

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Бардаков, Разложение четных подстановок на два множителя заданного циклового строения,
Дискрет. матем., 1993, том 5, выпуск 1, 70–90

<https://www.mathnet.ru/dm669>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.173

12 мая 2025 г., 20:57:19



УДК 512.542.7

РАЗЛОЖЕНИЕ ЧЕТНЫХ ПОДСТАНОВОК НА ДВА МНОЖИТЕЛЯ ЗАДАННОГО ЦИКЛОВОГО СТРОЕНИЯ

В.Г. Бардаков

Доказывается гипотеза Бреннера – Эванса: для любых натуральных чисел $k \geq 4$, $m \geq 1$ всякая четная подстановка из группы A_{km} является произведением двух подстановок, каждая из которых разлагается в произведение m независимых циклов длины k . Известно, что при $k = 2, 3$ это утверждение неверно.

Известно (см., например, [1, 2]), что в знакопеременной группе A_n при $n > 2$ не всякий элемент представим в виде произведения двух инволюций из A_n , но всякий элемент представим в виде произведения двух элементов порядка 3 (см. [2]). В связи с этими результатами Бреннер и Эванс [3] поставили проблему описания всех четных подстановок, представимых в виде произведения двух элементов порядка k ($k \geq 4$). В той же работе ими была выдвинута гипотеза: при любых целых $k \geq 4$ и $m \geq 1$ всякий элемент группы A_{km} представим в виде произведения двух подстановок, каждая из которых в разложении на независимые циклы состоит из m циклов длины k . При $k = 2, 3$ это утверждение неверно.

Ранее справедливость гипотезы была доказана только при $k = 4$, $m \geq 1$ и при $k \geq 5$, $m = 1$ [4, с. 103; 5]. В предлагаемой работе гипотеза доказывается в полном объеме.

Т е о р е м а. *Для любых целых чисел $k \geq 4$, $m \geq 1$ всякая подстановка из знакопеременной группы A_{km} представима в виде произведения двух подстановок, каждая из которых разлагается на m независимых циклов длины k .*

В [3] доказано, что всякий элемент из A_n при $n \geq 15$ представим в виде произведения двух элементов порядка 5, тем самым исправлено ошибочное утверждение из [6]. Кроме того, сам Бреннер (см. [3]) анонсировал, что при $n \geq 28$ всякий элемент из A_n представим в виде произведения двух элементов порядка 7. Исходя из этих результатов, выдвинем следующую гипотезу: если $k = 2k_1 - 1$ простое число не меньше 5, то при всех $n \geq kk_1$ всякий элемент из A_n представим в виде произведения двух элементов порядка k .

Автор благодарит профессора Ю.И. Мерзлякова за постоянную помощь и поддержку в работе, а также участников семинара "Эварист Галуа", прослушавших докладательства и внесших ряд полезных предложений.

§ 1. Определения и обозначения

Будем обозначать символом S_n симметрическую группу n -й степени, т.е. группу подстановок n -элементного множества $M = \{1, 2, \dots, n\}$. Пусть P — некоторая подстановка из S_n . Тогда под действием группы $\text{gr}(P)$ множество M разбивается на непересекающиеся орбиты M_1, \dots, M_l . Действие подстановки P на всем множестве M индуцирует ее действие на каждой орбите M_i . Будем называть ограничение $P_i = P|_{M_i}$ циклом подстановки P , а множество M_i — носителем цикла P_i и обозначать $M_i = \text{supp}(P_i)$.

Подстановку P можно представить в виде произведения $P = P_1 P_2 \dots P_l$ независимых циклов.

С каждым разложением $P = P_1 \dots P_l$ подстановки P в произведение независимых циклов свяжем упорядоченную последовательность $\tau(P) = (\tau_1, \dots, \tau_l)$, где τ_i — длина цикла P_i , которую назовем циклическим типом (или просто типом) подстановки P . Числа τ_i будем называть компонентами типа $\tau(P)$, а l — длиной типа. Понятно, что циклический тип определяется неоднозначно, а зависит от порядка следования циклов P_i в разложении $P = P_1 \dots P_l$. Среди всех типов подстановки P будем выделять такой тип, что его компоненты упорядочены следующим образом: сначала идут нечетные компоненты в порядке убывания, а затем — четные компоненты так же в порядке убывания. Такой тип будем называть начальным типом подстановки P .

Если подстановка $P \in A_{km}$, $k \geq 4$, $m \geq 1$, обладает представлением $P = A \cdot B$, в котором каждая из подстановок A и B в разложении на независимые циклы состоит из m циклов длины k , то будем говорить, что подстановка P является k -представимой.

Доказательство будем вести индукцией по m . Случай $m = 1$, т.е. основание индукции, как уже отмечалось во введении, установлен Бертрамом [5]. В § 2 воспроизводится его конструкция и отмечаются некоторые ее свойства. В § 3 вводится некоторая операция на k -представлениях, позволяющая по k -представлениям двух подстановок из A_{km_1} и A_{km_2} соответственно строить k -представления некоторых подстановок из $A_{k(m_1+m_2)}$. Для обоснования индукционного перехода по произвольной подстановке $P \in A_{km}$, $m > 1$, построим k -представления подстановок $Q \in A_k$ и $R \in A_{k(m-1)}$, из которых при помощи введенной операции построим k -представление подстановки P .

Кроме того, заметим, что для доказательства k -представимости подстановки $P \in A_{km}$ достаточно доказать k -представимость любой подстановки, лежащей в том же классе сопряженных (в S_{km}) элементов, что и P .

§ 2. Случай $m = 1$

Напомним конструкцию Бертрама [5]. Пусть подстановка $P \in A_k$ разложена на независимые циклы

$$P = X_1 \dots X_c Y_1 Z_1 \dots Y_d Z_d,$$

где

$$X_i = (x_{i,1} x_{i,2} \dots x_{i,\lambda(i)} \dots x_{i,l(i)}),$$

— цикл нечетной длины,

$$Y_j = (y_{j,1} y_{j,2} \dots y_{j,\mu(j)} \dots y_{j,m(j)}),$$

$$Z_j = (z_{j,1} z_{j,2} \dots z_{j,\nu(j)} \dots z_{j,n(j)}),$$

— циклы четной длины, где $l(i) = 2\lambda(i) - 1 \geq 3$, $m(j) = 2(\mu(j) - 1)$, $n(j) = 2(\nu(j) - 1)$, $i = 1, \dots, c$, $j = 1, \dots, d$.

Определим подстановки $A, B \in S_k$ с условием $P = A \cdot B$. А именно, для каждого неединичного цикла $X = (x_1 \dots x_\lambda \dots x_l)$ нечетной длины l из списка X_1, \dots, X_l определим действие подстановок A и B на всех символах, входящих в X , за исключением действия A на x_λ и действия B на x_1 :

$$A = (x_1 x_{2\lambda-1} x_2 x_{2\lambda-2} \dots x_{\lambda-1} x_{\lambda+1} x_\lambda \dots),$$

$$B = (x_{\lambda+1} x_\lambda x_{\lambda+2} x_{\lambda-1} \dots x_{2\lambda-1} x_2 x_1 \dots).$$

Для большей наглядности действие подстановок A и B на символах из X можно представить в виде графов, вершинами которых являются символы из X , а направленные ребра показывают, как действуют подстановки A и B (см. рис. 1).

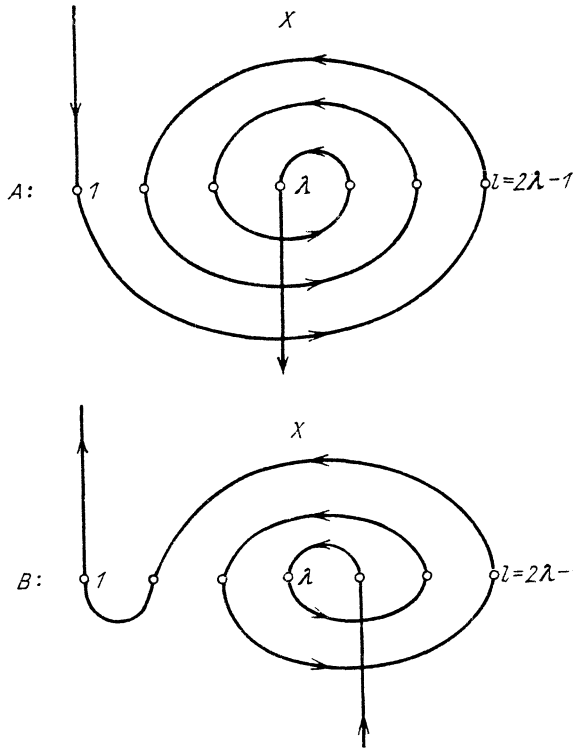


Рис. 1.

Далее, для каждой пары циклов четной длины $Y = (y_1 \dots y_\mu \dots y_m)$, $Z = (z_1 \dots z_\nu \dots z_n)$, у которых $m > 2$, $n > 2$, из списка (Y_i, Z_i) , $i = 1, \dots, d$ определим действие подстановок A и B на всех символах, входящих в Y и Z , за исключением действия A на символе $z_{\nu-1}$ и действия B на символе y_μ , следующим образом:

$$A = (y_\mu z_\nu y_1 y_m y_2 y_{m-1} \dots y_{\mu+1} y_{\mu-1} z_1 z_n z_2 z_{n-1} \dots z_{\nu+1} z_{\nu-1} \dots),$$

$$B = (z_\nu y_{\mu+1} y_{\mu-1} y_{\mu+2} y_{\mu-2} \dots y_m y_2 y_1 z_{\nu+1} z_{\nu-1} z_{\nu+2} z_{\nu-2} \dots z_n z_2 z_1 y_\mu \dots)$$

(см. рис. 2).

Если же $Y = (y_1 y_2)$ и $Z = (z_1 z_2)$ — транспозиции, то для них $m = \mu = 2$ и $n = \nu = 2$. Положим в этом случае

$$A = (y_2 z_2 y_1 z_1 \dots), \quad B = (z_2 y_1 z_1 y_2 \dots)$$

(см. рис. 3).

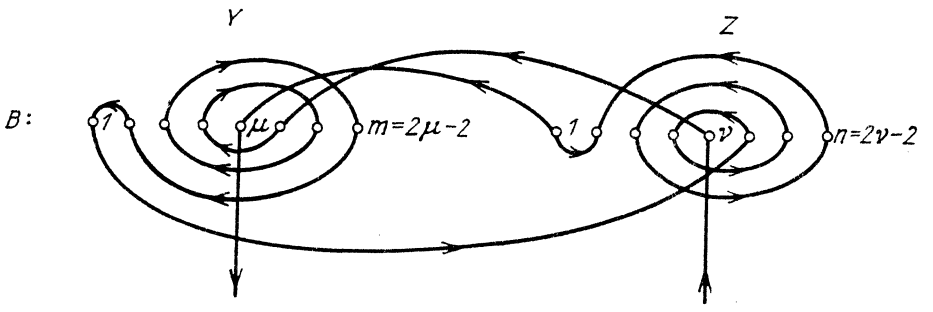
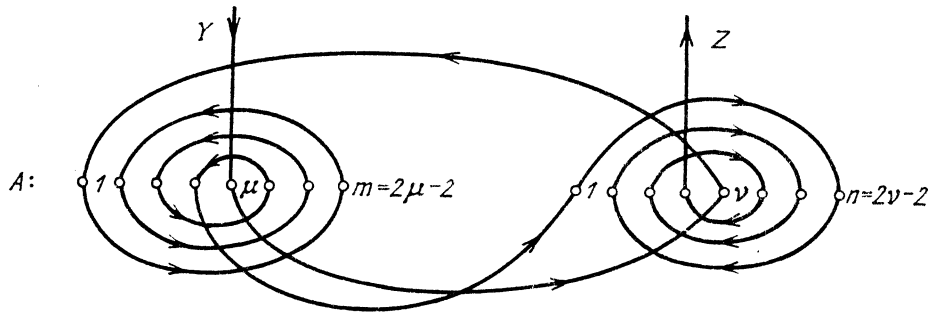


Рис. 2

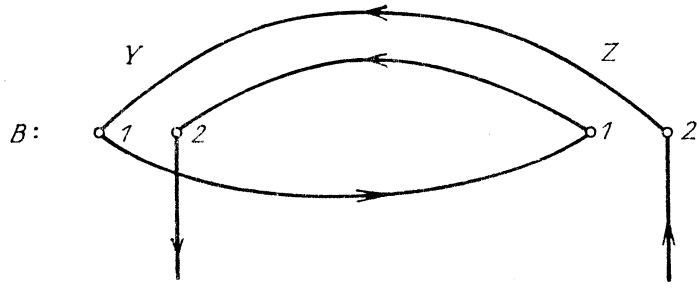
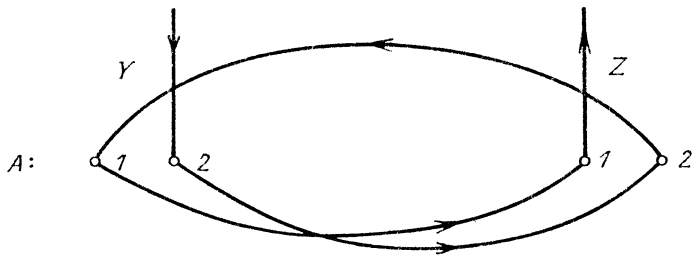


Рис. 3

Теперь уже понятно, как действуют подстановки A и B на элементах пары (Y, Z) , если один из циклов является транспозицией, а другой – нет.

Осталось определить действия A и B на остальных символах. Как это сделать, графически совершенно ясно: каждое ребро, выходящее из цикла X_i или из пары $Y_j Z_j$, мы должны соединить с ребром, входящим в следующий цикл, а ребро, выходящее из последнего цикла, соединить с ребром, входящим в первый цикл; тем самым мы получим подстановку A , которая, как легко заметить, является циклом длины k . Аналогично для B , но там каждое выходящее ребро мы должны соединить с ребром, входящим в предыдущий цикл. Более формально:

$$\begin{aligned}
 x_{i, \lambda(i)} &\xrightarrow{A} x_{i+1, 1} \xrightarrow{B} x_{i, \lambda(i)+1} \quad \text{при } i = 1, \dots, c-1, \\
 x_{c, \lambda(c)} &\xrightarrow{A} \begin{cases} y_{1, \mu(1)} \xrightarrow{B} x_{c, \lambda(c)+1} & \text{при } d > 0, \\ x_{i, 1} \xrightarrow{B} x_{c, \lambda(c)+1} & \text{при } d = 0, \end{cases} \\
 z_{i, \nu(i)-1} &\xrightarrow{A} y_{i+1, \mu(i+1)} \xrightarrow{B} z_{i, \nu(i)}, \\
 z_{d, \nu(d)} &\xrightarrow{A} \begin{cases} x_{1, 1} \xrightarrow{B} z_{d, \nu(d)} & \text{при } d \geq 1, \\ y_{1, \mu(1)} \xrightarrow{B} z_{d, \nu(d)} & \text{при } d = 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Таким образом, если P не содержит циклов единичной длины, то мы построим иско-
мое k -представление $P = A \cdot B$.

Для описания свойств представления Бертрама введем следующие обозначения. Пусть $X, Y \in S_n$. Обозначим

$$\text{supp}(X, Y) = \text{supp}(X) \cap \text{supp}(Y).$$

Тогда построенное представление $X_1 \dots X_c Y_1 Z_1 \dots Y_d Z_d = A \cdot B$ обладает следующими свойствами:

1) если цикл P_i из разложения подстановки $P = X_1 \dots X_c Y_1 Z_1 \dots Y_d Z_d$ имеет длину не меньше 3, то множество $\text{supp}(P_i^A, P_i)$ не пусто;

2) для любой пары соседних циклов P_i и P_{i+1} из разложения P в произведение независимых циклов, а также для пары $(Z_d X_1)$ множество $\text{supp}(P_i^A, P_{i+1})$ не пусто.

Эти свойства k -представления Бертрама потребуются нам в дальнейшем.

Пусть теперь подстановка P содержит цикл (y) длины 1, т.е. $P = Q(y)$, где $Q \in A_{k-1}$. Если $Q = Q_1 \dots Q_s$ – разложение Q в произведение независимых циклов и $Q = A_1 \cdot B_1$ – такое $(k-1)$ -представление подстановки Q , что некоторый символ r лежит в множестве $\text{supp}(Q_i^A, Q_j)$, $i = 1, \dots, s$, $j = 1, \dots, s$, т.е. $Q_i = (x_1 x_2 \dots)$, $Q_j = (r \dots)$, $A_1 = (x_1 r \dots)$, $B_1 = (r x_2 \dots)$, то положим: $A = (x_1 y r \dots)$, $B = (r y x_2 \dots)$ – циклы длины k . Легко проверить, что $P = A \cdot B$ – k -представление подстановки $P = Q(y)$, причем $y \in \text{supp}(Q_i^A, (y))$ и $r \in \text{supp}((y)^A, Q_j)$.

§ 3. Λ -композиция k -представлений

Пусть $Q = A_1 \cdot B_1$ и $R = A_2 \cdot B_2$ – k -представления подстановок $Q \in A_{km_1}$ и $R \in A_{km_2}$, определенных на непересекающихся множествах символов M_1 и M_2 . Кроме того, пусть Λ – произведение независимых транспозиций, каждая из которых переводит символ из M_1 в некоторый символ из M_2 . Тогда Λ -композицией представлений $Q = A_1 \cdot B_1$ и $R = A_2 \cdot B_2$ назовем представление $P = A_1 A_2 \cdot (B_1 B_2)^\Lambda$, которое, как легко заметить, является k -представлением подстановки P в группе $S_{k(m_1 + m_2)}$.

Если Λ – тождественная подстановка, то Λ – композицией k -представлений $Q = A_1 \cdot B_1$ и $R = A_2 \cdot B_2$ является k -представление $P = A_1 A_2 \cdot B_1 B_2$ подстановки $P = QR$.

Л е м м а 1. Пусть для подстановки $P \in A_{km}$, $k \geq 4$, $m \geq 1$, задано разложение на независимые циклы $P = P_1 \dots P_l$ и k -представление $P = A \cdot B$. Если $l \geq 4$ и $s \in \text{supp}(P_1^A, P_2)$, $r \in \text{supp}(P_3^A, P_4)$, то $A \cdot B^{(sr)}$ – k -представление подстановки $Z_1 Z_2 P_5 \dots P_l$, где Z_j – цикл, состоящий из символов, входящих в P_j и P_{j+2} , где $j = 1, 2$. Если же $l \geq 3$ и $s \in \text{supp}(P_1^A, P_1)$, $r \in \text{supp}(P_2^A, P_3)$, то $A \cdot B^{(sr)}$ – k -представление подстановки $Z P_4 \dots P_l$, где цикл Z состоит из символов, входящих в циклы P_1, P_2 и P_3 .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем первое утверждение леммы (второе утверждение доказывается аналогично). По условию $P_1 = (s_1 s_2 S)$, где S – некоторое, возможно, пустое множество символов, причем если P_1 является единственным циклом, то s_2 и S отсутствуют; $P_2 = (psS_1)$, где S_1 – множество символов (возможно, пустое), и если P_2 – единственный цикл, то p и S отсутствуют. Аналогично определяются $P_3 = (r_1 r_2 T)$ и $P_4 = (qrT_1)$. Так как $s \in \text{supp}(P_1^A, P_2)$, а $r \in \text{supp}(P_3^A, P_4)$, то A переводит s_1 в s , а r_1 переводит в r . Тогда под действием B символ s переходит в s_2 , а r переходит в r_2 . Предположим также, что под действием A символ p переходит в некоторый символ p_1 , а q переходит в некоторый символ q_1 . Тогда

$$B = \begin{pmatrix} \dots p_1 s \dots q_1 r \dots \\ \dots s s_2 \dots r r_2 \dots \end{pmatrix}.$$

Теперь легко проверить, что

$$A \cdot B^{(sr)} = (s_1 r_2 T r_1 s_2 S)(p r T_1 q s S_1) P_5 \dots P_l.$$

Лемма доказана.

Пусть $Q = Q_1 \dots Q_c$, $R = R_1 \dots R_d$ – разложения на независимые циклы подстановок, введенных в начале § 3. Предположим, что в k -представлении $Q = A_1 \cdot B_1$ некоторый символ s лежит в $\text{supp}(Q_1^{A_1}, Q_2)$, а в k -представлении $R = A_2 \cdot B_2$ некоторый символ $r \in \text{supp}(R_1^{A_2}, R_2)$. Тогда по лемме 1 (sr) -композиция этих представлений дает k -представление подстановки $P = Z_1 Z_2 Q_3 \dots Q_c R_3 \dots R_d$, где все выписанные циклы независимы и длина цикла Z_j равна сумме длин циклов Q_j и R_j , $j = 1, 2$, т.е. при такой композиции происходит как бы склеивание цикла R_j с циклом Q_j .

Предположим, что в k -представлении $Q = A_1 \cdot B_1$ символ $s \in \text{supp}(Q_1^{A_1}, Q_1)$, а в k -представлении $R = A_2 \cdot B_2$ символ $r \in \text{supp}(R_1^{A_2}, R_2)$. Тогда по лемме 1 (sr) -композицией этих представлений является k -представление подстановки $Z Q_2 \dots \dots Q_c R_3 \dots R_d$, где длина цикла Z равна сумме длин циклов Q_1 , R_1 и R_2 , т.е. в этом случае происходит как бы склеивание цикла Q_1 с циклами R_1 и R_2 .

В рассмотренных частных случаях Λ -композиции, как легко заметить, вполне следующее свойство: если в k -представлении $Q_1 \dots Q_c = A_1 \cdot B_1$ для некоторых циклов Q_i и Q_j , $1 \leq i, j \leq n$, найдется символ q лежащий в $\text{supp}(Q_i^{A_1}, Q_j)$, то и в полученном k -представлении $P_1 \dots P_l = A_1 A_2 \cdot (B_1 B_2)^{(sr)}$ символ $q \in \text{supp}(P_i^{A_1}, P_j)$, где $1 \leq i', j' \leq l$, и цикл $P_{i'}$ содержит символы цикла Q_i , а цикл $P_{j'}$ содержит символы цикла Q_j . Для второго k -представления $R_1 \dots R_d = A_2 \cdot B_2$.

Аналогично, если в k -представлении $P = A \cdot B$ некоторый символ q лежит в $\text{supp}(P_i^A, P_j)$, $1 \leq i, j \leq l$, то для k -представления $P = B \cdot A^B$, наоборот, найдется символ q' , лежащий в $\text{supp}(P_j^B, P_i)$.

Так как в разобранных примерах Λ -композиции складываются длины соответствующих циклов, то в некотором смысле мы можем работать не с самими подстановками, а с их циклическими типами. Тогда Λ -композиция представлений равносильна некоторой операции сложения типов. В следующем параграфе мы формализуем это наблюдение.

§ 4. Разложение типов

Пусть $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_l)$ — некоторый циклический тип. Подтипом типа τ назовем всякую последовательность $\tau^0 = (\tau_1^0, \dots, \tau_l^0)$ той же длины, у которой $0 \leq \tau_i^0 \leq \tau_i$, $i = 1, \dots, l$. Ясно, что, удалив нулевые компоненты подтипа τ^0 , получим циклический тип некоторой подстановки из S_{n^0} , где $n^0 = \sum_{i=1}^l \tau_i^0$. Будем называть тип четным, если он является типом четной подстановки. Подтип будем называть четным, если, удалив из него нулевые компоненты, получим четный тип.

На подтипах одинаковой длины можно ввести операцию сложения. Если $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_l)$ — подтип некоторой подстановки из S_n , а $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_l)$ — подтип подстановки из S_{n_1} , то их суммой назовем последовательность $\rho + \sigma = (\rho_1 + \sigma_1, \dots, \rho_l + \sigma_l)$, являющуюся, как легко заметить, подтипом некоторой подстановки из S_{n+n_1} .

На подтипах одинаковой длины можно ввести операцию сложения. Если $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_l)$ — подтип некоторой подстановки из S_n , а $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_l)$ — подтип подстановки из S_{n_1} , то их суммой назовем последовательность $\rho + \sigma = (\rho_1 + \sigma_1, \dots, \rho_l + \sigma_l)$, являющуюся, как легко заметить, подтипом некоторой подстановки из S_{n+n_1} .

В дальнейшем будем говорить: "тип (подтип) из S_n ", подразумевая, что данный тип (подтип) является циклическим типом (соответственно подтипом) некоторой подстановки из S_n .

В типе $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_l)$ из A_{km} выделим некоторую последовательность компонент: $(\tau_{i_1}, \dots, \tau_{i_n})$, $1 \leq n \leq l$. Будем говорить, что типу τ соответствует k -представление $P_\tau = A \cdot B$, если в разложении на независимые циклы $P_\tau = P_1 \dots P_l$ цикл P_i имеет длину τ_i при всех $i = 1, \dots, l$ и, кроме того, выполнено следующее условие: при $n = 1$ множество $\text{supp}(P_{i_n}^A, P_{i_n}^B)$ не пусто, а при $n > 1$ для всякого j , $j = 1, \dots, n-1$ множество $\text{supp}(P_{i_j}^A, P_{i_{j+1}}^B) \neq \emptyset$. Аналогично определяется k -представление, соответствующее типу τ , если в τ выделена не одна, а несколько последовательностей компонент.

Пусть $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_l)$ — тип из A_n при $n > k$, представленный в виде суммы подтипов $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_l)$ и $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_l)$ из S_k и S_{n-k} соответственно. Число компонент ρ_i , для которых справедливы неравенства $0 < \rho_i < \tau_i$, назовем *степенью разложения* τ относительно ρ и σ , а сами компоненты ρ_i и σ_i , для которых справедливы неравенства $0 < \rho_i < \tau_i$ и $0 < \sigma_i < \tau_i$, назовем *склеиваемыми компонентами*. Тип τ будем называть *k-разложимым* относительно ρ и σ , если для них выполнено хотя бы одно из следующих условий:

- 1) оба подтипа ρ и σ четны и степень разложения равна 0;
- 2) оба подтипа ρ и σ четны; степень разложения равна 2, либо k нечетно и степень разложения равна 4;
- 3) ρ — четный, а σ — нечетный подтипы, степень разложения равна 1, и если ρ_i и σ_i — склеиваемые компоненты подтипов ρ и σ соответственно, то $\rho_i \geq 3$, $\sigma_i \geq 2$; либо, наоборот, ρ — нечетный, а σ — четный подтипы, степень разложения равна 1, и склеиваемые компоненты удовлетворяют неравенствам: $\rho_i \geq 2$, $\sigma_i \geq 3$.

В оставшихся пунктах предполагаются выполненными дополнительные условия: k нечетно и тип τ имеет четную длину.

- 4) оба подтипа ρ и σ нечетны, степень разложения равна 2 и, если σ_i и ρ_j — склеиваемые компоненты, то σ_i и $\rho_j \geq 2$;
- 5) ρ — четный, а σ — нечетный подтипы, степень разложения равна 1, и если ρ_i — склеиваемая компонента, то τ_i четна, $\tau_i \geq 6$, $\tau_{i+1} = 2$, а $\rho_i = \tau_i - 1$, $\rho_{i+1} = 0$;
- 6) ρ — четный, а σ — нечетный подтипы, степень разложения равна 1, и если ρ_i — склеиваемая компонента, то $\rho_i = 3$, $\tau_i = 4$ и, кроме того, подтип σ содержит не менее двух компонент, равных 2.

Очевидно, что если некоторый тип подстановки $P \in A_n$ является k -разложимым, то и любой другой ее тип также является k -разложимым.

Теперь мы можем перейти непосредственно к доказательству теоремы.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть P — некоторая подстановка из A_{km} . Если $m = 1$, то из работы Берграма [5] (см. § 2) следует, что P является k -представимой. Поэто-

му мы можем считать, что $m > 1$. Предположим, что некоторый тип $\tau = \tau(P) = (\tau_1, \dots, \tau_l)$ подстановки P является k -разложимым. Покажем, что тогда, при некоторых дополнительных предположениях, подстановка P является k -представимой. Так как τ по предположению удовлетворяет одному из пунктов 1)–6) определения k -разложимого типа, то разберем по порядку все эти случаи.

Пусть ρ и σ удовлетворяют условию 1), т.е. для некоторого номера i (возможно, после перестановки компонент) имеем $\rho = (\tau_1, \dots, \tau_i, \underbrace{0, \dots, 0}_{l-i}, \tau_{i+1}, \dots, \tau_l)$, $\sigma = (\underbrace{0, \dots, 0}_i, \tau_{i+1}, \dots, \tau_l)$. Удаляя нулевые компоненты, получим типы $\rho' = (\tau_1, \dots, \tau_i)$ и $\sigma' = (\tau_{i+1}, \dots, \tau_l)$. Им соответствуют подстановки $P_{\rho'}$ и $P_{\sigma'}$ из A_k и $A_{k(m-1)}$. По индуктивному предположению эти подстановки k -представимы, и мы будем считать, что они определены на непересекающихся множествах символов (в дальнейшем, говоря о k -представлениях подстановок $P_{\rho'}$ и $P_{\sigma'}$, будем иметь в виду именно такие представления). Из свойств Λ -композиции следует, что e -композиция k -представлений подстановок $P_{\rho'}$ и $P_{\sigma'}$ дает k -представление некоторой подстановки $P_\tau \in A_{km}$, у которой циклический тип тот же, что и у P . Следовательно, P – k -представима.

Предположим, что выполнено условие 2) из определения k -разложимого типа, т.е.

$$\rho = (\tau_1, \dots, \tau_{i-1}, \rho_i, \rho_{i+1}, \underbrace{0, \dots, 0}_{l-i-1}),$$

$$\sigma = (\underbrace{0, \dots, 0}_{i-1}, \sigma_i, \sigma_{i+1}, \tau_{i+2}, \dots, \tau_l),$$

где $\rho_j + \sigma_j = \tau_j$, $\rho_j \neq 0$, $\sigma_j \neq 0$, $j = i, i+1$. Обозначим

$$\rho' = (\tau_1, \dots, \tau_{i-1}, \rho_i, \rho_{i+1}), \quad \sigma' = (\sigma_i, \sigma_{i+1}, \tau_{i+2}, \dots, \tau_l)$$

четные типы из A_k и $A_{k(m-1)}$ соответственно. Выделим в первом из них пару (ρ_i, ρ_{i+1}) , а во втором – пару (σ_i, σ_{i+1}) . По предположению индукции, существуют k -представления $P_{\rho'} = A_1 \cdot B_1$ и $P_{\sigma'} = A_2 \cdot B_2$ подстановок $P_{\rho'}$ и $P_{\sigma'}$, циклические типы которых равны ρ' и σ' соответственно. Более того, ввиду свойства 2) конструкции Бертрама, можно считать, что k -представление $P_{\rho'} = A_1 \cdot B_1$ соответствует типу ρ' , т.е. некоторый символ $s \in \text{supp}(X_i^{A_1}, X_{i+1})$, где X_j – цикл длины ρ_j , $j = i, i+1$. Предположим, что и представление $P_{\sigma'} = A_2 \cdot B_2$ соответствует типу σ' , т.е. некоторый символ r лежит в $\text{supp}(Y_i^{A_2}, Y_{i+1})$, где цикл Y_j имеет длину σ_j , $j = i, i+1$. В результате (sr) -композиции этих k -представлений произойдет склеивание цикла X_j с циклом Y_j при $j = i, i+1$, и мы получим k -представление некоторой подстановки P_τ , имеющей циклический тип τ . Следовательно, и сама подстановка P также является k -представимой.

Пусть теперь τ – k -разложима степени 4 относительно четных подтипов $\rho = (\tau_1, \dots, \tau_{i-1}, \rho_i, \dots, \rho_{i+3}, \underbrace{0, \dots, 0}_{l-i-3})$ и $\sigma = (\underbrace{0, \dots, 0}_{i-1}, \sigma_i, \dots, \sigma_{i+3}, \tau_{i+4}, \dots, \tau_l)$

из A_k и $A_{k(m-1)}$ соответственно, у которых все компоненты ρ_j и σ_j отличны от нуля и $\rho_j + \sigma_j = \tau_j$ при $j = i, \dots, i+3$. Тогда в типе $\rho' = (\tau_1, \dots, \tau_{i-1}, \rho_i, \dots, \rho_{i+3})$ выделим пары (ρ_i, ρ_{i+1}) , (ρ_{i+2}, ρ_{i+3}) . Опять ввиду свойства 2) конструкции Бертрама, существует соответствующее k -представление подстановки $P_{\rho'}$, т.е. такое k -представление $P_{\rho'} = A_1 \cdot B_1$, в котором $s_1 \in \text{supp}(X_i^{A_1}, X_{i+1})$ и $s_2 \in \text{supp}(X_{i+2}^{A_1}, X_{i+3})$, где X_j – цикл длины ρ_j при $j = i, \dots, i+3$. Аналогично, в типе $\sigma' = (\sigma_i, \dots, \sigma_{i+3}, \tau_{i+4}, \dots, \tau_l)$ выделим пары (σ_i, σ_{i+1}) , $(\sigma_{i+2}, \sigma_{i+3})$ и предположим, что для него существует соответствующее k -представление $P_{\sigma'} = A_2 \cdot B_2$, в котором $r_1 \in \text{supp}(Y_i^{A_2}, Y_{i+1})$, $r_2 \in \text{supp}(Y_{i+2}^{A_2}, Y_{i+3})$, где Y_j – цикл длины σ_j при $j = i, \dots, i+3$. Вычислим $(s_1 r_1)(s_2 r_2)$ -композицию этих представлений. Ввиду леммы 1 полученное k -представление является k -представлением подстановки P_τ .

Предположим, что τ удовлетворяет условию 3), т.е. $\rho = (\tau_1, \dots, \tau_{i-1}, \rho_i, 0, \dots, 0)$ – подтип из A_k , у которого $\rho_i \geq 3$; $\sigma = (\underbrace{0, \dots, 0}_{i-1}, \sigma_i, \tau_{i+1}, \dots, \tau_l)$ – нечет-

ный подтип из $S_{k(m-1)}$, у которого $\sigma_i \geq 2$ и сумма $\rho + \sigma$ равна τ (двойственный случай из п. 3) разбирается аналогично). По этим подтипам построим четные типы $\rho' = (\tau_1, \dots, \tau_{i-1}, \rho_i)$ и $\sigma' = (1, \sigma_i - 1, \tau_{i+1}, \dots, \tau_l)$. В типе ρ' выделим компоненту ρ_i , а в типе σ' – пару $(1, \sigma_i - 1)$. По свойству 1) представления Бертрама существует k -представление $P_{\rho'} = A_1 \cdot B_1$, для которого найдется символ s из $\text{supp}(X_i^{A_1}, X_i)$, где X_i – цикл длины ρ_i . Предположим, что для типа σ' существует соответствующее k -представление, т.е. такое k -представление $P_{\sigma'} = A_2 \cdot B_2$, что некоторый символ r лежит в $\text{supp}(Y_{i-1}^{A_2}, Y_i)$, где Y_{i-1} – цикл длины 1, а Y_i – цикл длины $\sigma_i - 1$. Найдем (sr) -композицию этих k -представлений. В результате склеивания цикла X_i длины ρ_i с циклами Y_{i-1} и Y_i длины 1 и $\sigma_i - 1$ соответственно, получим k -представление подстановки P_τ .

Допустим, что подтипы ρ и σ удовлетворяют условию 4), т.е.

$$\rho = (\tau_1, \dots, \tau_{i-1}, \rho_i, \rho_{i+1}, \underbrace{0, \dots, 0}_{i-i-1}),$$

$$\sigma = (\underbrace{0, \dots, 0}_{i-1}, \sigma_i, \sigma_{i+1}, \tau_{i+2}, \dots, \tau_l)$$

есть нечетные подтипы из S_k и $S_{k(m-1)}$ соответственно, у которых ρ_{i+1} и σ_i не меньше 2, а $\rho_j + \sigma_j = \tau_j$ при $j = i, i + 1$. Построим по ним четные типы $\rho' = (\tau_1, \dots, \tau_{i-1}, \rho_i, \rho_{i+1} - 1, 1)$, $\sigma' = (1, \sigma_i - 1, \sigma_{i+1}, \tau_{i+2}, \dots, \tau_l)$ и выделим в первом тройку компонент $(\rho_i, \rho_{i+1} - 1, 1)$, а во втором – тройку $(1, \sigma_i - 1, \sigma_{i+1})$. Предположим, что для них существуют соответствующие k -представления $P_{\rho'} = A_1 \cdot B_1$ и $P_{\sigma'} = A_2 \cdot B_2$. Иными словами, в первом представлении $s_1 \in \text{supp}(X_i^{A_1}, X_{i+1})$, $s_2 \in \text{supp}(X_{i+1}^{A_1}, X_{i+2})$, где цикл X_i имеет длину ρ_i , цикл X_{i+1} – длину $\rho_{i+1} - 1$, а X_{i+2} – длину 1; во втором представлении $r_1 \in \text{supp}(Y_i^{A_2}, Y_{i+1})$, $r_2 \in \text{supp}(Y_{i+1}^{A_2}, Y_i)$, где Y_{i-1} имеет длину 1, Y_i – длину $\sigma_i - 1$ и Y_{i+1} – длину σ_{i+1} . Покажем, что $(s_1 r_1)(s_2 r_2)$ -композиция этих k -представлений дает k -представление некоторой подстановки P_τ . Действительно, если к указанным представлениям применить $(s_1 r_1)$ -композицию, то по лемме 1

$$A_1 A_2 \cdot (B_1 B_2)^{(s_1, r_1)} = X_1 \dots X_{i-1} X_{i+2} Z_1 Z_2 Y_{i-1} Y_{i+2} \dots Y_l,$$

где цикл с индексом j имеет длину τ_j при $j = 1, \dots, i - 1, i + 2, \dots, l$, X_{i+1} и Y_{i-1} имеют длину 1, а цикл Z_j длину $\rho_j + \sigma_j - 1$ при $j = i, i + 1$. Причем ввиду свойства Λ -композиции, справедливы включения: $s_2 \in \text{supp}(Z_1^{A_1 A_2}, X_{i+2})$, $r_2 \in \text{supp}(Y_{i-1}^{A_1 A_2}, Z_2)$. Далее, опять по лемме 1 в k -представлении $A_1 A_2 \cdot (B_1 B_2)^{(s_1, r_1)(s_2, r_2)}$ произойдет склеивание цикла Z_1 с циклом Y_{i-1} и склеивание цикла X_{i+2} с циклом Z_2 . В результате получим циклы длины $\rho_i + \sigma_i = \tau_i$ и $\rho_{i+1} + \sigma_{i+1} = \tau_{i+1}$ соответственно. Так как остальные циклы не меняются, то полученное представление будет являться k -представлением некоторой подстановки P_τ .

Пусть теперь ρ и σ удовлетворяют условию 5), т.е. $\rho = (\tau_1, \dots, \tau_{i-1}, \tau_i - 1, 0, \dots, 0)$, $\sigma = (\underbrace{0, \dots, 0}_{i-1}, 1, \tau_{i+1}, \tau_{i+2}, \dots, \tau_l)$ – подтипы из A_k и $S_{k(m-1)}$ соответ-

ственно, у которых компонента τ_i четна и не меньше 6, а $\tau_{i+2} = 2$. По ним построим четные типы: $\rho' = (\tau_1, \dots, \tau_{i-1}, \tau_i - 3, 1, 1)$, $\sigma' = (1, 1, 1, \tau_{i+2}, \dots, \tau_l)$. Ввиду конструкции Бертрама для ρ' можно построить такое k -представление $P_{\rho'} = A_1 \cdot B_1$, в котором $r_j \in \text{supp}(X_i^{A_1}, X_{i+j})$ при $j = 1, 2$ и цикл X_i имеет длину $\tau_i - 3$, а цикл X_{i+j} – длину 1, $j = 1, 2$. В типе σ' выделим тройку $(1, 1, 1)$ и предположим, что для него существует соответствующее k -представление $P_{\sigma'} = A_2 \cdot B_2$, в котором $r_1 \in \text{supp}(X_{i-2}^{A_2}, X_i)$, $r_2 \in \text{supp}(X_i^{A_2}, X_{i+1})$, где циклы X_j , $j = i - 1, i, i + 1$ имеют дли-

ну 1. Вычислим $(s_1 r_1)(s_2 r_2)$ -композицию этих представлений. Так же как и в предыдущем случае, нетрудно проверить, что получим k -представление некоторой подстановки P_τ , сопряженной с подстановкой P .

Если $\rho = (\tau_1, \dots, \tau_{i-1}, 3, \underbrace{0, \dots, 0}_{l-i}, 1, 2, 2, \tau_{i+3}, \dots, \tau_l)$ – подти-

пы из A_k и $S_{k(m-1)}$ соответственно, для которых выполнено условие 6) определения k -разложимого типа, то построим четные типы $\rho' = (\tau_1, \dots, \tau_{i-1}, 1, 1, 1)$ и $\sigma' = (1, 1, 1, 2, \tau_{i+3}, \dots, \tau_l)$. В типе ρ' выделим тройку $(1, 1, 1)$. Из конструкции Бертрама для ρ' следует существование соответствующего k -представления $P_{\rho'} = A_1 \cdot B_1$, в котором $s_1 \in \text{supp}(X_i^{A_1}, X_{i+1})$, $s_2 \in \text{supp}(X_{i+1}^{A_1}, X_{i+2})$, где $X_j - (j = i, i+1, i+2)$ циклы длины 1. В типе σ' выделим пары $(1, 1)$, $(2, 1)$ и предположим, что для него существует соответствующее k -представление $P_{\sigma'} = A_2 \cdot B_2$, в котором $r_1 \in \text{supp}(Y_{i-1}^{A_2}, Y_i)$, $r_2 \in \text{supp}(Y_{i+2}^{A_2}, Y_{i+1})$, где $X_j, j = i-1, i, i+1$ цикл длины 1, а Y_{i+2} – цикл длины 2. Вычислив $(s_1 r_1)(s_2 r_2)$ -композицию этих представлений, получим k -представление подстановки P_τ .

Таким образом, для завершения доказательства теоремы осталось доказать, что тип $\tau = \tau(P)$ подстановки $P \in A_{km}$, $m > 1$, является k -разложимым типом относительно некоторых ρ и σ . Кроме того, для построенных типов ρ' и σ' надо доказать существование соответствующих k -представлений $P_{\rho'} = A_1 \cdot B_1$ и $P_{\sigma'} = A_2 \cdot B_2$. Так как ρ' является типом из A_k , то существование соответствующего k -представления следует из § 2, и нам остается доказать существование соответствующего k -представления для типа σ из $A_{k(m-1)}$ при $m-1 > 1$. Доказательству этих двух фактов посвящена остальная часть работы.

§ 5. Доказательство k -разложимости типов и существования соответствующих k -представлений

Рассмотрим тип $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_s)$ из A_{km} , $m > 1$. Пару компонент (ξ_{2j-1}, ξ_{2j}) назовем *граничной парой* типа ξ , если сумма компонент, предшествующих этой паре, не больше k , а сумма $\sum_{i=1}^{2j} \xi_i$ больше k . Обозначим $\Delta_1 = \sum_{i=1}^{2j} \xi_i - k$, $\Delta_2 = k - \sum_{i=1}^{2j-2} \xi_i$. Очевидно, что $\Delta_1 + \Delta_2 = \xi_{2j-1} + \xi_{2j}$. Возможны два случая.

5.1. С л у ч а й ч е т н о г о k . В этом случае очевидно, что ξ имеет четную длину, а так как ξ содержит четное число нечетных компонент, мы можем считать, что каждая пара (ξ_{2i-1}, ξ_{2i}) , $i = 1, \dots, s/2$, состоит из компонент одинаковой четности. Следовательно, оба значения Δ_1 и Δ_2 в этом случае являются четными. Справедливо следующее утверждение

Л е м м а 2. Пусть $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_s)$ – некоторый тип из A_{km} , k четно и не меньше 4, $m > 1$. Тогда ξ k -разложим. Кроме того, если в ξ выделена некоторая нечетная компонента не меньше 3 и при этом ξ содержит единичную компоненту, либо в ξ выделена пара компонент одинаковой четности, то для ξ существует соответствующее k -представление.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Не уменьшая общности, можно считать, что компоненты типа ξ упорядочены следующим образом: если ξ содержит единственную выделенную компоненту, то ей является ξ_1 , а $\xi_2 = 1$; если ξ содержит пару выделенных компонент, то этой парой является (ξ_1, ξ_2) . Остальные компоненты упорядочены так, что последовательность $(\xi_3, \xi_4, \dots, \xi_s)$ является начальным типом.

Пусть (ξ_{2i-1}, ξ_{2i}) – граничная пара типа ξ . Будем считать, что $\xi_{2i-1} \geq \xi_{2i}$. Если для ξ значение $\Delta_2 = 0$, то относительно подтипов $\mu = (\xi_1, \dots, \xi_{2i-2}, \underbrace{0, \dots, 0}_{s-2i+2})$ и $\nu = (\underbrace{0, \dots, 0}_{2i-2}, \xi_{2i-1}, \xi_{2i}, \dots, \xi_s)$ тип ξ является k -разложимым степе-

ни 0. Чтобы построить k -представление, соответствующее типу ξ , выделим в

μ те же компоненты, что были выделены в ξ . По индуктивному предположению для типов $\mu' = (\xi_1, \dots, \xi_{2i-2})$, $\nu' = (\xi_{2i-1}, \dots, \xi_s)$ существуют соответствующие k -представления. Используя для них e -композицию (см. доказательство теоремы), получим k -представление, соответствующее типу ξ . Если же $\Delta_2 \geq 2$ и при этом обе компоненты граничной пары больше 1, то пару (ξ_{2i-1}, ξ_{2i}) представим в виде суммы $(\xi_{2i-1}, \xi_{2i}) = (\mu_{2i-1}, \mu_{2i}) + (\nu_{2i-1}, \nu_{2i})$, где

$$\mu_{2i-1} = \begin{cases} \xi_{2i-1} - \frac{\Delta_1}{2} & \text{при } \xi_{2i-1} - \xi_{2i} < \Delta_2, \\ \Delta_2 - 1 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$\mu_{2i} = \begin{cases} \xi_{2i} - \frac{\Delta_1}{2} & \text{при } \xi_{2i-1} - \xi_{2i} < \Delta_2, \\ 1 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$\nu_j = \xi_j - \mu_j$, $j = 2i - 1, 2i$. Очевидно, что все построенные компоненты μ_j и ν_j , $j = 2i - 1, 2i$ положительны и каждая пара (μ_{2i-1}, μ_{2i}) и (ν_{2i-1}, ν_{2i}) состоит из компонент одинаковой четности, причем, $\mu_{2i-1} + \mu_{2i} = \Delta_2$, $\nu_{2i-1} + \nu_{2i} = \Delta_1$. Следовательно, относительно подтипов $\mu = (\xi_1, \dots, \xi_{2i-2}, \mu_{2i-1}, \mu_{2i}, \underbrace{0, \dots, 0}_{s-2i})$ и $\nu = (\underbrace{0, \dots, 0}_{2i-2}, \nu_{2i-1}, \nu_{2i}, \xi_{2i+1}, \dots, \xi_s)$ тип ξ является k -разложимым степени 2 (вы-

полнено условие 2) из определения k -разложимого типа). Чтобы построить k -представление, соответствующее типу ξ , выделим в $\mu' = (\xi_1, \dots, \xi_{2i-2}, \mu_{2i-1}, \mu_{2i})$ пару (μ_{2i-1}, μ_{2i}) и компоненты, выделенные в ξ , а в типе $\nu' = (\nu_{2i-1}, \nu_{2i}, \xi_{2i+1}, \dots, \xi_s)$ — пару (ν_{2i-1}, ν_{2i}) . Используя конструкцию Бертрама (см. § 2), построим k -представление соответствующее типу μ' . Для ν' соответствующее k -представление существует по предположению индукции. Применяя подходящую Λ -композицию к этим представлениям (см. доказательство теоремы), найдем k -представление, соответствующее типу ξ .

Допустим, что компонента ξ_{2i} равна 1. Если при этом $\Delta_2 \geq 4$, то ξ k -разложим степени 1 относительно подтипов $\mu = (\xi_1, \dots, \xi_{2i-2}, \Delta_2 - 1, \xi_{2i}, \underbrace{0, \dots, 0}_{s-2i})$ и $\nu = (\underbrace{0, \dots, 0}_{2i-2}, \xi_{2i-1} - \Delta_2 + 1, 0, \xi_{2i+1}, \dots, \xi_s)$. Так как $\Delta_2 - 1 \geq 3$ и $\xi_{2i-1} + \xi_{2i} -$

$-\Delta_2 = \Delta_1 \geq 2$, то μ и ν удовлетворяют условию 3) из определения k -разложимого типа. В типе $\mu' = (\xi_1, \dots, \xi_{2i-2}, \Delta_2 - 1, \xi_{2i})$ выделим те же компоненты, что были выделены в ξ , и, кроме того, компоненту $\Delta_2 - 1 \geq 3$. Используя конструкцию Бертрама, построим k -представление, соответствующее типу μ' . В типе $\nu' = (\Delta_1 - 1, 1, \xi_{2i+1}, \dots, \xi_s)$ выделим пару $(\Delta_1 - 1, 1)$. Так как $\Delta_1 - 1$ нечетно, то по предположению индукции для ν' существует соответствующее k -представление. Используя подходящую Λ -композицию, нетрудно построить k -представление, соответствующее типу ξ . Если же $\Delta_2 = 2$, но при этом разность $\xi_{2i-1} - \Delta_2 \geq 3$, то для подтипов $\mu = (\xi_1, \dots, \xi_{2i-2}, \Delta_2, \underbrace{0, \dots, 0}_{s-2i+1})$ и $\nu = (\underbrace{0, \dots, 0}_{2i-2}, \xi_{2i-1} - \Delta_2, \xi_{2i}, \dots, \xi_s)$

также выполнено условие 3) (учесть, что $\xi_{2i} = 1$). В типе $\mu' = (\xi_1, \dots, \xi_{2i-2}, \Delta_2 - 1, 1)$ выделим компоненты, выделенные в ξ , и пару $(\Delta_2 - 1, 1)$, а в типе $\nu' = (\xi_{2i-1} - \Delta_2, \xi_{2i}, \xi_{2i+1}, \dots, \xi_s)$ выделим компоненту $\xi_{2i-1} - \Delta_2$. Так как в типе μ' пара $(\Delta_2 - 1, 1)$ не может быть первой, то ввиду результатов § 2 для него существует соответствующее k -представление. Для типа ν' соответствующее k -представление существует по предположению индукции (учесть, что $\xi_{2i-1} - \Delta_2$ нечетно и не меньше 3, а $\xi_{2i} = 1$). Так же как и выше, по этим представлениям легко построить k -представление, соответствующее типу ξ .

Пусть, наконец, $\xi_{2i-1} - \Delta_2 = 1$ и $\Delta_2 = 2$, т.е. граничная пара $(\xi_{2i-1}, \xi_{2i}) = (3, 1)$. Легко показать, что граничная пара не может быть первой парой типа ξ . Предположим, что среди компонент, стоящих правее граничной пары, либо найдется пара неединичных компонент одинаковой четности, либо найдутся две нечетные компоненты, одна из которых не меньше 5, а другая равна 1. Поменяв местами эти компоненты с компонентами граничной пары, получим некоторый тип ξ той же подстановки, что и ξ , но для которого справедливость леммы уже установлена. Следовательно, для типа ξ лемма также справедлива. Если же такой пары не существует, то пара (ξ_{2i+1}, ξ_{2i+2}) , следующая за граничной парой, либо равна (3.1), либо (1.1). Тогда тип ξ является k -разложимым степени 0 относительно подтипов $\mu = (\xi_1, \dots, \xi_{2i-2}, 0, \xi_{2i}, 0, \xi_{2i+2}, \underbrace{0, \dots, 0}_{s-2i-2})$ и $\nu = (\underbrace{0, \dots, 0}_{2i-2}, \xi_{2i-1}, 0, \xi_{2i+1}, 0, \xi_{2i+3}, \xi_{2i+4}, \dots, \xi_s)$. По ним, так же как и выше, легко построить k -представление, соответствующее типу ξ . Лемма доказана.

5.2. С л у ч а й нечетного k . Можем считать, что $k \geq 5$. Циклический подтип будем называть *инволютивным подтипом*, если все его компоненты не превосходят 2. Очевидно, что инволютивному подтипу из S_n соответствует инволюция из S_n . Для инволюций из A_{km} справедлива

Л е м м а 3. *Всякая инволюция Q из A_{km} , $m > 1$ является k -представимой. Более того, если в инволютивном типе $\tau(Q)$ выделена пара (1,1) или (1,2) или же обе эти пары вместе, то для него существует соответствующее k -представление.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим вначале, что $Q \in A_{4k}$ и не содержит циклов длины 1. Тогда циклический тип $\xi = (\underbrace{2, 2, \dots, 2}_{2k})$ подстановки Q можно представить в виде суммы подтипов $\chi = (\underbrace{2, \dots, 2}_{k-1}, 1, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{k-1})$ и $\lambda = (\underbrace{0, \dots, 0}_{k-1}, 1, 1, \underbrace{2, \dots, 2}_{k-1})$ из A_{2k} . Удалив из них нулевые компоненты, получим инволютив-

ные типы χ' и λ' . Выделим в λ' пару единичных компонент и покажем, что для него существует соответствующее k -представление. Для этого найдем граничную пару типа λ' . Так как $k \geq 5$, то граничной будет пара (2,2). Вычислим Δ_2 . Очевидно, что $\Delta_2 = 1$ или $\Delta_2 = 3$, причем если $\Delta_2 = 1$, то граничной паре предшествует пара (2,2); если же $\Delta_2 = 3$, то за граничной парой следует пара (2,2).

Пусть вначале $\Delta_2 = 3$ (это равносильно тому, что $k \equiv 1 \pmod{4}$). Тогда λ' представим в виде суммы двух инволютивных подтипов $\mu = (1, 1, \underbrace{2, \dots, 2}_{(k-5)/2}, 2, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{(k-1)/2})$ и $\nu = (\underbrace{0, \dots, 0}_{(k+1)/2}, 1, \underbrace{2, \dots, 2}_{(k-1)/2})$ из S_k , причем μ — нечетный, а ν — четный подтип. По ним построим четные типы: $\mu' = (1, 1, \underbrace{2, \dots, 2}_{(k-5)/2}, 1, 1, 1)$ и $\nu' = (1, 1, 3, \underbrace{2, \dots, 2}_{(k-5)/2})$. Выделим в μ' пару (1,1) и тройку (1,1,1). Ввиду результатов § 2 для

μ' существует соответствующее k -представление $P_{\mu'} = C_1 \cdot D_1$, где $P_{\mu'} = (i_1)(i_2) \times \times (i_3)Q_1(i_4)(i_5)$, $C_1 = (i_1 i_2 i_3 i_0 \dots i_4 i_5 i_6)$, $D_1 = (i_0 i_3 i_2 i_1 \dots i_6 i_5 i_4)$ при $k \geq 7$ и $C_1 = (i_1 i_2 i_3 i_4 i_5)$, $D_1 = (i_3 i_2 i_1 i_5 i_4)$ при $k = 5$, Q_1 — произведение $(k-5)/2$ циклов длины 2. Для типа ν' можно построить k -представление $P_{\nu'} = C_2 \cdot D_2$, для которого $P_{\nu'} = (j_1)(j_3 j_5 j_6)(j_2)Q_2$, $C_2 = (j_1 j_2 j_3 j_4 \dots j_6 j_5)$, $D_2 = (j_4 j_5 j_3 j_2 j_1 j_6 \dots)$, Q_2 — произведение $(k-5)/2$ циклов длины 2, причем если $k = 5$, то $j_6 = j_4$. Найдем $(i_3 j_1)(i_2 j_3)$ -композицию этих представлений. Легко проверить, что полученное k -представление является k -представлением, соответствующим типу λ' .

Пусть теперь $\Delta_2 = 1$ (это равносильно тому, что $k \equiv 3 \pmod{4}$). Учитывая, что в типе λ' перед компонентами граничной пары находится по крайней мере одна

пара (2, 2), представим λ' в виде суммы подтипов $\mu = (1, 1, \underbrace{2, \dots, 2}_{(k-3)/2}, \underbrace{1, 0, \dots, 0}_{(k-1)/2})$ и $\nu = (\underbrace{0, \dots, 0}_{(k+1)/2}, \underbrace{1, 2, \dots, 2}_{(k-1)/2})$. По ним построим четные типы $\mu' = (1, 1, \underbrace{2, \dots, 2}_{(k-7)/2}, 3, 1, 1)$, $\nu' = (1, 1, 1, \underbrace{2, \dots, 2}_{(k-3)/2})$ и выделим в первом пару (1, 1) и тройку (1, 3, 1), а во втором – тройку (1, 1, 1). Так как μ' и ν' – типы некоторых подстановок из A_k , то для них существуют соответствующие k -представления. По этим представлениям, так же как и выше, строится k -представление $P_{\lambda'} = A_2 \cdot B_2$, соответствующее типу λ' .

Аналогично, выделим в типе χ' пару (1,1) и построим k -представление $P_{\chi'} = A_1 \cdot B_1$, соответствующее типу χ' , т.е. такое k -представление, в котором $s \in \text{supp}(X_k^{A_1}, X_{k+1})$, где циклы X_j , $j = k, k+1$ имеют длину 1. Если в построенном выше k -представлении $P_{\lambda'} = A_2 \cdot B_2$ символ $r \in \text{supp}(Y_k^{A_2}, Y_{k+1})$, где Y_j , $j = k, k+1$ – циклы длины 1, то рассмотрим (sr) -композицию этих представлений (считаем, что они определены на непересекающихся множествах символов). Легко проверить, что в результате получится k -представление $P_{\xi} = A \cdot B$, из которого уже нетрудно найти k -представление исходной подстановки Q .

Перейдем теперь к общему случаю. Пусть Q – инволюция из A_{km} , $m > 1$. Учитывая уже разобранный случай, можем считать что Q содержит не более $2k - 1$ циклов длины 2. Кроме того, если Q содержит не менее k циклов длины 1, то ξ k -разложим степени 0 и построение соответствующего k -представления тривиально. В оставшихся случаях m может принимать лишь значения из множества $\{2, 3, 4\}$. Обозначим через n_1 число циклов длины 1, а через n_2 – число циклов длины 2, входящих в разложение Q в произведение независимых циклов.

Пусть вначале $m = 2$. Если $n_1 = 2$, а $n_2 = k - 1$, то, как было замечено выше, Q является k -представимой. Поэтому мы можем считать, что $n_1 > 2$. Определим натуральные числа l_i, m_i , $i = 1, 2$, следующим образом:

$$l_1 = \begin{cases} 3 & \text{при } k \equiv 3 \pmod{4}, \\ 1 & \text{при } k \equiv 1 \pmod{4}, \end{cases} \quad l_2 = \begin{cases} \frac{k-3}{2} & \text{при } k \equiv 3 \pmod{4}, \\ \frac{k-1}{2} & \text{при } k \equiv 1 \pmod{4}, \end{cases}$$

$m_i = n_i - l_i$, $i = 1, 2$, и рассмотрим инволюции Q_1 и Q_2 из A_k , определенные на непересекающихся множествах символов и такие, что Q_1 содержит l_1 циклов длины 1 и l_2 циклов длины 2, а Q_2 содержит m_1 циклов длины 1 и m_2 циклов длины 2. Для подстановок Q_1 и Q_2 утверждение леммы справедливо, т.е. для них существуют соответствующие k -представления. Вычислив их e -композицию, получим требуемое k -представление подстановки Q .

Пусть теперь $m = 3$ или $m = 4$. Тогда $n_2 \geq k + 1$. Действительно, если $n_2 < k$, то Q лежит в группе A_n , где $n = n_1 + 2n_2 < n_1 + 2k$, откуда $n_1 > n - 2k \geq k$, а по предположению число циклов длины 1, входящих в разложение Q , меньше k . Также n_2 не может быть равно k , так как Q – четная подстановка. Следовательно, циклический тип $\xi = (\underbrace{1, \dots, 1}_{n_1}, \underbrace{2, \dots, 2}_{n_2})$ подстановки Q можно представить

в виде суммы подтипов $\chi = (\underbrace{1, \dots, 1}_{n_1}, \underbrace{2, \dots, 2}_{n_2}, 1, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{k-1})$ и $\lambda = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n_1+n_2-(k+1)}, 1, 1, \underbrace{2, \dots, 2}_{k-1})$, где χ – подтип из A_{2k} , а λ – подтип из A_k или из A_{2k} . В обоих

случаях χ и λ удовлетворяют условию 2) определения k -разложимого типа. Применяя подходящую Λ -композицию к k -представлениям, соответствующим этим подтипам, получим требуемое представление. Лемма доказана.

Лемма 4. Пусть k нечетно, $k \geq 5$ и $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_s)$ — неинволютивный тип из $A_{k,t}$, $t > 1$. Тогда ξ является k -разложимым типом.

Более того, если ξ имеет нечетную длину и либо

- а) содержит выделенную нечетную компоненту $\xi_i \geq 3$; либо
- б) содержит выделенную пару (ξ_i, ξ_j) , в которой ξ_i нечетно, а $\xi_j = 2$ или $\xi_j = 3$, а ξ_j произвольно; либо
- в) содержит выделенную тройку компонент, из которых первая равна 1, а две другие — одинаковой четности.

Или же ξ имеет четную длину, и при этом либо

- г) выделена пара компонент одинаковой четности; либо
- д) выделена нечетная компонента $\xi_i \geq 3$ и ξ содержит единичные компоненты. Тогда для ξ существует соответствующее k -представление.

Доказательство. Пусть вначале ξ имеет нечетную длину. Не уменьшая общности, можно считать, что компоненты ξ упорядочены следующим образом: вначале идут выделенные компоненты, причем если в ξ выделена пара компонент, то $(\xi_i, \xi_j) = (\xi_1, \xi_2)$, а ξ_3 является компонентой той же четности, что и ξ_2 ; если в ξ выделена тройка компонент, то $\xi_1 = 1$, $\xi_2 \geq \xi_3$; остальные компоненты упорядочены так, что являются начальным типом некоторой подстановки. Очевидно, что при таком упорядочении каждая пара (ξ_{2i}, ξ_{2i+1}) , $i = 1, 2, \dots, (s-1)/2$, состоит из компонент одинаковой четности.

Пусть вначале $\xi_1 \geq k + 2$.

Если при этом ξ удовлетворяет условию а) леммы 4, то ξ k -разложим относительно подтипов $\mu = (k, \underbrace{0, \dots, 0}_{s-1})$ и $\nu = (\xi_1 - k, \xi_2, \dots, \xi_s)$, так как для них

выполнено условие 3) определения k -разложимого типа. Чтобы построить k -представление, соответствующее ξ , рассмотрим типы $\mu' = (k)$ и $\nu' = (\xi_1 - k - 1, 1, \xi_2, \dots, \xi_s)$. Для μ' существует k -представление $P_{\mu'} = A_1 \cdot B_1$, в котором $s \in \text{supp}(X_1^{A_1}, X_1)$, где X_1 — цикл длины k . В типе ν' выделим пару $(\xi_1 - k - 1, 1)$. Тогда по предположению индукции для ν' существует соответствующее k -представление $P_{\nu'} = A_2 \cdot B_2$, в котором $r \in \text{supp}(Y_0^{A_2}, Y_1)$, где Y_0 — цикл длины $\xi_1 - k - 1$, а Y_1 — цикл длины 1. Вычислив (\mathcal{S}) -композицию этих представлений, получим k -представление $P_\xi = A \cdot B$ некоторой подстановки $P_\xi = Z_1 \dots Z_s$, в котором $s \in \text{supp}(Z_1^A, Z_1)$, где Z_1 — цикл длины ξ_1 . Следовательно, построенное k -представление соответствует типу ξ .

Если ξ удовлетворяет условию б), т.е. в ξ выделена пара (ξ_1, ξ_2) , то ξ_1 нечетно, а $\xi_2 = 2$ (учесть, что по предположению $\xi_1 \geq k + 2$). Так как ξ_3 четно, то ξ можно представить в виде суммы подтипов $\mu = (k - 3, 2, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{s-3})$ и $\nu =$

$(\xi_1 - k + 3, 0, \xi_3 - 1, \xi_4, \dots, \xi_s)$. Для μ и ν выполнено условие 2) определения k -разложимого типа. Следовательно, ξ k -разложим степени 2. Выделим в $\mu' = (k - 3, 2, 1)$ тройку $(1, k - 3, 2)$, а в $\nu' = (\xi_1 - k + 3, \xi_3 - 1, \xi_4, \dots, \xi_s)$ пару $(\xi_3 - 1, \xi_1 - k + 3)$. Из результатов § 2 вытекает существование k -представления, соответствующего типу μ' , а из предположения индукции следует существование k -представления, соответствующего типу ν' . По этим представлениям при помощи подходящей Λ -композиции найдем k -представление, соответствующее типу ξ .

Пусть теперь $\xi_1 = k$. Если в ξ выделена только компонента ξ_1 , то ξ k -разложим степени 0 относительно подтипов $\mu = (k, \underbrace{0, \dots, 0}_{s-1})$ и $\nu = (0, \xi_2, \dots, \xi_s)$, и по-

строение требуемого k -представления тривиально. Если в ξ выделена пара $(\xi_1, \xi_2) = (k, 2)$, то ξ k -разложим степени 2 относительно подтипов $\mu = (k - 3, 2, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{s-3})$

и $\nu = (3, 0, \xi_3 - 1, \xi_4, \dots, \xi_s)$, так как для них выполнено условие 2) определения

k -разложимого типа. Построим по ним типы $\mu' = (k - 3, 2, 1)$ и $\nu' = (3, \xi_3 - 1, \xi_4, \dots, \xi_s)$ и выделим тройку $(1, k - 3, 2)$ и пару $(\xi_3 - 1, 3)$ соответственно. Ввиду результатов § 2 и индуктивного предположения, для подстановок $P_{\mu'} = X_1 X_2 X_3$, где цикл X_1 имеет длину $k - 3$, цикл X_2 — длину 2, цикл X_3 — длину 1; $P_{\nu'} = Y_2 Y_3 Y_4 \dots Y_s$, где цикл Y_2 имеет длину 3, цикл Y_3 — длину $\xi_3 - 1$, цикл Y_j — длину ξ_j при $j = 4, \dots, s$, существуют соответствующие k -представления $P_{\mu'} = A_1 \cdot B_1$, $P_{\nu'} = A_2 \cdot B_2$, для которых справедливы включения $s_1 \in \text{supp}(X_3^{A_1}, X_1)$, $s_2 \in \text{supp}(X_1^{A_1}, X_2)$, $r_1 \in \text{supp}(Y_3^{A_2}, Y_2)$. В результате $(s_1 r_1)$ -композиции этих представлений произойдет склеивание цикла X_3 с циклом Y_3 и склеивание X_1 с циклом Y_2 . В результате получим k -представление подстановки $Z_1 X_2 Z_2 Y_4 \dots Y_s = A \cdot B$, где Z_1 имеет длину k , а Z_2 — длину ξ_3 . Так как в этом представлении $s_2 \in \text{supp}(Z_1, X_2)$, то это представление соответствует типу ξ с выделенной парой $(k, 2)$. Если же в ξ была выделена пара $(2, k)$, то соответствующим k -представлением будет $P_{\xi} = B \cdot A^B$.

Допустим, что $\xi_1 \leq k - 2$. Положим $k_1 = k - \xi_1$. Ясно, что k_1 чётно и отлично от нуля. Рассмотрим тип $\tilde{\xi} = (\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_s)$, полученный из ξ удалением первой компоненты. Тогда $\tilde{\xi}$ имеет чётную длину и является типом из A_n , где $n = km - \xi_1 > 2k_1$. Если $k_1 \geq 4$, то по лемме 2 тип $\tilde{\xi}$ k_1 -разложим относительно некоторых подтипов $\tilde{\mu}$ и $\tilde{\nu}$. Следовательно, тип ξ k -разложим относительно подтипов $\mu = (\xi_1, \tilde{\mu})$ и $\nu = (0, \tilde{\nu})$, причём μ и ν удовлетворяют тому же условию из определения k -разложимого типа, что $\tilde{\mu}$ и $\tilde{\nu}$. Если ξ k -разложим степени 0 относительно μ и ν , то построение k -представления, соответствующего ξ очевидно. Предположим поэтому, что степень разложения не меньше 1. Так же как в доказательстве леммы 2, по подтипам μ и ν построим типы μ' и ν' . Тогда имеет место один из следующих трех случаев:

1) $\mu' = (\xi_1, \dots, \xi_{2i-1}, \mu_{2i}, \mu_{2i+1})$, $\nu' = (\nu_{2i}, \nu_{2i+1}, \xi_{2i+2}, \dots, \xi_s)$, $\mu_j + \nu_j = \xi_j$, $j = 2i, 2i+1$;

2) $\mu' = (\xi_1, \dots, \xi_{2i-1}, \Delta_2 - 1, 1)$, $\nu' = (\Delta_1 - 1, 1, \xi_{2i+2}, \dots, \xi_s)$, где Δ_1 и Δ_2 чётны, $\Delta_2 \geq 4$, $\Delta_1 = \xi_{2i} + 1 - \Delta_2 \geq 2$;

3) $\mu' = (\xi_1, \dots, \xi_{2i-1}, \Delta_2 - 1, 1)$, $\nu' = (\xi_{2i} - \Delta_2, 1, \xi_{2i+2}, \dots, \xi_s)$, где $\Delta_2 = 2$, $\xi_{2i} - \Delta_2 \geq 3$.

Предположим, что реализуется случай 1), и выделим в типе μ' пару (μ_{2i}, μ_{2i+1}) , состоящую из компонент одинаковой чётности, а также компоненты, выделенные в ξ , если $i > 1$. Если же $i = 1$, то в μ' выделим тройку $(\xi_1, \mu_{2i}, \mu_{2i+1})$. В обоих случаях ввиду результатов § 2 для μ' существует соответствующее k -представление $P_{\mu'} = A_1 \cdot B_1$. В ν' выделим пару (ν_{2i}, ν_{2i+1}) . Учитывая, что ν' имеет чётную длину и компоненты выделенной пары одинаковой чётности, по предположению индукции заключаем, что для ν' существует соответствующее k -представление $P_{\nu'} = A_2 \cdot B_2$. При помощи подходящей Λ -композиции, склеивая циклы длины μ_j с циклами длины ν_j , получим k -представление, соответствующее типу ξ .

Аналогично, для случая 2) выделим в μ' компоненты, выделенные в ξ , если $i > 1$, и выделим тройку $(\xi_1, \Delta_2 - 1, 1)$ в противном случае. В ν' выделим пару $(\Delta_1 - 1, 1)$. Из тех же соображений, что и в случае 1), заключаем, что для μ' и ν' существуют соответствующие k -представления. Вычислим такую их Λ -композицию, при которой происходит склеивание цикла длины $\Delta_2 - 1$ из первого представления с циклами длин $\Delta_1 - 1$ и 1 из второго представления. Получим искомого k -представление, соответствующее типу ξ .

В случае 3) при $i > 1$ выделим в μ' компоненты, выделенные в ξ , и пару компонент $(\Delta_2 - 1, 1)$, а при $i = 1$ заметим, что ξ содержит либо единственную выделенную компоненту, либо выделенную пару (ξ_1, ξ_2) . Действительно, если бы ξ содержала выделенную тройку, то $\xi_1 = 1$, и так как $i = 1$, то для типа ξ гранич-

ной является первая пара и тогда $\Delta_2 = k - 1 \geq 4$, а в случае 3) $\Delta_2 = 1$. Поэтому при $i = 1$ выделим в μ' тройку $(\xi_1, \Delta_2 - 1, 1)$, а в типе ν' -компоненту $\xi_{2i} - \Delta_2$. Так же как и выше, существование соответствующего k -представления для μ' следует из результатов § 2, а для ν' — из индуктивного предположения (учесть, что ν' имеет четную длину, содержит единичную компоненту, а выделенная компонента нечетна и не меньше 3). Вычислив такую Λ -композицию этих представлений, при которой происходит склеивание цикла длины $\xi_{2i} - \Delta_2$ из второго представления с циклами длины $\Delta_2 - 1$ и 1 из первого представления, получим k -представление, соответствующее типу ξ .

До сих пор мы считали, что $k_1 = k - \xi_1 \geq 4$. Пусть теперь $k_1 = 2$. Тогда $\xi_1 = k - 2 \geq 3$, и, следовательно, тип ξ содержит не более двух выделенных компонент. Предположим, что ξ_2 и $\xi_3 \geq 2$. Тогда тип ξ k -разложим относительно подтипов $\mu = (\xi_1, 1, 1, 0, \dots, 0)$ и $\nu = (0, \xi_2 - 1, \xi_3 - 1, \xi_4, \dots, \xi_s)$, так как для них

выполнено условие 2) определения k -разложимого типа. В $\mu' = (\xi_1, 1, 1)$ выделим тройку $(\xi_1, 1, 1)$, а в $\nu' = (\xi_2 - 1, \xi_3 - 1, \xi_4, \dots, \xi_s)$ — пару $(\xi_2 - 1, \xi_3 - 1)$ и найдем соответствующие k -представления, по которым, при помощи подходящей Λ -композиции, строится k -представление, соответствующее типу ξ . Если же $\xi_2 = 1$, то рассмотрим тип $\xi = (\xi_2, \xi_1, \xi_3, \dots, \xi_s)$, полученный из ξ перестановкой первых двух компонент. Выделим в ξ тройку (ξ_2, ξ_1, ξ_3) . Как было показано выше, тип ξ k -разложим и для него существует соответствующее k -представление $P_\xi = A \cdot B$. Следовательно, тип ξ также k -разложим, и либо представление $A \cdot B$, либо представление $B \cdot (B^{-1}AB)$ является k -представлением, соответствующим типу ξ . Если же $\xi_2 \neq 1$, но $\xi_3 = 1$, то, переставив компоненты ξ_1 и ξ_3 , получим тип $(\xi_3, \xi_2, \xi_1, \xi_4, \xi_5, \dots, \xi_s)$, по которому требуемое k -представление строится так же, как и в предыдущем случае.

Таким образом, мы полностью разобрали случай, когда ξ имеет нечетную длину.

Предположим теперь, что ξ имеет четную длину. Не уменьшая общности, можно считать, что выделенные компоненты (если они существуют) являются первыми компонентами типа ξ , т.е. если в ξ выделена единственная нечетная компонента, то ей является ξ_1 , а $\xi_2 = 1$; если в ξ выделена пара компонент, то ей является пара (ξ_1, ξ_2) . Остальные компоненты упорядочены так, что образуют начальный тип некоторой подстановки. Очевидно, что при таком упорядочении каждая пара (ξ_{2j-1}, ξ_{2j}) , $j = 1, 2, \dots, s/2$, состоит из компонент одинаковой четности. Для ξ найдем граничную пару (ξ_{2i-1}, ξ_{2i}) и вычислим для нее Δ_1 и Δ_2 .

Число $\Delta_2 = k - \sum_{j=i}^{2i-2} \xi_j$ нечетно, а так как $\Delta_1 + \Delta_2 = \xi_{2i-1} + \xi_{2i}$ четно, то и Δ_1 нечетно. В зависимости от значений Δ_1 и Δ_2 рассмотрим несколько случаев.

С л у ч а й 1. Оба значения Δ_1 и Δ_2 больше 1. Тогда их сумма $\Delta_1 + \Delta_2 = \xi_{2i-1} + \xi_{2i} \geq 6$. Мы можем считать, что $\xi_{2i-1} \geq \xi_{2i}$. Предположим, что граничная пара $(\xi_{2i-1}, \xi_{2i}) \neq (4, 2)$, и представим граничную пару в виде суммы $(\xi_{2i-1}, \xi_{2i}) = (\mu_{2i-1}, \mu_{2i}) + (\nu_{2i-1}, \nu_{2i})$, где

$$\nu_{2i-1} = \begin{cases} \frac{\Delta_1 + x}{2} & \text{при } \xi_{2i} \geq 3, \\ \Delta_1 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$\nu_{2i} = \begin{cases} \frac{\Delta_1 - x}{2} & \text{при } \xi_{2i} \geq 3, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$\mu_j = \xi_j - \nu_j$, $j = 2i - 1, 2i$, а x — минимальное нечетное число не меньше 1, для которого справедливы неравенства $\mu_{2i} \geq 2$, $\nu_{2i} \geq 1$. Положим $\mu = (\xi_1, \dots, \xi_{2i-2}, \mu_{2i-1}, \mu_{2i}, \underbrace{0, \dots, 0}_{s-2i})$ и $\nu = (\underbrace{0, \dots, 0}_{2i-2}, \nu_{2i-1}, \nu_{2i}, \xi_{2i+1}, \dots, \xi_s)$. Заметим, что при $\xi_{2i} \geq 3$

все компоненты μ_j и ν_j отличны от нуля и подтипы μ и ν удовлетворяют условию 4) определения k -разложимого типа. Следовательно, тип ξ является k -разложимым. Чтобы построить k -представление, соответствующее типу ξ , выделим в типе $\mu' = (\xi_1, \dots, \xi_{2i-2}, \mu_{2i-1}, \mu_{2i} - 1, 1)$ тройку компонент $(\mu_{2i-1}, \mu_{2i} - 1, 1)$, а при $i > 1$ выделим компоненты, выделенные в ξ . Для μ' существует соответствующее k -представление $P_{\mu'} = A_1 \cdot B_1$. В типе $\nu' = (1, \nu_{2i-1} - 1, \nu_{2i}, \xi_{2i+1}, \dots, \xi_s)$ выделим тройку $(1, \nu_{2i-1} - 1, \nu_{2i})$. Так как ν' имеет нечетную длину и компоненты $\nu_{2i-1} - 1, \nu_{2i}$ одинаковой четности, то по предположению индукции для него существует соответствующее k -представление $P_{\nu'} = A_2 \cdot B_2$. При помощи Λ -композиции, построенной при доказательстве теоремы, легко построить k -представление, соответствующее типу ξ .

Пусть теперь $\xi_{2i} \leq 2$, т.е. $(\nu_{2i-1}, \nu_{2i}) = (\Delta_1, 0)$. Если при этом $\mu_{2i-1} \geq 2$, то подтипы μ и ν удовлетворяют условию 3) определения k -разложимого типа. Следовательно, тип ξ k -разложим. В типе $\mu' = (\xi_1, \dots, \xi_{2i-2}, 1, \xi_{2i-1} - \Delta_1 - 1, \xi_{2i})$ при $i > 1$ выделим компоненты, выделенные в ξ , и, кроме того, пару $(1, \xi_{2i-1} - \Delta_1 - 1)$, а при $i = 1$ выделим тройку $(1, \xi_{2i-1} - \Delta_1 - 1, \xi_{2i})$. Так как μ' является типом из A_k , то в обоих случаях для него существует соответствующее k -представление. В типе $\nu' = (\Delta_1, \xi_{2i+1}, \dots, \xi_s)$ выделим компоненту Δ_1 , которая нечетна и не меньше 3. Так как длина ν' нечетна, то по индуктивному предположению для ν' существует соответствующее k -представление. Вычислим такую Λ -композицию этих представлений, чтобы цикл длины Δ_1 из второго представления склеивался с циклами длины $\xi_{2i-1} - \Delta_1 - 1$ и 1 из первого представления. В результате получится k -представление, соответствующее типу ξ . Если же $\mu_{2i-1} = 1$, то компонента $\xi_{2i-1} = \mu_{2i-1} + \nu_{2i-1} = \Delta_1 + 1$ четна и, следовательно, ξ_{2i} также четна и, как легко заметить, равна 2. Ясно, что в этом случае подтипы μ и ν удовлетворяют условию 5) (по предположению $(\xi_{2i-1}, \xi_{2i}) \neq (4, 2)$). В типах $\mu' = (\xi_1, \dots, \xi_{2i-2}, \xi_{2i-1} - 3, 1, 1)$ и $\nu' = (1, 1, 1, \xi_{2i+1}, \dots, \xi_s)$ выделим соответственно тройку $(1, \xi_{2i-1} - 3, 1)$ и тройку $(1, 1, 1)$. Если же $i > 1$, то в μ' выделим еще и компоненты, выделенные в ξ . Ясно, что для μ' и ν' существуют соответствующие k -представления, а значит, соответствующее k -представление существует и для ξ .

Разберем теперь случай, когда граничная пара равна $(4, 2)$. Так как мы считаем, что $\Delta_1 \geq 3$ и $\Delta_2 \geq 3$, то в этом случае $\Delta_1 = \Delta_2 = 3$. Следовательно, граничная пара не является ни первой, ни последней парой типа ξ , и поэтому ни одна из ее компонент не может быть выделенной в ξ . Рассмотрим компоненты, следующие за граничной парой. Допустим, что среди них найдется пара компонент одинаковой четности, отличная от пары $(4, 2)$ и сумма компонент которой не меньше 6. Поменяв местами эту пару с граничной парой, получим уже разобранный случай. Если же среди компонент, следующих за граничной парой, таких не существует, но существует компонента $\xi_j = 4$, то, поменяв ее с компонентой $\xi_{2i} = 2$ граничной пары, опять получим разобранный случай. Таким образом, мы можем считать, что если среди компонент типа ξ , следующих за граничной парой, имеются нечетные, то только одна из них отлична от 1. Следовательно, некоторая ξ_j при $j > 2i$ равна 1 (учесть, что нечетных компонент, следующих за граничной парой, четное число). Поместим ξ_j перед компонентами граничной пары. Полученный тип k -разложим степени 2 относительно подтипов $(\xi_1, \dots, \xi_{2i-2}, \xi_j, 1, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{s-(2i-1)})$ и $(\underbrace{0, \dots, 0}_{2i-1}, \xi_{2i-1} - 1, \xi_{2i} - 1, \xi_{2i+1}, \dots, \xi_s)$, которые, как легко заметить, удовлетворяют условию 2) определения k -разложимого типа. По этим

подтипам построим типы $\mu' = (\xi_1, \dots, \xi_{2i-2}, \xi_j, 1, 1)$ и $\nu' = (\xi_{2i-1} - 1, \xi_{2i} - 1, \xi_{2i+1}, \dots, \xi_s)$ и выделим в μ' компоненты, выделенные в ξ , и, кроме того, пару $(1, 1)$, а в ν' – пару $(\xi_{2i-1} - 1, \xi_{2i} - 1)$. Очевидно, что для этих типов существуют соответствующие k -представления. Следовательно, соответствующее k -представление существует и для ξ . Пусть, наконец, все компоненты, следующие за граничной парой, равны 2. Тогда для подтипов $\mu = (\xi_1, \dots, \xi_{2i-2}, 3, \underbrace{0, \dots, 0}_{s-2i+1})$ и $\nu = \underbrace{(0, \dots, 0)}_{2i-2}, \underbrace{1, 2, 2, \dots, 2}_{s-2i+1}$ выполнено условие 6). Следовательно, относительно

этих подтипов ξ k -разложим. Построим по ним типы $\mu' = (\xi_1, \dots, \xi_{2i-2}, 1, 1, 1)$ и $\nu' = (1, 1, 1, \underbrace{2, 2, \dots, 2}_{s-2i})$ и выделим в μ' пару (ξ_1, ξ_2) или компоненту ξ_1 (в за-

висимости от того, какие компоненты были выделены в ξ) и, кроме того, тройку $(1, 1, 1)$, а во втором типе – пары $(1, 1)$ и $(2, 1)$. Тогда для μ' существование соответствующего k -представления следует из § 2, а для ν' – из леммы 3. Найдем Λ -композицию этих представлений, построенную в доказательстве теоремы, – получим k -представление, соответствующее типу ξ . Таким образом, случай 1 полностью разобран.

С л у ч а й 2. Значение Δ_2 равно 1. Ясно, что в этом случае граничная пара (ξ_{2i-1}, ξ_{2i}) не может быть первой парой типа ξ . Если среди компонент $\xi_{2i-1}, \xi_{2i}, \dots, \xi_s$ найдется единичная, то, переставив ее с компонентой ξ_{2i-1} , получим тип, являющийся k -разложимым степени 0. Следовательно, тип ξ также k -разложим и построение k -представления соответствующего типу ξ , очевидно. Поэтому, далее мы можем считать, что все компоненты граничной пары и следующие за ней отличны от 1.

Предположим, что среди компонент $\xi_{2i-1}, \xi_{2i}, \dots, \xi_s$ найдется компонента не меньше 3. Переставив ее с ξ_{2i-1} , будем считать, что $\xi_{2i-1} \geq 3$. Кроме того, предположим, что среди компонент предшествующих граничной паре, найдется пара (ξ_{2j-1}, ξ_{2j}) , ближайшая к граничной паре и такая, что либо обе ее компоненты выделены, либо обе не выделены и одна из компонент не меньше 2 (используя, если надо, перестановку компонент, будем считать, что $\xi_{2j} \geq 2$); либо в этой паре одна из компонент выделена и не меньше 4, а вторая равна 1 (будем считать, что $\xi_{2j-1} = 1, \xi_{2j} \geq 4$). Используя, если надо, перестановку пар в типе ξ , будем считать, что $(\xi_{2j-1}, \xi_{2j}) = (\xi_{2i-3}, \xi_{2i-2})$, т.е. является парой, предшествующей граничной. Тогда тип ξ k -разложим степени 2 относительно подтипов $\mu = (\xi_1, \dots, \xi_{2i-3}, \xi_{2i-2} - 1, 2, \underbrace{0, \dots, 0}_{s-2i+1})$ и $\nu = \underbrace{(0, \dots, 0)}_{2i-3}, 1, \xi_{2i-1} - 2, \xi_{2i}, \dots, \xi_s$, для

которых выполнено условие 2) определения k -разложимого типа. В типах $\mu' = (\xi_1, \dots, \xi_{2i-3}, \xi_{2i-2} - 1, 2)$, $\nu' = (1, \xi_{2i-1} - 2, \xi_{2i}, \dots, \xi_s)$ выделим соответственно пары компонент $(\xi_{2i-2} - 1, 2)$ и $(1, \xi_{2i-1} - 2)$, а в μ' еще и компоненты, выделенные в ξ , если пара (ξ_{2j-1}, ξ_{2j}) не была выделенной. Если же пара (ξ_{2j-1}, ξ_{2j}) была выделена в ξ , то в μ' выделим тройку $(\xi_{2i-3}, \xi_{2i-2} - 1, 2)$. Для типа μ' существование соответствующего k -представления следует из § 2. Для типа ν' из индуктивного предположения следует существование соответствующего k -представления даже в том случае, если в ν' выделена тройка $(1, \xi_{2i-1} - 2, \xi_{2i})$, тем более соответствующее k -представление существует в нашем случае. По построенным k -представлениям для μ' и ν' уже легко построить k -представление, соответствующее типу ξ .

Допустим теперь, что среди компонент, предшествующих граничной паре, лишь пара $(\xi_1, \xi_2) = (3, 1)$ содержит неединичную компоненту и при этом ξ_1 – единственная выделенная компонента типа ξ . Поместим компоненту $\xi_2 = 1$ на последнее место в ξ , получим тип $\widehat{\xi} = (3, \xi_3, \dots, \xi_s, \xi_2)$, который k -разложим степени

2 относительно подтипов $(3, \xi_3, \xi_4, \dots, \xi_{2i-2}, 1, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{s-2i+1})$ и $(\underbrace{0, \dots, 0}_{2i-3}, \xi_{2i-1}-1, \xi_{2i-1}, \xi_{2i+1}, \dots, \xi_s, \xi_2)$, для которых выполнено условие 2) определения k -разложимого типа. Следовательно, тип ξ также k -разложим. В типах $\mu' = (3, \xi_3, \xi_4, \dots, \xi_{2i-2}, 1, 1)$, $\nu' = (\xi_{2i-1}-1, \xi_{2i-1}, \xi_{2i+1}, \dots, \xi_s, \xi_2)$ выделим соответственно пару $(1, 1)$ и тройку $(\xi_2, \xi_{2i-1}-1, \xi_{2i-1})$. Так как для них существуют соответствующие k -представления, то соответствующее k -представление существует и для ξ .

Пусть теперь все компоненты $\xi_{2i-1}, \xi_{2i}, \dots, \xi_s$ равны 2. Очевидно, что тогда за граничной парой следует пара $(2, 2)$. Учитывая, что ξ — неинволютивный тип, найдем пару (ξ_{2j-1}, ξ_{2j}) , предшествующую граничной, у которой хотя бы одна из компонент не меньше 3. Не уменьшая общности, будем считать, что этой парой является (ξ_{2i-3}, ξ_{2i-2}) , т.е. пара, предшествующая граничной, и у нее $\xi_{2i-2} \geq 3$. Если компонента ξ_{2i-2} не является единственной выделенной компонентой типа ξ или же $\xi_{2i-2} \geq 5$, то ξ k -разложим степени 4 относительно подтипов $\mu = (\xi_1, \dots, \xi_{2i-3}, \xi_{2i-2}-2, 1, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{s-2i-1})$ и $\nu = (\underbrace{0, \dots, 0}_{2i-3}, 2, 1, 1, 1, \underbrace{2, 2, \dots, 2}_{s-2i-1})$. Если в ξ пара (ξ_{2i-3}, ξ_{2i-2}) не была выделенной, то в μ' выделим

те же компоненты, что были выделены в ξ , и, кроме того, выделим пары $(\xi_{2i-2}-2, 1)$ и $(1, 1)$. Если же в ξ пара (ξ_{2i-3}, ξ_{2i-2}) была выделена, то в μ' выделим тройку $(\xi_{2i-3}, \xi_{2i-2}-2, 1)$ и пару $(1, 1)$. Из результатов § 2 следует существование k -представления соответствующего типу μ' . В типе $\nu' = (2, 1, 1, 1, 2, \dots, 2)$ выделим пары $(2, 1)$, $(1, 1)$. Ввиду леммы 3 для него существует со-

ответствующее k -представление. Используя подходящую Λ -композицию, по этим представлениям построим k -представление, соответствующее типу ξ . Если же в паре (ξ_{2i-3}, ξ_{2i-2}) компонента ξ_{2i-2} равна 3 и является единственной выделенной компонентой типа ξ , то $\xi_{2i-3} = 1$ и, перенося ξ_{2i-3} на последнее место в типе ξ , получим уже разобранный случай.

Случай 3. Значение $\Delta_1 = 1$. Если при этом и $\Delta_2 = 1$, то обе компоненты граничной пары равны 1 и, следовательно, ξ k -разложим степени 0 относительно подтипов $\mu = (\xi_1, \dots, \xi_{2i-2}, \xi_{2i-1}, \underbrace{0, \dots, 0}_{s-2i+1})$ и $\nu = (\underbrace{0, \dots, 0}_{2i-1}, \xi_{2i}, \xi_{2i+1}, \dots, \xi_s)$. Учитывая, что граничная пара, в нашем случае, не может быть первой парой типа ξ и поэтому не содержит выделенных компонент, легко построить k -представление, соответствующее типу ξ . Поэтому ввиду того, что Δ_2 нечетно, мы можем считать, что $\Delta_2 \geq 3$ и сумма компонент граничной пары не меньше 4.

Допустим, что компонента $\xi_{2i} = 1$ и при этом граничная пара не является выделенной парой типа ξ . Тогда, как и в предыдущем случае, ξ k -разложим степени 0 относительно $\mu = (\xi_1, \dots, \xi_{2i-1}, \underbrace{0, \dots, 0}_{s-2i+1})$ и $\nu = (\underbrace{0, \dots, 0}_{2i-1}, \xi_{2i}, \xi_{2i+1}, \dots, \xi_s)$

и построение k -представления, соответствующего типу ξ , очевидно. Если же граничная пара типа ξ выделена, то она является первой парой и равна $(k, 1)$. Предположим, что ξ_3 четно. Тогда для подтипов $\mu = (k-2, 1, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{s-3})$ и $\nu = (2, 0,$

$\xi_3-1, \xi_4, \dots, \xi_s)$ выполнено условие 2) определения k -разложимого типа. Следовательно, ξ k -разложим. Выделим в типе $\mu' = (k-2, 1, 1)$ тройку $(1, k-2, 1)$, а в типе $\nu' = (\xi_3-1, 2, \xi_4, \dots, \xi_s)$ — пару $(\xi_3-1, 2)$. Для μ' существование соответствующего k -представления следует из § 2, а для ν' — из предположения индукции (учесть, что ν' имеет нечетную длину и ξ_3-1 нечетно). Подходящая Λ -композиция дает требуемое k -представление. Предположим теперь, что ξ_3 нечетно и не меньше 3. Тогда тип ξ k -разложим степени 2 относительно $\mu = (k-3, 1, 2,$

$0, \dots, 0$) и $\nu = (3, 0, \xi_3 - 2, \xi_4, \dots, \xi_s)$, так как для них опять выполнено усло-

вие 2). В типе $\mu' = (k - 3, 1, 2)$ выделим тройку $(2, k - 3, 1)$ и найдем соответствующее k -представление. В типе $\nu' = (3, \xi_3 - 2, \xi_4, \dots, \xi_s)$ выделим пару $(3, \xi_3 - 2)$. Из тех же соображений, что и выше, заключаем, что для ν' существует соответствующее k -представление $P_{\nu'} = A_2 \cdot B_2$. Рассмотрим k -представление $P_{\nu'} = B_2 \cdot (B_2^{-1} A_2 B_2)$, являющееся k -представлением, соответствующим типу ν' , в котором выделена пара $(\xi_3 - 2, 3)$. Подходящая Λ -композиция этого представления с k -представлением, соответствующим типу μ' , даст k -представление, соответствующее типу ξ . Пусть, наконец, $\xi_3 = 1$ и пара $(\xi_1, \xi_2) = (k, 1)$ по-прежнему является выделенной парой типа ξ . Тогда для $\mu = (k - 2, 1, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{s-3})$ и $\nu = (2, 0,$

$0, \xi_4, \xi_5, \dots, \xi_s)$ выполнено условие 3) определения k -разложимого типа. Построим по ним типы $\mu' = (k - 2, 1, 1)$ и $\nu' = (1, 1, \xi_4, \dots, \xi_s)$ и выделим пары $(k - 2, 1)$ и $(1, 1)$ соответственно. Для этих типов существуют соответствующие k -представления. Для типа μ' это следует из § 2, а для типа ν' — из предположения индукции (учесть, что если в ν' выделена тройка $(1, 1, \xi_j)$, где ξ_j нечетно и для ν' существует соответствующее k -представление, если в нем выделена пара $(1, 1)$). Следовательно, соответствующее k -представление существует и для ξ .

Таким образом, мы можем считать, что обе компоненты граничной пары отличны от 1. Предположим, что некоторая компонента ξ_j , следующая за граничной парой, равна 1. Тогда для подтипов $\mu = (\xi_1, \dots, \xi_{2i-2}, \xi_{2i-1} - 1, \xi_{2i} - 1, 0, \dots, 0, \xi_j, 0, \dots, 0)$ и $\nu = (\underbrace{0, \dots, 0}_{s-2i}, 1, 1, \xi_{2i+1}, \dots, \xi_{j-1}, 0, \xi_{j+1}, \dots, \xi_s)$ выполне-

но условие 2) определения k -разложимого типа. В типах μ' и ν' , полученных из μ и ν удалением нулевых компонент, выделим соответственно пары $(\xi_{2i-1} - 1, \xi_{2i} - 1)$ и $(1, 1)$, а в μ' еще и компоненты, выделенные в ξ . Так как для них существуют соответствующие k -представления, то требуемое представление существует и для ξ .

Предположим теперь, что все компоненты ξ_{2i-1}, \dots, ξ_s отличны от 1, а $\xi_{2i-1} \geq 3$. Тогда граничная пара не может содержать одну выделенную компоненту типа ξ . Так как для подтипов $\mu = (\xi_1, \dots, \xi_{2i-1} - 2, \xi_{2i}, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{s-2i-1})$ и $\nu = (\underbrace{0, \dots, 0}_{2i-2}, 2, 0, \xi_{2i+1} - 1, \xi_{2i+2}, \dots, \xi_s)$ выполнено условие 2) определения k -раз-

ложимого типа, то относительно этих подтипов тип ξ k -разложим. Выделим в $\mu' = (\xi_1, \dots, \xi_{2i-2}, \xi_{2i-1} - 2, \xi_{2i}, 1)$ при $i > 1$ компоненты, выделенные в ξ , и пару компонент $(1, \xi_{2i-1} - 2)$, а при $i = 1$ — тройку $(1, \xi_{2i-1} - 2, \xi_{2i})$. Так как тип $\nu' = (2, \xi_{2i+1} - 1, \xi_{2i+2}, \dots, \xi_s)$ является четным и имеет нечетную длину, то он содержит нечетные компоненты. Будем считать, что компонента $\xi_{2i+1} - 1$ нечетна. Выделим в ν' пару $(\xi_{2i+1} - 1, 2)$. Так как для μ' и ν' существуют соответствующие k -представления, то соответствующее k -представление существует и для ξ . Пусть теперь обе компоненты граничной пары равны 2. Если среди компонент, предшествующих граничной паре, найдется некоторая пара (ξ_{2j-1}, ξ_{2j}) , у которой $\xi_{2j-1} \geq 3$, то, поменяв ее с граничной парой, получим уже разобранный случай. Поэтому мы можем считать, что все компоненты, предшествующие граничной паре, не превосходят 2. Если при этом среди компонент, следующих за граничной парой, найдется пара (ξ_{2j-1}, ξ_{2j}) , сумма компонент которой ≥ 6 , то, переставив эту пару с граничной парой, получим некоторый тип ξ , для которого значение $\Delta_1 \geq 3$, а этот случай уже был разобран ранее. Если же все компоненты $\xi_{2i-1}, \xi_{2i}, \dots, \xi_s$ равны 2, то ξ является инволютивным типом, что противоречит предположению леммы 4, а потому этот случай невозможен. Таким образом, доказательство леммы 4, а вместе с ним и доказательство теоремы закончено.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Moran G. Reflection classes whose cubes cover the alternating group // J. Comb. Theory. Ser. A. – 1976. – V. 21. № 1. – P. 1–19.
2. Baginski C. On sets of elements of the same order in the alternating group A_n // Publ. Math. – 1987. – V. 34, № 3–4. – P. 313–315.
3. Brenner J.L., Evans R.J. Even permutations as a product of two elements of order five // J. Comb. Theory. Ser. A. – 1987. – V. 45. № 2. – P. 196–206.
4. Brenner J.L., Riddell J. Covering theorems for finite nonabelian simple groups VII. Asymptotics in the alternating group // Ars. Combin. – 1976. – V. 1. – P. 77–108.
5. Bertram E. Even permutations as a product of two conjugate cycles // J. Combin. Theory. Ser. A. – 1972. – V. 12. – P. 368–380.
6. Brenner J.L., Riddell J. Noncanonical factorization of a permutation // Amer. Math. Monthly. – 1977. – V. 84. – P. 39–40.
7. Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп. – 3-е изд. – М.: Наука, 1982.

Статья поступила 28.10.91