что при многих качественных исследованиях фактическое построение оператора F_1 не требуется: достаточно лишь установить факт приводимости.

Если задача Коши (15) корректно разрешима (разрешима однозначно и решение непрерывно зависит от α), то вполне непрерывный оператор F_1 можно определить равенством $(F_1x)(t)=\varphi(t, x(0))$. Таким образом, корректная разрешимость задачи Коши гарантирует приводимость. Отсюда, в частности, следует приводимость линейного уравнения (2). Квазилинейное уравнение $\mathscr{L}x=Fx$ приводимо на $[0, b]$, если оператор $F : D^n \to L^n$ вольтерров и вполне непрерывен. Отметим, что класс вполне непрерывных операторов $F : D^n \to L^n$ достаточно широк. В частности, при естественных предположениях свойством полной непрерывности обладает оператор

$$(Fx)(t)=f\left(t, \int_0^t d_sR(t, s)x(s)\right)$$

(см. [53, 54]). Уравнение (1) при прочих обычных предположениях будет приводимым, если существует такая положительная постоянная $\tau>0$, что $t-g(t)\geqslant\tau$. Если, кроме того, и $t-h(t)\geqslant\tau$, то для этого уравнения корректно разрешима задача Коши и, следовательно, существует каноническая форма (16) этого уравнения. В общем случае установление факта приводимости сводится к разрешимости некоторых вспомогательных уравнений и часто встречает затруднения.

Здесь мы приведем четыре теоремы о свойствах множества решений приводимого уравнения.

Теорема 3. *Пусть уравнение (14) приводимо на* $[0, b]$. *Тогда для каждого* $\alpha\in R^n$ *существует такое* $\tau\in(0, b]$, *что множество определенных на* $[0, \tau]$ *решений задачи (15) не пусто.*

Доказательство. Подстановка $x(t)=\alpha+\int\limits_0^t z(s)ds$ сводит задачу (15) для приведенного уравнения к уравнению $z=\Phi_b z$ с вполне непрерывным оператором $\Phi_b : L^n[0, b]\to L^n[0, b]$, который определяется равенством $(\Phi_b z)(t)=\left(F_1\left(\alpha+\int\limits_0^{(\cdot)} z(s)ds\right)\right)(t)$. Обозначим $S_b^\gamma=$ $=\{y\in L^n[0, b] : \|y\|_{L^n[0, b]}\leqslant\gamma\}$. Все элементы относительно компактного множества $\Phi_b S_b^\gamma$ имеют равностепенно абсолютно непрерывные нормы. Поэтому существует такое $\tau\in(0, b]$, что $\int\limits_0^\tau |y(s)|ds\leqslant\gamma \quad \forall y\in\Phi_b S_b^\gamma$. Оператор $\Phi_\tau : L^n[0, \tau]\to L^n[0, \tau]$ отображает множество S_τ^γ в себя. Ссылка на принцип Шаудера завершает доказательство.

Теорема 4. *Пусть уравнение (14) приводимо на* $[0, b]$ *и* x — *решение задачи (15), определенное на* $[0, \tau]\subset[0, b)$. *Тогда существует такое* $\tau_1\in(\tau, b]$, *что задача (15) имеет на* $[0, \tau_1]$ *по крайней мере одно такое решение* x_1, *что* $x(t)=x_1(t)$ *на* $[0, \tau]$.

Доказательство этой теоремы о продолжаемости решений использует схему работы [55] и схему доказательства теоремы 3.

Теорема 5 [56]. *Пусть* $\alpha\in R^n$ *фиксировано и существует такая постоянная* c, *что для любого* $\tau\in(0, b]$ *имеет место общая априорная оценка всех определенных на* $[0, \tau]$ *решений* x *задачи (15)*:

$$\|x\|_{D^n[0, \tau]}\leqslant c, \quad \tau\in(0, b].$$

Пусть, далее, уравнение (14) приводимо на $[0, b]$. *Тогда множество всех определенных на* $[0, b]$ *решений задачи (15) непусто, компактно в себе и связно в пространстве* $D^n[0, b]$.

В заключение докажем следующий признак приводимости уравнения (14) к канонической форме (16).

Теорема 6. *Пусть уравнение (14) приводимо на* $[0, b]$ *и выполнены условия*:

а) для каждого $\alpha\in R^n$ *существует общая для всех* $\tau\in(0, b]$ *априорная оценка всех определенных на* $[0, \tau]$ *решений* x_α *задачи (15)*: $\|x_\alpha\|_{D^n[0, \tau]}\leqslant c(\alpha)$, *где функция* $c : R^n\to R^1$ *ограничена на каждом ограниченном множестве;*

б) для каждого $\alpha\in R^n$ *задача (15) не может иметь на* $[0, b]$ *более одного решения.*

Тогда задача Коши (15) корректно разрешима.

Доказательство. В условиях теоремы задача (15) однозначно разрешима и остается показать, что при $k\to\infty$

$$\{\alpha_k\to\alpha\}\Rightarrow\{\|x_{\alpha_k}-x_\alpha\|_{D^n[0, b]}\to 0\}.$$

Зафиксируем α и пусть $\{\alpha_k\}$ — любая сходящаяся к α последовательность, $\{x_{\alpha_k}\}$ — соответствующая последовательность решений задач

Коши. В условиях теоремы эта последовательность компактна и каждая ее предельная точка является решением задачи (15). В силу условия б) эти предельные точки совпадают, поэтому $\lim\limits_{k\to\infty} x_{\alpha_k} = x_\alpha$.

§ 4. МАЖОРАНТНОЕ УРАВНЕНИЕ

Будем говорить, что на $[0, b]$ для уравнения (14) определено каноническое *априорное неравенство,* если существует такая функция $m : [0, b]\times R^1 \to R^1$, что $m(\cdot, \nu)$ суммируема при каждом ν и каждое решение x уравнения (14) удовлетворяет почти всюду на $[0, b]$ неравенству

$$|\dot{x}(t)| \leqslant m(t, |x(0)|). \tag{18}$$

Таким образом, с точки зрения уравнения (16) функция m является мажорантой правой части уравнения: $|\varphi(t, \alpha)| \leqslant m(t, |\alpha|)$.

Из (18) следует априорная оценка $|x(t)| \leqslant |\alpha| + \int\limits_0^t m(s, |\alpha|)ds$ решений задачи Коши (15). Ниже будет показано, что неравенство (18) является также источником априорных оценок решений некоторых краевых задач для уравнения (14).

Для построения мажоранты m можно воспользоваться следующей схемой. Пусть $|(Fx)(t)| \leqslant (\Phi|x(\cdot)|)(t)$ $\forall x \in D^n$, где оператор $\Phi : D^1 \to L^1$ обладает свойством монотонности: если $\xi_1 \geqslant \xi_2$, то $\Phi\xi_1 \geqslant \Phi\xi_2$. Тогда для каждого решения x уравнения (14) имеем

$$|\dot{x}(t)| \leqslant \left(\Phi\left[|x(0)| + \int\limits_0^{(\cdot)} |\dot{x}(s)|ds\right]\right)(t). \tag{19}$$

Пусть, далее, в пространстве L^1 для «мажорантного уравнения»

$$\xi = \Phi\left[\nu + \int\limits_0^{(\cdot)} \xi(s)ds\right] \tag{20}$$

справедлива теорема о неравенстве типа теоремы Чаплыгина: если для некоторого $z \in L^1$ выполняется неравенство $z \leqslant \Phi\left[\nu + \int\limits_0^{(\cdot)} z(s)ds\right]$, то для решения $\xi(t, \nu)$ уравнения (20) справедлива на $[0, b]$ оценка $\xi(t, \nu) \geqslant z(t)$. Положив $z(t) = |\dot{x}(t)|$, из (19) получаем неравенство (18):

$$|\dot{x}(t)| \leqslant \left(\Phi\left[|x(0)| + \int\limits_0^{(\cdot)} \xi(s, |x(0)|)ds\right]\right)(t) \overset{\text{def}}{=} m(t, |x(0)|).$$

В случае, когда Φ — оператор Немыцкого: $(\Phi u)(t) = \omega(t, u(t))$, подстановка $\zeta(t) = \nu + \int\limits_0^t \xi(s)ds$ сводит уравнение (20) к задаче Коши $\dot{\zeta} = \omega(t, \zeta)$, $\zeta(0) = \nu$. Для этой задачи справедлива теорема Чаплыгина [57, 58]. Если при этом уравнение $\dot{\zeta} = \omega(t, \zeta)$ можно проинтегрировать в квадратурах, то задача построения априорного неравенства решена. К сожалению, функция ω удобна для мажорирования лишь операторов Немыцкого: более сложные операторы приходится мажорировать операторами Φ более сложной структуры. При этом возникают вопросы о применимости теоремы о неравенствах и об эффективном интегрировании мажорантного уравнения. Некоторые пути к решению этих вопросов предложены в [59].

Пусть для любого $x \in D^n$ почти всюду на $[0, b]$ выполняется неравенство

$$|(Fx)(t)| \leqslant (B_1 NMx)(t) + (B_2 |\dot{x}(\cdot)|)(t). \tag{21}$$

Здесь B_1 и B_2 — линейные положительные вольтерровы операторы в пространстве L^1, причем спектральный радиус оператора B_2 меньше единицы; оператор M, действующий из D^n в некоторое линейное пространство Z измеримых функций $z : [0, b] \to R^1$, определяется равенством

$$(Mx)(t) = q(t)|x(0)| + u(t) \int_0^t v(s)|\dot{x}(s)|ds,$$

где функция $v : [0, b] \to R^1$ неотрицательна, измерима и ограничена в существенном; q, $u \in Z$, причем $q \leqslant u$; $N : Z \to L^1$ — оператор Немыцкого: $(Nz)(t) = \omega(t, z(t))$, функция $\omega(t, \cdot)$ непрерывна и не убывает.

Определим функцию $\Omega : [0, b] \times [0, \infty) \to [0, \infty)$ равенством

$$\Omega(t, y) = \omega(t, u(t)y)[B_1^*(J - B_2^*)^{-1}v](t).$$

Будем говорить, что задача Коши

$$\dot{y} = \Omega(t, y), \quad y(0) = \beta \tag{22}$$

имеет на $[0, b]$ *верхнее решение* y, если y является таким решением этой задачи, что для любого $\tau \in (0, b]$ всякое решение y^τ уравнения $\dot{y} = \Omega(t, y)$, определенное на $[0, \tau)$ и удовлетворяющее начальному условию $y^\tau(0) = \beta$, удовлетворяет неравенству $y^\tau(t) \leqslant y(t)$, $t \in [0, \tau)$.

Теорема 7 [50]. *Пусть $\beta \geqslant 0$ и задача (22) имеет на $[0, b]$ верхнее решение $y(t, \beta)$. Пусть, далее, x — такое определенное на $[0, \tau] \subset [0, b]$ решение уравнения (14), что $|x(0)| \leqslant \beta$. Тогда почти всюду на $[0, \tau]$ имеет место неравенство*

$$|\dot{x}(t)| \leqslant m(t, |x(0)|) = [(J - B_2)^{-1} B_1 Nz](t),$$

где $z(t) = u(t)y(t, |x(0)|)$.

Другой способ построения априорных неравенств, основанный на модификации односторонних оценок работ [5, 12, 58], рассмотрен в [60].

Для приводимых уравнений теорема 7 в сочетании с теоремой 5 позволяет формулировать условия нелокальной разрешимости задачи Коши (15): если мажорантная задача (22) имеет на $[0, b]$ верхнее решение, то задача (15) разрешима на $[0, b]$ при любом таком $\alpha \in R^n$, для которого $|\alpha| \leqslant \beta$. Наличие оценки (18) на полуоси $[0, \infty)$ гарантирует разрешимость уравнения (14) на полуоси и позволяет иногда установить некоторые асимптотические свойства решений этого уравнения.

Теорема 8. *Пусть оператор $F : D^n[0, b] \to L^n[0, b]$ при любом $b > 0$ вполне непрерывен и удовлетворяет условию (21), где $B_1 = J$, $B_2 = 0$, $\omega(t, z) = \rho(t) + \mu(t)z + \nu(t)z^\gamma$, $\gamma \neq 1$, $\gamma \geqslant 0$. Пусть, далее, $v(t) \leqslant d = \text{const}$ на $[0, \infty)$ и*

$$\int_0^\infty \rho(s)ds = c, \quad \int_0^\infty \mu(s)u(s)ds = c_1, \quad \int_0^\infty \nu(s)u^\gamma(s)ds = c_2.$$

Тогда для каждого $\alpha \in R^n$, удовлетворяющего неравенству

$$(|\alpha| + dc)^{1-\gamma} \exp[(1-\gamma)dc_1] + (1-\gamma)dc_2 > 0,$$

существует на $[0, \infty)$ решение задачи (15) и любое решение этой задачи имеет конечный предел на бесконечности.

Для обыкновенного дифференциального уравнения аналогичное утверждение получено в [61].

Заменим неравенство (21) неравенством

$$|Fx-Fz| \leqslant B_1NM(x-z)+B_2|\dot{x}-\dot{z}| \quad \forall x, z \in D^n$$

и сохраним предположения относительно операторов B_1, B_2, N, M. Если при этом $y \equiv 0$ будет верхним решением мажорантной задачи (22) при $\beta=0$, то можно гарантировать априорную единственность решения задачи (15): если задача имеет решение, то оно единственно.

§ 5. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ

Линейной краевой задачей называют систему уравнений

$$(\mathscr{L}x)(t)=f(t), \quad t \in [0, b], \quad lx=\alpha, \tag{23}$$

где

$$lx=\Psi x(0)+\int_0^b \Theta(s)\dot{x}(s)ds, \tag{24}$$

Ψ — постоянная $n \times n$-матрица, элементы $n \times n$-матрицы Θ измеримы и ограничены в существенном на $[0, b]$. Равенство (24) определяет общий вид линейного ограниченного вектор-функционала $l: D^n[0, b] \to R^n$. В [15] приведен обзор основных идей и результатов изучения этой задачи.

Для задачи (23) справедлива альтернатива Фредгольма: либо задача однозначно разрешима при любых $f \in L^n$, $\alpha \in R^n$, либо однородная задача $\mathscr{L}x=0$, $lx=0$ имеет нетривиальное решение. Таким образом, задача (23) однозначно разрешима тогда и только тогда, когда

$$\det\{lX\}=\det\left\{\Psi+\int_0^b \Theta(s)(Q^{-1}A(\cdot))(s)ds\right\} \neq 0.$$

Эффективным признакам разрешимости линейных краевых задач посвящен большой цикл работ различных авторов, цитированных в [15]. В основе этих признаков лежит редукция задачи к уравнению второго рода и оценка нормы оператора, порождающего это уравнение: если эта норма меньше единицы, то задача однозначно разрешима. Здесь мы сформулируем признак разрешимости задачи (23) для случая, когда матрица Ψ обратима, $Q=J-S-K$, где операторы S и K определены равенствами (8) и (9) соответственно, причем оператор $J-S$ имеет обратный $P=(J-S)^{-1}$.

Обозначим через $|B|$ матрицу, элементами которой являются модули соответствующих элементов матрицы B; $n \times n$-матрицу $\Lambda=\{\lambda_{ij}\}$ определим равенством

$$\Lambda(s)=\int_0^b |\{PK(\cdot, s)\}(t)+\{PA(\cdot)\}(t)\Psi^{-1}\Theta(s)|dt.$$

Здесь ядро $K(t, s)$ полагается равным нулю вне треугольника Δ_b.

Теорема 9. *Пусть γ_{ij} — такие числа, что $\gamma_{ij} \geqslant \operatorname{vrai\,sup}_{s \in [0, b]} \lambda_{ij}(s)$, $i, j=1, 2, \ldots, n$, и все собственные числа $n \times n$-матрицы $\{\gamma_{ij}\}$ по модулю меньше единицы. Тогда задача (23) однозначно разрешима.*

Если задача (23) однозначно разрешима, то ее решение x при $\alpha=0$ имеет интегральное представление $x(t)=(Gf)(t)=\int_0^b G(t, s)f(s)ds$. Оператор Грина $G: L^n \to \{x \in D^n : lx=0\}$ обратим и его ядро $G(t, s)$ — матрица Грина краевой задачи (23) — удовлетворяет равенству $G(t, s)=C(t, s)-X(t)(lX)^{-1}V(s)$. Здесь $C(t, s)$ — матрица Коши уравнения (2), а матрица $V(s)$ является ядром интегрального представле-

ния вектор-функционала $lC : L^n \to R^n$, который определяется равенством

$$(lC)f = \int_0^b \Theta(s) \left\{ \frac{d}{ds} \int_0^s C(s, \tau) f(\tau) d\tau \right\} ds.$$

Оператор Грина подробно изучен в работе Л. Ф. Рахматуллиной [62], посвященной описанию множества правых и левых регуляризаторов задачи (23).

По сложившейся традиции решение обыкновенного дифференциального уравнения и уравнения с запаздывающим аргументом рассматривают как элемент пространства непрерывных функций. Внутри достаточно узкого круга вопросов это не приводит к затруднениям, а некоторые задачи об устойчивости и о периодических решениях даже целесообразно предварительно свести к уравнению в пространстве непрерывных функций. Однако в общей теории нельзя игнорировать производную решения, и здесь принципиальную роль играет пространство D^n.

Теория краевой задачи (23) приобретает наиболее законченный вид, если рассматривать эту задачу как уравнение $[\mathscr{L}, l]x = g$, где оператор $[\mathscr{L}, l]$ действует из пространства D^n в прямое произведение $L^n \times R^n$. Такой подход к краевым задачам для обыкновенного дифференциального уравнения был предложен Д. Векслером [63]. Если при этом воспользоваться изоморфизмом пространств $L^n \times R^n$ и D^n, то такая концепция краевой задачи оказывается особенно удобной применительно к вопросам, связанным с рассмотрением сопряженной краевой задачи [27]. Отметим, что эти вопросы вызывали в свое время определенные затруднения у многих авторов [23, 64—68].

Доказательства большинства фундаментальных теорем об уравнении $[\mathscr{L}, l]x = g$ в банаховом пространстве $L^n \times R^n$ не опираются на специфику пространства Лебега L^n. Это позволяет предложить «абстрактную теорию краевой задачи» [69] — теорию уравнения $[\mathscr{L}, l]x = g$ в пространстве $B \times R^n$, где B — произвольное банахово пространство, $\mathscr{L} : B \times R^n \to B$ и $l : B \times R^n \to R^n$ — ограниченные линейные операторы. Такая теория уже нашла применение в изучении импульсных систем, сингулярных краевых задач и уравнений вида (7) с необратимым оператором Q [70, 71]. Попытки заменить конечномерное пространство R^n на бесконечномерное R^∞ и рассматривать уравнение $[\mathscr{L}, l]x = g$ в пространстве $B \times R^\infty$ привели к новым результатам о бесконечных системах функционально-дифференциальных уравнений [72], но показали, что ряд важнейших теорем упомянутой выше абстрактной теории не распространяется на такое обобщение.

Результаты работ последнего десятилетия о нелинейных краевых задачах освещены в обзорах [15, 51, 73]. Основная идея этих работ состоит в редукции краевой задачи к такому уравнению второго рода, для которого можно было бы сформулировать содержательную теорему существования на основе известных принципов неподвижной точки. Отметим, что применение некоторых специальных подстановок приводит краевую задачу для широкого класса функционально-дифференциальных уравнений к уравнению Гаммерштейна в пространстве суммируемых функций [15]. Это позволяет получить ряд утверждений о краевых задачах в виде непосредственных следствий известных теорем об уравнениях Гаммерштейна.

Здесь мы остановимся на признаках разрешимости краевых задач, использующих априорные неравенства (18) и вытекающие из них априорные оценки решений исследуемых задач.

Рассмотрим нелинейное возмущение линейной задачи (23):

$$\mathscr{L}x = Fx, \quad lx = \psi x. \tag{25}$$

Оператор $F : D^n \to L^n$ будем предполагать вполне непрерывным, а вектор-функционал $\psi : D^n \to R^n$ непрерывным и ограниченным на каждом

шаре пространства D^n. Из теоремы Лере — Шаудера следует, что задача (25) разрешима, если для всех решений x_λ всех задач

$$\mathscr{L}x=\lambda Fx, \quad lx=\lambda\psi x, \quad \lambda\in[0, 1]$$

существует общая априорная оценка $\|x_\lambda\|_{D^n}\leqslant c$. Отсюда вытекает

Теорема 10 [74]. *Пусть линейная задача (23) однозначно разрешима, а возмущения F и ψ удовлетворяют условию*

$$\frac{\|Fx\|_{L^n}}{\rho_x}\to 0, \quad \frac{|\psi x|}{\rho_x}\to 0 \text{ при } \rho_x\to+\infty,$$

где $\rho_x=\|x\|_{D^n}$. Тогда задача (25) имеет по крайней мере одно решение.

Эта теорема в случае обыкновенного дифференциального уравнения привлекала внимание многих авторов [75].

В качестве примера к теореме 10 рассмотрим нелинейное возмущение линейной периодической задачи

$$\dot{x}(t)-A(t)x(t)=f\left(t, \int_0^t d_sR(t, s)x(s)\right), \quad x(b)-x(0)=\psi x \tag{26}$$

в следующих предположениях. Элементы $n\times n$-матрицы A суммируемы, функция $f:[0, b]\times R^n\to R^n$ удовлетворяет условиям Каратеодори и неравенству $|f(t, z)|\leqslant c(t)+d|z|$, элементы $r_{ij}(t, s)$ $n\times n$-матрицы $R(t, s)$ имеют ограниченное изменение по s при почти каждом $t\in(0, b]$, функции $r_{ij}(\cdot, s)$ и $r_{ij}(\cdot, \cdot)$ измеримы и

$$\int_0^b \bigvee_{s=0}^t r_{ij}(t, s)\,dt<\infty, \quad i, j=1, 2, \ldots, n.$$

Обозначим

$$\rho(t)=\sup\{\|R(t, s)\| : s\in[0, t]\},$$

$$\omega_1(t, \tau)=\sup\{|f(t, z(t))| : z\in L^n, \ |z(s)|\leqslant\tau\rho(s), \ s\in[0, b]\},$$

$$\omega_2(\tau)=\sup\{|\psi x| : x\in D^n, \ \|x\|_{D^n}\leqslant\tau\}.$$

Из теоремы 10 вытекает

Следствие. *Пусть при почти каждом $t\in[0, b]$ квадратичная форма, порождаемая матрицей $A(t)$, строго положительно (строго отрицательно) определена. Если при этом*

$$\lim_{\tau\to+\infty}\frac{1}{\tau}\int_0^b \omega_1(t, \tau)\,dt=0, \quad \lim_{\tau\to+\infty}\frac{1}{\tau}\omega_2(\tau)=0,$$

то задача (26) имеет по крайней мере одно решение.

Рассмотрим теперь для приводимого уравнения (14) краевую задачу

$$\dot{x}=Fx, \quad \eta x=0 \tag{27}$$

с непрерывным вектор-функционалом $\eta: D^n[0, b]\to R^n$.

Предположим сначала, что для уравнения (14) корректно разрешима задача Коши. Воспользуемся канонической формой (16) и обозначим

$$\eta\left[\alpha+\int_0^{(\cdot)}\varphi(s, \alpha)\,ds\right]=\alpha-G\alpha.$$

Если α_0 — корень уравнения $\alpha=G\alpha$, то решение задачи Коши (15) при $\alpha=\alpha_0$ является решением краевой задачи (27). Если имеется эффективный метод приближенного решения задачи Коши для уравнения $\dot{x}=Fx$, то можно организовать, пользуясь, например, схемой работы

[76], приближенное решение задачи (27), основываясь на методах приближенного решения уравнения $\alpha = G\alpha$.

Пусть для уравнения (14) построено априорное неравенство (18) и пусть существует такой функционал $\mu : L^1[0, b] \times R^1 \to R^1$, неубывающий по первому аргументу, что

$$|x(0) - \eta x| \leqslant \mu(|\dot{x}(\cdot)|, |x(0)|) \quad \forall x \in D^n. \tag{28}$$

В терминах мажорант m и μ можно записать условие, при выполнении которого непрерывная функция G отображает некоторый шар пространства R^n в себя и, следовательно, уравнение $\alpha = G\alpha$ разрешимо. Такими условиями, например, являются:

$$\overline{\lim_{\delta \to +\infty}} \frac{1}{\delta} \mu[m(\cdot, \delta), \delta] < 1; \tag{29}$$

множество всех положительных решений неравенства

$$\delta \leqslant \mu[m(\cdot, \delta), \delta] \tag{30}$$

ограничено; функции $m(t, \cdot)$ и $\mu(z, \cdot)$ не убывают и существует такое $\delta > 0$, что $\delta \geqslant \mu[m(\cdot, \delta), \delta]$. Каждое из этих условий гарантирует разрешимость задачи (27).

Наличие априорного неравенства (18) позволяет использовать схему Лере — Шаудера при доказательстве теорем существования решения задачи (27) для приводимого уравнения (14), не производя построения вполне непрерывного оператора F_1. Действительно, приводимость уравнения позволяет предположить, что задача (27) эквивалентна уравнению $x = \Phi x$ с вполне непрерывным оператором Φ. Это уравнение разрешимо, если существует общая априорная оценка всех решений семейства уравнений

$$x = \lambda \Phi x, \quad \lambda \in [0, 1]. \tag{31}$$

Главное затруднение при получении такой оценки в общем случае состоит в том, что мы не знаем представления оператора Φ, так как приводимость гарантирует лишь его существование. Таким образом, располагая только априорным неравенством (18), нельзя без дополнительных предположений получить априорную оценку решения уравнения (31) при $\lambda \in (0, 1)$.

Опишем ситуацию, в которой уравнение (14) оказывается приводимым, а нужную оценку решений семейства уравнений (31) можно получить, воспользовавшись теоремой 7.

Обозначим через Z_1 и Z_2 линейные пространства измеримых вектор-функций, определенных на $[0, b]$, и сформулируем следующее

Условие H [50]. *Оператор $F : D^n \to L^n$ допускает представление $Fx = F_0(\Theta x, \Sigma \dot{x})$, где*

$$\Theta : D^n \to Z_1, \quad \Sigma : L^n \to Z_2, \quad F_0 : \Theta D^n \times \Sigma L^n \to L^n,$$

причем существует такой оператор $H : \Theta D^n \to L^n$, что для любого $z \in \Theta D^n$ функция $y = Hz$ является единственным решением уравнения $y = F_0(z, \Sigma y)$, а произведение $H\Theta : D^n \to L^n$ является вполне непрерывным оператором.

Пусть выполнено условие «H» и, кроме того, для любых $x \in D^n$ и $y \in L^n$ имеем: $|F_0(\Theta x, \Sigma y)| \leqslant B_1 N M x + B_2 |y|$ (операторы B_1, B_2, N и M определены в § 4 при рассмотрении мажорантной задачи). Если при этом существует верхнее решение $y(t, \beta)$ задачи (22) и мажоранта m определена равенством $m(t, |x(0)|) = [(J - B_2)^{-1} B_1 N z](t)$, где $z(t) = u(t) y(t, |x(0)|)$, то каждое из условий (29) и (30) гарантирует разрешимость задачи (27).

Действительно, уравнение (14) эквивалентно уравнению $\dot{x} = H\Theta x$ с вполне непрерывным оператором $H\Theta$, а задача (27) эквивалентна уравнению $x = \Phi x$ в пространстве D^n, где

$$(\Phi x)(t)=\int_0^t (H\Theta x)(s)\,ds+[x(0)-\eta x].$$

Априорное неравенство (18), полученное в силу теоремы 7, справедливо в сделанных предположениях для всех решений x_λ всех уравнений $\dot{x}=\lambda H\Theta x$, $\lambda\in[0, 1]$. При $\lambda=0$ и $\lambda=1$ это очевидно. Если же $\lambda\in(0, 1)$, то из условия «H» и соотношения $\frac{1}{\lambda}\dot{x}=H\Theta x$ следует, что x_λ — решение уравнения

$$\dot{x}=\lambda F_0\left(\Theta x, \Sigma\frac{1}{\lambda}\dot{x}\right).$$

Таким образом, неравенство (18) вместе с любым из условий (29) или (30) гарантирует наличие общей априорной оценки всех решений x_λ всех уравнений

$$x=\lambda\Phi x\equiv\lambda\left\{\int_0^t (H\Theta x)(s)\,ds+[x(0)-\eta x]\right\}.$$

Отсюда в силу теоремы Лере — Шаудера следует разрешимость уравнения $x=\Phi x$, эквивалентного задаче (27).

Вопрос об условиях непрерывной зависимости решения краевой задачи от параметров этой задачи естественным образом связан с общей проблемой о непрерывной зависимости решений операторных уравнений. Этой проблеме посвящена недавняя работа Ц. Артштейна [77], идеи и результаты которой позволяют на основе опыта работ [15, 54] сформулировать общее утверждение о краевой задаче. Для формулировки этого утверждения воспользуемся следующими понятиями.

Говорят, что операторы N_k, $k=1, 2, \ldots$, действующие из банахова пространства X в банахово пространство Y, компактны в совокупности, если множество $\bigcup_k N_kB$ компактно в Y для любого ограниченного множества $B\subset X$. Под сходимостью $N_k\to N$ $(N: X\to Y)$ будем понимать непрерывную сходимость: $\{\|x_k-x\|_X\to 0$ при $k\to\infty\}\Rightarrow\{\|N_kx_k-Nx\|_Y\to 0$ при $k\to\infty\}$.

Наряду с задачей (25) рассмотрим последовательность краевых задач

$$\mathscr{L}_kx=F_kx,\quad l_kx=\psi_kx,\quad k=1, 2, \ldots, \tag{32}$$

в предположении, что эти задачи разрешимы, что $\mathscr{L}_k\to\mathscr{L}$, $F_k\to F$, $l_k\to l$, $\psi_k\to\psi$ и что разрешима задача (25).

Теорема 11 [54]. *Пусть существует такой линейный ограниченный вектор-функционал $l_0: D^n\to R^n$, что при каждом $g\in L^n$ задача $\mathscr{L}_kx=g$, $l_0x=0$, $k=1, 2, \ldots$, имеет решение z_k, причем $\sup_k\|z\|_{D^n}<\infty$. Пусть, далее, операторы F_k и ψ_k, $k=1, 2, \ldots$, компактны в совокупности и для всех решений x_k задач (32), $k=1, 2, \ldots$, имеет место общая априорная оценка: $\|x_k\|_{D^n}\leqslant d<\infty$.*

Тогда каждая последовательность $\{x_k\}$, $k=1, 2, \ldots$, решений задач (32) компактна и все ее предельные точки являются решениями задачи (25). Если при этом в шаре $\{z\in D^n: \|z\|_{D^n}\leqslant d\}$ содержится только одно решение x задачи (32), то $\|x_k-x\|_{D^n}\to 0$ при $k\to\infty$.

Признаки совокупной компактности конкретных операторов приведены в [54].

Об условиях непрерывной зависимости решения краевой задачи $\dot{x}=Fx$, $lx=\alpha$ без предположения о компактности оператора F см. в [14, 78].

§ 6. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

п°1. Управляемость. Общие теоремы об управляемости линейных систем $\mathscr{L}x=Gu+f$ сформулированы в [15]. Здесь мы рассмотрим квазилинейную систему управления

$$\mathscr{L}x=Gu+F(x, u), \tag{33}$$

где G — $n\times m$-матрица со столбцами из пространства L_2^n функций $z:[0, b]\to R^n$, компоненты которых суммируемы с квадратом на $[0, b]$, $u\in U^m\subset L_2^m$, U^m — некоторое банахово пространство функций $u:[0, b]\to R^m$. Оператор $F:D^n\times U^m\to L^n$ вполне непрерывен. Будем предполагать, что для каждого $\alpha\in R^n$ и каждого $u\in U^m$ задача Коши $\mathscr{L}x=Gu+F(x, u)$, $x(0)=\alpha$ однозначно разрешима.

Обозначим $V(s)=G^T(s)C^T(b, s)$, $W(t)=\int\limits_0^t C(t, s)G(s)V(s)ds$, где $C(t, s)$ — матрица Коши оператора $\mathscr{L}$, $\cdot^T$ — символ транспонирования.

Теорема 12 [79]. *Пусть выполнены условия: а) матрица $W(b)$ обратима; б) столбцы матрицы V принадлежат пространству U^m;*

$$\text{в)}\ \lim_{\rho_{xu}\to+\infty}\frac{\|F(x, u)\|}{\rho_{xu}}L^n=0,\ \text{где}\ \rho_{xu}=\|\{x, u\}\|_{D^n\times U^m}.$$

Тогда для любого $\alpha\in R^n$ найдется такое управление $u_\alpha\in U^m$, для которого решение x_α задачи Коши

$$\mathscr{L}x=Gu_\alpha+F(x, u_\alpha),\quad x(0)=\alpha$$

удовлетворяет условию $x_\alpha(b)=0$.

Замечания к теореме 12. 1. Условие а) гарантирует управляемость линейной системы $\mathscr{L}x=Gu+f$ (теорема 9 работы [15]).

2. Условие б) связывает выбор пространства U^m со свойствами матриц $G(s)$ и $C(b, s)$. В частности, если эти матрицы непрерывны (абсолютно непрерывны), то в качестве U^m можно принять пространство непрерывных (абсолютно непрерывных) вектор-функций. При таком выборе пространства U^m условия а) и в) теоремы гарантируют существование непрерывного (абсолютно непрерывного) управления u. Для систем с постоянным запаздыванием упомянутая связь гладкости матриц $G(s)$ и $C(b, s)$ с выбором пространства управлений отмечалась в [80].

3. Пусть F — оператор Немыцкого: $F(x, u)(t)=f(t, x(t), u(t))$ и функция $f:[0, b]\times R^n\times R^m\to R^n$ удовлетворяет условиям Каратеодори. Если $G(s)$ и $C(b, s)$ абсолютно непрерывны, то можно положить $U^m=D^m$. Тогда полная непрерывность оператора $F:D^n\times D^m\to L^n$ обеспечивается неравенством

$$|f(t, x, u)|\leqslant\rho(t)+\mu|x|^p+\nu|u|^r,$$

где $0\leqslant p,\ r<\infty$. Если, кроме того, $p,\ r<1$, то, очевидно, выполнено и условие в) теоремы.

п°2. Задача Томаса — Ферми. В статистической теории атома возникает [81] краевая задача $\sqrt{t}\,\ddot{y}=y^{3/2}$, $y(0)=\alpha$, $\dot{y}(b)=\dfrac{y(b)}{b}$, $\alpha>0$.

Рассмотрим обобщение этой задачи

$$q(t)\ddot{y}=f(y),\quad y(0)=\alpha>0,\quad \dot{y}(b)=\psi[y(b)]+d, \tag{34}$$

предполагая, что функции $f,\ \psi:R^1\to R^1$ непрерывны, $f(y)\geqslant0$ при $y\geqslant0$ и $f(y)=0$ при $y<0$; функция $q\in D^1$ неотрицательна, не убывает и $\int\limits_0^b\dfrac{ds}{q(s)}<\infty$.

Подстановка $\dot{y}=x$ сводит задачу (34) к краевой задаче для интегро-дифференциального уравнения первого порядка:

$$\dot{x}(t)=\frac{1}{q(t)}f\left(\alpha+\int_0^t x(s)ds\right),\quad x(b)=\psi\left[\alpha+\int_0^b x(s)ds\right]+d.$$

Исследование разрешимости этой задачи методами, описанными в § 5, приводит к следующему утверждению.

Теорема 13. *Пусть для любых* $\lambda\in(0,1]$ *и* $\mu\in(0,b)$ *уравнение* $\xi=\lambda(b-\mu)[\psi(\xi)+d]$ *не имеет отрицательных решений. Пусть, далее, функции* $\eta_1,\eta_2:[0,\infty)\to[0,\infty)$ *таковы, что для любого* $\beta\geqslant 0$ *выполняется неравенство*

$$\int_\alpha^\beta f(s)ds\geqslant\eta_1(\beta)-\eta_2(\alpha)$$

и множество положительных решений ξ *неравенства*

$$\eta_1(\xi)\leqslant\frac{q(b)}{2}[|\psi(\xi)|+|d|]^2+\eta_2(\alpha)$$

ограничено. Тогда задача (34) имеет по крайней мере одно неотрицательное решение y *с абсолютно непрерывной производной* $\dot{y}$.

п°3. Метод Тонелли. Теорема 11 о непрерывной зависимости позволяет иногда получить доказательство сходимости того или иного приближенного метода. Проиллюстрируем сказанное на случае абстрактного аналога метода Тонелли приближенного решения задачи Коши $\dot{x}=Fx$, $x(0)=\alpha$ с вполне непрерывным оператором $F:D^n\to L^n$.

Предполагая однозначную разрешимость этой задачи, рассмотрим последовательность $\{x_k\}$ решений задач $\dot{x}=F_kx$, $x(0)=\alpha$, где

$$F_kx=F[\alpha+VT_k\dot{x}],\quad (Vz)(t)=\int_0^t z(s)ds,$$

$$(T_kz)(t)=\begin{cases} z(t-\tau_k), & \text{если } (t-\tau_k)\in[0,b],\\ 0, & \text{если } (t-\tau_k)\notin[0,b].\end{cases}$$

В силу теоремы 11 имеем: если $\tau_k>0$, $\tau_k\to 0$ при $k\to\infty$ и последовательность $\{x_k\}$ ограничена, то $\lim\limits_{k\to\infty}\|x_k-x\|_{D^n}=0$, где x — решение исходной задачи.

п°4. Уравнение движения в случае конечной скорости дальнодействия. Математическое описание взаимодействия быстро движущихся тел, обладающих массой или электрическим зарядом, приводит [7, 8] к уравнению вида

$$\begin{gathered}\dot{x}(t)=f(t,x[h(t,x(t))],\ \dot{x}[g(t,x(t))]),\quad t\geqslant 0,\\ x(\xi)=\varphi(\xi),\quad \dot{x}(\xi)=\psi(\xi),\quad \text{если}\quad \xi<0.\end{gathered}\tag{35}$$

Трудности исследования такого уравнения связаны с наличием нелинейных операторов внутренней суперпозиции

$$(\Theta_hx)(t)=\begin{cases} x[h(t,x(t))], & \text{если } h(t,x(t))\geqslant 0,\\ \varphi[h(t,x(t))], & \text{если } h(t,x(t))<0,\end{cases}$$

и

$$(\Sigma_gx)(t)=\begin{cases} \dot{x}[g(t,x(t))], & \text{если } g(t,x(t))\geqslant 0,\\ \psi[g(t,x(t))], & \text{если } g(t,x(t))<0,\end{cases}$$

еще очень мало изученных.

Простые примеры показывают, что оператор $\Theta_h:D^n\to L^n$, вообще говоря, не обладает свойством непрерывности. Поэтому естественным

образом возникли попытки [82, 83] подойти к уравнению вида $\dot{x}(t)=f(t, \Theta_h x)$ на основе теории функционально-дифференциальных включений, развиваемой А. И. Булгаковым, Л. Н. Ляпиным [84] и другими авторами. Применение аппарата включений связано с обобщением понятия решения и приводит иногда к рассмотрению решений, не имеющих физического смысла.

Другой подход к уравнению (35) использует тот факт, что на некоторых специальных множествах операторы Θ_h и Σ_g обладают нужными свойствами [85, 86]. Такой подход может исключить из рассмотрения некоторые нужные решения.

На основе априорного неравенства (18) и априорных оценок (17) иногда удается установить корректную разрешимость задачи Коши $\dot{x}(t)=f(t, \Theta_h x)$, $x(0)=\alpha$, где $|\alpha|$ ограничена некоторой постоянной ρ. Тогда уравнение (35) оказывается приводимым, если ограничиться рассмотрением только тех решений x, для которых $\{\dot{x}(\cdot), x(0)\}\in\{y\in L^n : |y(t)|\leqslant\gamma(t)\}\times\{\alpha\in R^n : |\alpha|\leqslant\rho\}$.

п°5. Динамические модели экономических систем. В заключение отметим возрастающее значение уравнений вида (1) в современных исследованиях по математической экономике. Например, в работе [87] показано, что модель динамического межотраслевого баланса с нелинейными производственными функциями описывается уравнением вида

$$\dot{x}(t)=f(t, x(t), x(t-\tau_1), \ldots, x(t-\tau_m); \dot{x}(t-\tau_1), \ldots, \dot{x}(t-\tau_m)), \quad t\geqslant 0,$$

$$x(\xi)=\varphi(\xi), \quad \dot{x}(\xi)=\psi(\xi), \quad \text{если} \quad \xi<0.$$

Здесь x — запас основных фондов в фондообразующей отрасли. На основе априорных неравенств и теоремы 1 работы [50] получены эффективные условия существования положительного решения задачи Коши для этого уравнения.

Литература

1. Мышкис А. Д. О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.— УМН, 1977, т. 32, № 2, с. 173—202.
2. Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом.— Киев: Наукова думка, 1977.— 308 с.
3. Corduneanu C., Lakshmikantham V. Equations with unbounded delay: a survey.— Nonlinear Anal.: Theory, Meth. and Appl., 1980, vol. 4, N 5, p. 831—877.
4. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.— М.: Наука, 1970.— 534 с.
5. Мамедов Я. Д. Односторонние оценки в условиях исследования решений дифференциальных уравнений в банаховых пространствах.— Баку: Элм, 1971.— 120 с.
6. Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения.— М.: Мир, 1978.— 336 с.
7. Драйвер Р. Д. Топологии для уравнений нейтрального типа и классическая электродинамика.— В кн.: Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом. Киев: Наукова думка, 1977, с. 113—127.
8. Писаренко В. Г. Уравнения с отклоняющимся аргументом, возникающие в проблеме многих тяготеющих электрически заряженных тел при учете запаздывания сил взаимодействия.— В кн.: Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом. Киев: Наукова думка, 1977, с. 255—269.
9. Hale J. K. Theory of functional differential equations.— Berlin, Springer, 1977.— 365 p.
10. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями.— М.: Наука, 1977.— 624 с.
11. Schwabik Š., Tvrdý M., Veivoda O. Differential and integral equations. Boundary value problems and adjoints.— Praha, Academia, 1979.—252 p.
12. Mawhin J. Topological degree methods in nonlinear boundary value problems. (Regional conference series in mathematics, N 40).— Amer. Math. Soc., Providence, 1979.— 123 p.
13. Ахмеров Р. Р., Каменский М. И., Потапов А. С., Садовский Б. Н. Уплотняющие операторы.— Математический анализ, т. 18 / Итоги науки и техники.— М.: ВИНИТИ, 1980, с. 189—254.
14. Ахмеров Р. Р., Каменский М. И., Потапов А. С. и др. Теория уравнений нейтрального типа.— Математический анализ, т. 19 / Итоги науки и техники.— М.: ВИНИТИ, 1981, с. 55—126.
15. Азбелев Н. В., Рахматуллина Л. Ф. Функционально-дифференциальные уравнения.— Дифференц. уравнения, 1978, т. 14, № 5, с. 771—797.

16. Тихонов А. Н. О функциональных уравнениях типа Вольтерра и их применениях к некоторым задачам математической физики.— Бюл. Моск. ун-та, Секция А, 1938, т. 1, вып. 8, с. 1—25.
17. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения.— М.: Физматгиз, 1959.— 212 с.
18. Мышкис А. Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. Изд-е 2-е.— М.: Наука, 1972.— 352 с.
19. Норкин С. Б. Дифференциальные уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом.— М.: Наука, 1965.— 354 с.
20. Тышкевич В. А. Некоторые вопросы теории устойчивости функционально-дифференциальных уравнений.— Киев: Наукова думка, 1981.— 80 с.
21. Коплатадзе Р. Р., Чантурия Т. А. Об осцилляционных свойствах дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.— Изд-во Тбил. гос. ун-та, 1977.— 116 с.
22. Митропольский Ю. А., Шевело В. Н. О развитии теории осцилляции решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.— Укр. матем. журн., 1977, т. 29, № 3, с. 313—323.
23. Азбелев Н. В., Исламов Г. Г. Об одном классе функционально-дифференциальных уравнений.— Дифференц. уравнения, 1976, т. 12, № 3, с. 417—427.
24. Азбелев Н. В., Березанский Л. М., Рахматуллина Л. Ф. О линейном функционально-дифференциальном уравнении эволюционного типа.— Дифференц. уравнения, 1977, т. 13, № 11, с. 1915—1925.
25. Быкадоров Ю. А. О дифференциально-интегральном операторе.— Дифференц. уравнения, 1980, т. 16, № 5, с. 901—907.
26. Рахматуллина Л. Ф. О канонических формах линейных функционально-дифференциальных уравнений.— Дифференц. уравнения, 1975, т. 11, № 12, с. 2143—2153.
27. Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф. Сопряженное уравнение для общей линейной краевой задачи.— Дифференц. уравнения, 1977, т. 13, № 11, с. 1966—1973.
28. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Общая теория.— М.: ИЛ, 1962.— 896 с.
29. Драхлин М. Е., Плышевская Т. К. Краевая задача для нелинейного дифференциального уравнения нейтрального типа.— Дифференц. уравнения, 1975, т. 11, № 6, с. 986—996.
30. Драхлин М. Е., Плышевская Т. К. К теории функционально-дифференциальных уравнений.— Дифференц. уравнения, 1978, т. 14, № 8, с. 1347—1361.
31. Курбатов В. Г. Линейные функционально-дифференциальные уравнения и запаздывающий спектр.— Сиб. матем. журн., 1975, т. 16, № 3, с. 538—550.
32. Курбатов В. Г. О спектре оператора с соизмеримыми отклонениями аргумента и постоянными коэффициентами.— Дифференц. уравнения, 1977, т. 13, № 10, с. 1770—1775.
33. Березанский Л. М. О спектральном радиусе оператора внутренней суперпозиции / Краевые задачи.— Межвуз. сб. научных трудов: Изд-во Пермского гос. ун-та, 1977, с. 60—61.
34. Абдуллаев А. Р. Оператор внутренней суперпозиции в пространствах суммируемых функций.— Пермь, 1981.— 20 с.— Деп. в ВИНИТИ, 1981, № 982—81.
35. Рахматуллина Л. Ф. О представлении решений линейных функционально-дифференциальных уравнений. Всесоюзная конференция по качеств. теории дифференц. уравнений / Тезисы докладов.— Кишинев: Штиинца, 1979, с. 145—146.
36. Hilb E. Zur Theorie der linearen funktional Differentialgleichungen.— Math. Ann., 1917, vol. 78, p. 137—170.
37. Зверкин А. М. Некоторые вопросы теории линейных дифференциально-функциональных уравнений.— В кн.: Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом. Киев: Наукова думка, 1977, с. 127—139.
38. Азбелев Н. В., Бердникова М. П., Рахматуллина Л. Ф. Интегральные уравнения с отклоняющимся аргументом.— Докл. АН СССР, 1970, т. 192, № 3, с. 479—482.
39. Ландо Ю. К. Функция Коши линейного интегро-дифференциального уравнения типа Вольтерра.— Уч. зап. Минск. гос. пед. ин-та, сер. физ.-матем., 1956, вып. 5, с. 41—47.
40. Ведь Ю. А., Пахыров З. Об ограниченности и устойчивости решений интегро-дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.— Дифференц. уравнения, 1969, т. 5, № 11, с. 2050—2061.
41. Banks H. T. Representation for solutions of linear functional differential equations.— J. Different. Equat., 1969, vol. 5, N 2, p. 399—409.
42. Максимов В. П. Свойства функции Коши системы уравнений с запаздывающим аргументом.— Труды Моск. ин-та хим. машиностроения, 1973, вып. 48, с. 6—7.
43. Зубко Ю. И., Тышкевич В. А. К вопросу о положительности функции Коши.— Дифференц. уравнения, 1973, т. 9, № 7, с. 1207—1213.
44. Максимов В. П. О формуле Коши для функционально-дифференциального уравнения.— Дифференц. уравнения, 1973, т. 9, № 7, с. 1207—1213.
45. Барбашин Е. А. Введение в теорию устойчивости.— М.: Наука, 1967.— 223 с.
46. Култышев С. Ю., Максимов В. П. Управляемость линейных функцио-

нально-дифференциальных систем.— Труды Моск. ин-та хим. машиностроения, 1975, вып. 64, с. 23—26.

47. Азбелев Н. В., Сулавко Т. С. К вопросу об устойчивости решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.— Дифференц. уравнения, 1974, т. 10, № 12, с. 2091—2100.

48. Малыгина В. В., Соколов В. А. К вопросу об экспоненциальной оценке функции Коши скалярного функционально-дифференциального уравнения.— Пермь, 1981.— Деп. в ВИНИТИ, 1981, № 3881—81.

49. Азбелев Н. В. О нелинейных функционально-дифференциальных уравнениях.— Дифференц. уравнения, 1976, т. 12, № 11, с. 1923—1932.

50. Азбелев Н. В., Максимов В. П. Априорные оценки решений задачи Коши и разрешимость краевых задач для уравнений с запаздывающим аргументом.— Дифференц. уравнения, 1979, т. 15, № 10, с. 1731—1747.

51. Азбелев Н. В. Краевые задачи для нелинейных функционально-дифференциальных уравнений.— В кн.: Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом. Киев: Наукова думка, 1977, с. 5—11.

52. Драхлин М. Е. К вопросу о приводимости функционально-дифференциального уравнения к уравнению с вполне непрерывным оператором / Краевые задачи.— Межвуз. сб. научных трудов: Изд-во Пермского политехн. ин-та, 1979, с. 168—170.

53. Максимов В. П. Нётеровость общей краевой задачи для линейного функционально-дифференциального уравнения, 1974, т. 10, № 12, с. 2288—2291.

54. Максимов В. П. О предельном переходе в краевых задачах для функционально-дифференциальных уравнений.— Дифференц. уравнения, 1981, т. 17, № 11, с. 1984—1994.

55. Азбелев Н. В., Цалюк З. Б. Об интегральных неравенствах.— Мат. сб., 1962, т. 56, № 3, с. 325—342.

56. Булгаков А. И., Ляпин Л. Н. О связности множества решений включения с вольтерровым оператором / Краевые задачи.— Межвуз. сб. научных трудов: Изд-во Пермского политехн. ин-та, 1980, с. 146—149.

57. Азбелев Н. В., Цалюк З. Б. Об интегральных и дифференциальных неравенствах. Труды IV Всесоюзного матем. съезда, т. 2.— Л.: Наука, 1964, с. 384—391.

58. Кигурадзе И. Т. Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений.— Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1975.

59. Жуковский Е. С. Об интегральных неравенствах в пространствах суммируемых функций.— Дифференц. уравнения, 1982, т. 18, № 4, с. 580—584.

60. Максимов В. П. Разрешимость одного класса нелинейных краевых задач / Краевые задачи.— Межвуз. сб. научных трудов: Изд-во Пермского политехнического ин-та, 1981, с. 75—82.

61. Нгуен Тхе Хоан. Об асимптотическом поведении решений нелинейных систем дифференциальных уравнений.— Дифференц. уравнения, 1981, т. 17, № 4, с. 624—628.

62. Рахматуллина Л. Ф. Оператор Грина и регуляризация линейных краевых задач.— Дифференц. уравнения,1979, т. 15, № 3, с. 425—435.

63. Wexler D. On boundary value problems for an ordinary linear differential system.— Ann. di Mat. pura ed appl., 1968, vol. 80, p. 123—136.

64. Ландо Ю. К. Об индексе и нормальной разрешимости интегро-дифференциальных операторов.— Дифференц. уравнения, 1968, т. 4, № 6, с. 1112—1126.

65. Пархимович И. В. О построении S-сопряженных операторов к интегро-дифференциальным.— Дифференц. уравнения, 1972, т. 8, № 8, с. 1486—1493.

66. Исламов Г. Г. К вопросу об интегральном уравнении с отклоняющимся аргументом.— Дифференц. уравнения, 1974, т. 10, № 3, с. 521—530.

67. Ахиев С. С., Ахмедов К. Т. К более общему понятию сопряженного уравнения для системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом нейтрального типа.— Изв. АН АзССР, 1972, № 3, с. 126—130.

68. Tvrdý M., Veivoda O. General boundary value problems for an integrodifferential system and its adjoint.— Cas. pěstov. mat., 1972, vol. 97, N 4, p. 399—419; 1973, vol. 98, N 1, p. 26—42.

69. Анохин А. В. К общей теории линейных функционально-дифференциальных уравнений.— Пермь, 1981.— 31 с.— Деп. в ВИНИТИ, 1981, № 1389—81.

70. Шиндяпин А. И. К вопросу о сингулярных функционально-дифференциальных уравнениях.— Пермь, 1981.— 12 с.— Деп. в ВИНИТИ, 1982, № 113—82.

71. Лямин А. Г. Оператор внутренней суперпозиции в пространстве функций ограниченной вариации.— Пермь, 1982.— 21 с.— Деп. в ВИНИТИ, 1982, № 981—82.

72. Бродовский В. Г. Одна краевая задача для счетной системы дифференциальных уравнений.— В сб.: Теоретические и прикладные задачи математики и механики. Алма-Ата: Наука, 1977.

73. Байнов В. Г., Константинов М. М. Исследования по фундаментальной теории и теории устойчивости дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом в Народной Республике Болгарии. В кн.: Дифференциальые уравнения с отклоняющимся аргументом.— Киев: Наукова думка, 1977, с. 34—42.

74. Максимов В. П. Априорные неравенства и разрешимость нелинейных краевых задач для функционально-дифференциальных уравнений.— Дифференц. уравнения, 1981, т. 17, № 4, с. 750—752.

75. Conti R. Recent trends in the theory of boundary value problems for ordinary differential equations.— Boll. Unione mat., 1967, vol. 22, N 2, p. 135—178.

76. Коробейников В. В. О численном решении нелинейных краевых задач / Краевые задачи.— Межвуз. сб. научных трудов: Изд-во Пермского гос. ун-та, 1977, с. 93—96.
77. Artstein Z. Continuous dependence of solutions of operator equations.— Trans. Amer. Math. Soc., 1977, vol. 231, N 1, p. 143—166.
78. Драхлин М. Е., Плышевская Т. К. О корректности краевых задач для функционально-дифференциальных уравнений.— Дифференц. уравнения, 1980, т. 16, № 2, с. 214—226.
79. Култышев С. Ю., Максимов В. П. Управляемость нелинейных функционально-дифференциальных систем / Краевые задачи.— Межвуз. сб. научных трудов: Изд-во Пермского политехн. ин-та, 1982, с. 12—18.
80. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Задачи теории оптимальных процессов в системах с последействием.— В кн.: Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом. Киев: Наукова думка, 1977, с. 93—102.
81. Гамбош П. Статистическая теория атома и ее применения.— М.: ИЛ, 1951.— 397 с.
82. Булгаков А. И., Максимов В. П. Функциональные и функционально-дифференциальные включения с вольтерровыми операторами.— Дифференц. уравнения, 1981, т. 17, № 8, с. 1362—1374.
83. Карибов М. Р. Функционально-дифференциальные включения: Автореф. Дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Горький, 1981.
84. Булгаков А. И., Ляпин Л. Н. Об интегральном включении с функциональным оператором.— Дифференц. уравнения, 1979, т. 15, № 5, с. 878—884.
85. Драхлин М. Е. О некоторых топологических свойствах одного интегрального оператора.— Дифференц. уравнения, 1972, т. 8, № 4, с. 721—724.
86. Азбелев Н. В., Максимов В. П. Об одном классе уравнений, возникающих в проблеме тяготения электрически заряженных тел с учетом запаздывания сил взаимодействия.— В сб.: Гравитация и объединение фундаментальных полей. Киев: Наукова думка, 1982.
87. Андрианов Д. Л. Задача программного управления одной динамической системой при наличии запаздывания. В кн.: Проблемы механики управляемого движения / Оптимизация процессов управления.— Изд-во Пермского гос. ун-та, 1982.

Пермский политехнический институт

Поступила в редакцию 13 мая 1982 г.

УДК 517.968

М. И. ИМАНАЛИЕВ, Б. В. ХВЕДЕЛИДЗЕ, Т. Г. ГЕГЕЛИЯ,
А. А. БАБАЕВ, А. И. БОТАШЕВ

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В становление и развитие теории и приложений интегральных уравнений существенный вклад внесли советские математики. За 60 лет ими опубликовано более 6 тысяч статей, 100 монографий, 10 крупных обзоров, посвященных различным аспектам теории линейных и нелинейных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений.

В настоящем обзоре отражены в основном работы советских математиков, опубликованные в последние 15—20 лет, работам, вышедшим до этого периода, посвящены обстоятельные обзоры, на которые в тексте имеются соответствующие ссылки. Библиография к данной работе не приводится, но вместе с тем в тексте указаны монографии и обзорные статьи, посвященные многим вопросам современной теории интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. В этих работах имеются более полные библиографические сведения. В соответствующих местах указываем авторов, принимавших участие в разработке того или иного вопроса. В данном обзоре авторы старались охватить те результаты по развитию теории интегральных и интегро-дифференциальных уравнений, которые не включены в ранее опубликованные обзоры.

Исследования по теории интегральных и интегро-дифференциальных уравнений продолжаются.